12. Határozatlan és határozott integrál

Tanulási cél: Megismerni a határozatlan és határozott integrál fogalmát. Elsajátítani az alapintegrálokat, és az egyszerűbb integrálási tételeket, valamint a Newton-Leibniz-formulát. Ezen ismereteket alkalmazni területszámítási és forgástestek térfogatára vonatkozó feladatokban.

Motivációs példa: Egy ház h_0 magasságban lévő ablakán kinyúlva elhajítunk egy testet függőlegesen felfelé v_0 kezdeti sebességgel. Adjuk meg a test sebességét és talajtól való távolságát az idő függvényében. A légellenállást hanyagoljuk el, tekintsük úgy, hogy csak a gravitációs erő hat a testre.
A megoldás során Newton II. törvényéből indulhatunk ki, mely szerint $F = ma$. Mivel a testre most csak a gravitációs erő hat, így $F = mg$. Ezt felhasználva $mg = ma$, amiből kapjuk, hogy $a = g$, azaz a gyorsulás állandó, és értéke minden pillanatban a gravitációs gyorsulással egyenlő. Így lényegében egy függvényünk van, ami a gyorsulást írja le az idő függvényében. Fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy a gyorsulás-idő függvény a sebesség idő függvény deriváltja. Ha tehát a gyorsulás ismeretében szeretnénk leírni a sebességet, akkor olyan függvényt kell keresnünk, aminek az ismert gyorsulás-idő függvény a deriváltja. Ha sikerül ilyen függvényt találnunk, akkor továbbléphetünk, mert azt is tudjuk fizikából, hogy a sebesség-idő függvény az elmozdulás-idő függvénynek a deriváltja. A sebesség-idő függvény ismeretében tehát olyan függvényt kell keresnünk, aminek a sebesség idő függvény a deriváltja. Amint látható, kétszer is olyan problémával találjuk magunkat szembe, melyben ismerünk egy függvényt, és olyan függvényt kell keresnünk, aminek ez az ismert függvény a deriváltja. Az alábbiakban ezzel a problémával foglalkozunk majd.

Elméleti összefoglaló:

Definíció: A $F(x)$ függvényt a $f(x)$ függvény primitív függvényének nevezzük, ha $F'(x) = f(x)$.

Egy $f(x)$ függvénynek nem csak egy primitív függvénye van. Tekintsük például a $f(x) = \cos x$ függvényt. Ennek nyilván primitív függvénye a $F(x) = \sin x$ függvény, hiszen $(\sin x)' = \cos x$. De primitív függvény lesz a $F_1(x) = \sin x + 1$ függvény is, mert $(\sin x + 1)' = (\sin x)' + 1' = \cos x + 0 = \cos x$.
Sőt, ha ezt így meggondoltuk, akkor azt mondhatjuk, $f(x)$-nek végtelenül sok primitív függvénye van, mert bármilyen konstanst hozzáadhatunk $\sin x$-hez, mindenképpen olyan függvényt kapunk, aminek deriváltja $\cos x$, hiszen a konstans deriváltja 0 lesz. Ezek alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvénynek primitív függvénye a $F(x)$ függvény, akkor bármely $F(x) + c$ függvény is primitív függvénye, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Felvetődik azonban a kérdés, hogy ilyen módon megkaphatunk-e minden olyan függvényt, ami primitív függvénye $f(x)$-nek? A válasz erre igen, ezt is megfogalmazhatjuk egy tételben.

Tétel: Ha $F_1(x)$ és $F_2(x)$ is primitív függvénye $f(x)$-nek, akkor $F_1(x)-F_2(x)$ konstans függvény.

Amint láthatjuk, egy $f(x)$ függvény primitív függvényei egy halmazt alkotnak, s ezen halmaz bármely két eleme csak egy konstansban tér el egymástól. Elég tehát egy elemet ismernünk ebből a halmazból, mert akkor az összes elemet megkaphatjuk ezen elemből különböző konstansok hozzáadásával. Mivel a primitív függvények halmazát ilyen egyszerűen megkaphatjuk, ezért egy fogalmat definiálunk.

Definíció: Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmazát az $f(x)$ függvény határozatlan integráljának nevezzük, és $\int f(x)\,dx$-szel jelöljük.

Ha $F(x)$ egy primitív függvénye $f(x)$-nek, akkor $\int f(x)\,dx = F(x)+c$, ahol c tetszőleges konstans.

Amint a fentiekből látható, a határozatlan integrálás vagy másképp a primitív függvény keresés a deriválás megfordításának tekinthető. Ezért a továbbiakban úgy haladhatunk, hogy tekintjük az alapderiváltakat, és azokat megfordítva az úgynevezett alapintegrálokat kapjuk. Például azt az alapderiváltat, hogy $(\sin x)' = \cos x$ az $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ formában fordítjuk meg, és írjuk alapintegrálként. Néhány esetben a megfordításon egy kicsit alakítunk. Például ha a $(\cos x)' = -\sin x$ alapderiváltból indulunk ki, akkor az egyszerű megfordítás $\int -\sin x\,dx = \cos x + c$ lenne, de ezt inkább $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ formában írjuk, hiszen nyilván $(-\cos x)' = \sin x$ is igaz. Hasonlóan a $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ alapderiváltból az $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$ alapintegrált kapjuk.

Vannak olyan elemi alapfüggvényeink, melyeknek deriváltja csak előjelben különbözik. Ilyen például az $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ és az $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ilyenkor nem szükséges mindkettőt megfordítanunk, hanem elég csak az egyiket. Az $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$ alapintegrál mellé nem szükséges még az $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c$ is. Ugyanígy elegendő az $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ és $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ alapderiváltak megfordításából az $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + c$ alapintegrált írni.

Az így kapott alapintegrálokat egy táblázatban foglaljuk össze. Ez lényegében az alapderiváltak táblázatának megfordítása, olyan apróbb változtatásokkal, amikről fentebb írtunk.

Az alapintegrálok táblázata:

$\int k\,dx = kx + c,\ k \in \mathbb{R}$	$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$
$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$	
$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c$
$\int \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + c$	$\int \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + c$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \operatorname{arsh} x + c$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arch} x + c,\ x > 1$
$\int \dfrac{1}{1-x^2}dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c, & \text{ha } \lvert x\rvert < 1 \\ \operatorname{arcth} x + c, & \text{ha } \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$	

Néhány alapintegrállal kapcsolatban szeretnénk megjegyzést tenni. Az egyik a hatványok integrálásra vonatkozó $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alapintegrál. Itt arra hívjuk fel nyomatékosan a figyelmet, hogy a -1-edik hatvány kivétel. Bár a hatványokat általában úgy integráljuk, hogy a kitevőt eggyel megnöveljük, és osztunk az új kitevővel, a -1-edik hatvány esetén nem ez történik. Mivel $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ a természetes alapú logaritmus, azaz $\ln x$ deriváltja, ezért az $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln x + c$ alapintegrált kapjuk. Ez csak pozitív x-ekre igaz, hiszen a logaritmus csak ekkor értelmezhető. Belátható azonban, hogy negatív x-ek esetén

$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c$ igaz, s ezt együttesen $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ formában foglalhatjuk össze. Ez így már pozitív és negatív x-ekre is igaz.

Az utolsó alapintegrál $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c, \text{ ha } |x| < 1 \\ \operatorname{arcth} x + c, \text{ ha } |x| > 1 \end{cases}$, azért ilyen bonyolult, mert az $\operatorname{arth} x$-nek és $\operatorname{arcth} x$-nek megegyezik a deriváltja, mindegyiknek $\frac{1}{1-x^2}$. A két függvény azonban máshol értelmezhető, ezért szerepel az integrálás eredményében x értékétől függően vagy az egyik, vagy a másik függvény. Szerencsére ez a bonyolult alapintegrál ki is kerülhető. A későbbiekben megismerünk majd egy olyan módszert, aminek segítségével másképp tudjuk integrálni ezt a függvényt.

Az alapintegrálok megismerése után jó lenne, ha ahhoz hasonló szabályokat is megfogalmazhatnánk, mint amilyenek a deriválásnál szerepeltek, mert akkor az alapintegrálokból műveletekkel képezett függvényeket is tudnánk integrálni. Nézzük milyen szabályok igazak a primitív függvényekre.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor a $k \cdot f(x)$, $k \in \mathbb{R}$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$.

Bizonyítás: Legyen $F(x)$ egy primitív függvénye $f(x)$-nek, azaz $F'(x) = f(x)$, vagy másképp $\int f(x) dx = F(x) + c$. Ekkor nyilván $k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$, ami azt jelenti, hogy $k \cdot F'(x)$ egy primitív függvénye $k \cdot f(x)$-nek, azaz
$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot F(x) + c = k \cdot \int f(x) dx$.

A tétel másképp úgy fogalmazható, hogy integrálás során konstans szorzó kiemelhető az integrálból.

Tétel: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor az $f(x) + g(x)$ függvénynek is létezik primitív függvénye, és
$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

Bizonyítás: Legyen $F(x)$ az $f(x)$ és $G(x)$ a $g(x)$ egy-egy primitív függvénye, tehát $F'(x) = f(x)$ és $G'(x) = g(x)$, vagy $\int f(x) dx = F(x) + c$ és $\int g(x) dx = G(x) + c$. Ekkor nyilván $\left(F(x) + G(x)\right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, azaz $F(x) + G(x)$ primitív függvénye $f(x) + g(x)$-nek, tehát
$\int f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x) + c = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

Ezt a tételt fogalmazhatjuk meg úgy is, hogy függvények összegét tagonként integrálhatjuk. A fenti két tételből nyilván az is következik, hogy függvények különbsége esetén
$\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.

A deriválásnál ezután az következett, hogy a függvények szorzatára, hányadosára és az összetett függvényekre is sikerült deriválási szabályt találnunk. Ezek a deriválási szabályok bármilyen szorzat, tört vagy összetett függvény esetén alkalmazhatóak voltak. Sajnos az integrálásnál ilyen szabályok nincsenek. Nem lehet kimondani olyan összefüggést, amelynek segítségével bármilyen függvények szorzata, vagy hányadosa, vagy kompozíciója integrálható lenne. A későbbiekben megismerünk majd szabályokat, melyek segítségével függvények szorzatát integrálhatjuk, de ezek a szabályok nem alkalmazhatók bármilyen függvények szorzata esetében, csak bizonyos speciális esetekben. Megismerünk majd olyan szabályt is, amit függvények hányadosának integrálására használhatunk, de csak bizonyos speciális törtekre alkalmazható. Speciális összetett függvényekre is lesz majd integrálási szabály, de azt sem lehet általánosan alkalmazni minden összetett függvényre. Éppen ezért az integrálás több találékonyságot igényel majd, mint amire a deriválásnál szükség volt.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 3x^4 - 2\sin x + 8e^x$ függvény határozatlan integrálját, azaz $\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x \, dx$-et!

Megoldás: Mivel függvények összegét illetve különbségét kell integrálnunk, ezért tagonként végezhetjük el az integrálást. Így három integrált kapunk.

$$\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x \, dx = \int 3x^4 \, dx - \int 2\sin x \, dx + \int 8e^x \, dx$$

Az egyes integrálokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 3x^4 \, dx - \int 2\sin x \, dx + \int 8e^x \, dx = 3\int x^4 \, dx - 2\int \sin x \, dx + 8\int e^x \, dx$$

Már csak alapintegrálok szerepelnek, melyeket egyszerűen behelyettesítünk. Az első részben egy hatványfüggvényt kell integrálnunk, így itt az $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alapintegrálra hivatkozva eggyel megnöveljük a kitevőt, s osztunk az új kitevővel. A második részben az $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$, a harmadikban pedig az $\int e^x dx = e^x + c$ alapintegrálra hivatkozunk.

$$3\int x^4 \, dx - 2\int \sin x \, dx + 8\int e^x \, dx = 3\frac{x^5}{5} - 2(-\cos x) + 8e^x + c = \frac{3}{5}x^5 + 2\cos x + 8e^x + c$$

Nem írjuk ki mindegyik rész integrálásánál külön-külön a c integrációs konstanst, mert c bármilyen valós értéket felvehet. Ha többször szerepelne, akkor a konstansok összege is egy konstans lenne, ami bármilyen valós értéket felvehetne. Ezért elég mindig csak egyetlen konstanst írnunk a primitív függvény után.

2. feladat: $\int 7\sqrt[4]{x} \, dx$

Megoldás: Első lépésként a konstans szorzót emeljük ki az integrálból.

$$\int 7\sqrt[4]{x} \, dx = 7\int \sqrt[4]{x} \, dx$$

Az alapintegrálok között a különböző gyökök a hatványokban szerepelnek. A deriválásnál is az történt, hogy a gyököket törtkitevős hatványként írtuk, és hatványként felírt alakot deriváltuk. Most ugyanígy járunk el az integrálás során is.

$$7\int \sqrt[4]{x}\,dx = 7\int x^{\frac{1}{4}}\,dx$$

Ezután már hivatkozhatunk az $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ alapintegrálra.

$$7\int x^{\frac{1}{4}}\,dx = 7\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + c = 7\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5}x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5}\sqrt[4]{x^5} + c\,.$$

Az eredményt írhatjuk törtkitevős hatványként, vagy gyökös formában is.

3. feladat: $\int \dfrac{6}{x^5}\,dx$

Megoldás: Kezdjük most is a konstans szorzó kiemelésével.

$$\int \frac{6}{x^5}\,dx = 6\int \frac{1}{x^5}\,dx$$

Az integrálandó függvényben, amit integrandusnak is szoktak hívni, most egy hatvány reciprokát látjuk. Ezt felírhatjuk negatív kitevős hatvány formájában, s így ismét csak egy hatványt kell majd integrálnunk. Ugyanígy járhattunk el az ilyen függvények deriválásakor is.

$$6\int \frac{1}{x^5}\,dx = 6\int x^{-5}\,dx$$

A hatvány integrálásakor most is növeljük eggyel a kitevőt, és osztunk az új kitevővel.

$$6\int x^{-5}\,dx = 6\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = 6\frac{x^{-4}}{-4} + c = \frac{6}{-4}x^{-4} + c = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^4} + c$$

Az eredményt most írhatjuk negatív kitevős hatvány, vagy tört formájában is.

4. feladat: $\int \sqrt[5]{x\cdot\sqrt{x}}\,dx$

Megoldás: Az integrálást ebből az alakból nyilván nem tudjuk végrehajtani, ezért először átalakítjuk az integrálandó függvényt. A gyököket írjuk át törtkitevős hatvánnyá, amint azt egy korábbi feladatban tettük.

$$\int \sqrt[5]{x\cdot\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}dx$$

Végezzük el a zárójelen belül a szorzást. Azonos alapú hatványok szorzása esetén egyetlen hatványt kapunk, melyben a kitevők összeadódnak.

$$\int \left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}dx = \int \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}dx$$

Most egy hatványt tovább hatványozunk. Ha ezt egyetlen hatványként írjuk, akkor a kitevők szorzódnak.

$$\int \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}dx = \int x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}}dx = \int x^{\frac{3}{10}}dx$$

Az integrandust sikerült egyetlen hatvánnyá alakítunk, így végre tudjuk hajtani az integrálást.

$$\int x^{\frac{3}{10}}dx=\frac{x^{\frac{3}{10}+1}}{\frac{3}{10}+1}+c=\frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}}+c=\frac{10}{13}x^{\frac{13}{10}}+c=\frac{10}{13}\sqrt[10]{x^{13}}+c$$

Az eredmény most is több alakban írható. Hagyhatjuk törtkitevős hatványként, de írhatjuk gyökös formában is.

A feladatból látható, hogy az integrandus megadott alakjából nem lehet elvégezni az integrálást. De az átalakítások után már olyan formában kapjuk meg a függvényt, ami egyetlen alapintegrál. Az integrálási feladatokban nagyon sokszor nem az okozza a fejtörést, hogy magát az integrálási lépést hogyan hajtsuk végre, hanem hogyan készítsük elő az integrálást, azaz milyen módon alakítsuk át az integrandust az integrálás előtt. Az átalakítások során nagyon gyakran olyan azonosságokra hivatkozunk, amelyek a középiskolából ismertek. Különösen szeretnénk kiemelni a hatványozás azonosságait, mert a hatványok gyakran fordulnak elő, s átalakításukra több azonosságot is ismerünk.

5. feladat: $\int \sqrt{x}\left(8x-5\sqrt[3]{x}\right)dx$

Megoldás: Az integrandusunk most egy szorzat. Amint az korábban szerepelt, ilyen esetben nincs általánosan alkalmazható integrálási szabály. Át kellene ezért alakítanunk úgy a függvényt, hogy már ne szerepeljen szorzás. Amint a korábbiakban, írjuk át most is a gyököket törtkitevős hatvánnyá, majd végezzük el a szorzást, azaz bontsuk fel a zárójelet.

$$\int \sqrt{x}\left(8x-5\sqrt[3]{x}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(8x-5x^{\frac{1}{3}}\right)dx=\int 8x^{\frac{1}{2}}x-5x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Az integrandus mindkét tagjában azonos alapú hatványok szorzata áll, melyeket egyetlen hatványként is írhatunk. A kitevők ekkor összeadódnak.

$$\int 8x^{\frac{1}{2}}x-5x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}\,dx=\int 8x^{\frac{1}{2}+1}-5x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\,dx=\int 8x^{\frac{3}{2}}-5x^{\frac{5}{6}}\,dx$$

Sikerült elérnünk, hogy már nincs függvények szorzása, hanem csak különbsége. Ekkor tagonként integrálhatunk. Az egyes tagokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 8x^{\frac{3}{2}}-5x^{\frac{5}{6}}\,dx=\int 8x^{\frac{3}{2}}\,dx-\int 5x^{\frac{5}{6}}\,dx=8\int x^{\frac{3}{2}}\,dx-5\int x^{\frac{5}{6}}\,dx$$

A két hatványt immár külön-külön integráljuk.

$$8\int x^{\frac{3}{2}}\,dx-5\int x^{\frac{5}{6}}\,dx=8\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-5\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}}+c=\frac{16}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{30}{11}x^{\frac{11}{6}}+c=\frac{16}{5}\sqrt{x^5}-\frac{30}{11}\sqrt[6]{x^{11}}+c$$

Mivel törtkitevős hatványokat integráltunk, az eredmény most is írható hatványként és gyökös alakban is.

6. feladat: $\int \frac{4x-9\sqrt{x}+6}{x^2}dx$

Megoldás: Az integrálandó függvény most egy tört. Sajnos a törtekre sincsen minden esetben használható integrálási szabály. A függvényt ezért ismét átalakítjuk az integrálás előtt. Első lépésben a gyököt írjuk hatványként.

$$\int \frac{4x-9\sqrt{x}+6}{x^2}\,dx = \int \frac{4x-9x^{\frac{1}{2}}+6}{x^2}\,dx$$

Mivel a tört számlálójában összeg illetve különbség áll, a törtet több törtre bonthatjuk úgy, hogy az egyes tagokat külön-külön osztjuk a nevezővel.

$$\int \frac{4x-9x^{\frac{1}{2}}+6}{x^2}\,dx = \int \frac{4x}{x^2}\,dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx + \int \frac{6}{x^2}\,dx$$

A konstans szorzókat ezután kiemelhetjük az egyes integrálokból.

$$\int \frac{4x}{x^2}\,dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx + \int \frac{6}{x^2}\,dx = 4\int \frac{x}{x^2}\,dx - 9\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx + 6\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

Az első két tagban azonos alapú hatványok hányadosa áll, amiket egyetlen hatvánnyá alakíthatunk. Ekkor a kitevők különbségét kell vennünk. A harmadik tagban egy hatvány reciproka szerepel, amit negatív kitevős hatványként írhatunk.

$$4\int \frac{x}{x^2}\,dx - 9\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx + 6\int \frac{1}{x^2}\,dx = 4\int x^{1-2}\,dx - 9\int x^{\frac{1}{2}-2}\,dx + 6\int x^{-2}\,dx =$$

$$= 4\int x^{-1}\,dx - 9\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx + 6\int x^{-2}\,dx$$

Már csak egy-egy hatványt kell integrálnunk. Vigyázzunk azonban, mert az első tagban éppen x^{-1} áll, aminek integrálása különbözik a többi hatvány integrálásától. Éppen ezért, ez ne is írjuk hatványként, hanem inkább $\frac{1}{x}$ alakban.

$$4\int \frac{1}{x}\,dx - 9\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx + 6\int x^{-2}\,dx$$

Most hajtsuk végre az integrálásokat.

$$4\int \frac{1}{x}\,dx - 9\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx + 6\int x^{-2}\,dx = 4\ln|x| - 9\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 6\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c =$$

$$= 4\ln|x| - 9\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 6\frac{x^{-1}}{-1} + c = 4\ln|x| + 18x^{-\frac{1}{2}} - 6x^{-1} + c = 4\ln|x| + \frac{18}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x} + c$$

Mint általában az ilyen feladatoknál, az eredmény most is több alakban adható meg.

Most pedig térjünk vissza ahhoz a motivációs példához, amivel a lecke indult, és adjunk választ az abban feltett kérdésekre.

7. feladat: Egy ház h_0 magasságban lévő ablakán kinyúlva elhajítunk egy testet függőlegesen felfelé v_0 kezdeti sebességgel. Adjuk meg a test sebességét és talajtól való távolságát az idő függvényében. A légellenállást hanyagoljuk el, tekintsük úgy, hogy csak a gravitációs erő hat a testre.

Megoldás: Amint azt a korábbiakban megállapítottuk, a test gyorsulását az idő függvényében az $a(t)=g$ konstans függvény írja le. A fizikai példában a megszokott jelölésekhez képest annyi az eltérés, hogy a függvényt nem f jelöli hanem a, a változót pedig nem x jelöli hanem t. (Természetesen ha valakit ez zavar, akkor használja az $f(x)=g$ jelölést.) Mivel a gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, így ezt integrálnunk kell a sebesség-idő függvény meghatározásához. Az integrálás során t lesz a változó, így most nem dx szerepel majd az integrálban hanem dt.

$$v(t)=\int a(t)\,dt=\int g\,dt$$

Mivel g konstans, hivatkozunk az $\int k\,dx=kx+c,\ k\in\mathbb{R}$ alapintegrálra, s így az alábbit kapjuk:

$$\int g\,dt=gt+c$$

Megkaptuk tehát a sebességet időben leíró függvényt, mely $v(t)=gt+c$ lett.

Ez azonban nem egyetlen függvényt jelent, hanem végtelen sokat, hiszen a c integrációs konstans bármilyen valós értéket felvehet. Ez így nyilván nincs rendben, hiszen mi egy konkrét függvényt keresünk most, ami ennek a konkrét mozgásnak a sebességét írja le.

Itt ne feledkezzünk el arról, hogy a test sebessége adott a mozgás kezdetén, azaz tudjuk, hogy a $t=0$ időpillanatban v_0 a sebesség felfelé. Ezt úgy is írhatjuk, hogy $v(0)=-v_0$. A negatív előjel azért van, mert amikor azt mondtuk a gyorsulás g, akkor hallgatólagosan kijelöltük a mozgás leírásában a pozitív irányt. Mivel a gyorsulást vettük pozitívnak, ami lefelé mutat, így a felfelé irány negatív lesz. Ezért a felfelé irányuló v_0 nagyságú kezdeti sebességet $-v_0$-ként kell írnunk.

Helyettesítsünk a sebességet leíró függvénybe t helyére 0-t.

$$v(0)=g\cdot 0+c=c$$

Tegyük egyenlővé a kétféle módon kapott $v(0)$-t, s kapjuk $c=-v_0$.

Ezután felírhatjuk azt a konkrét függvényt, ami az adott mozgás sebességét leírja.

$$v(t)=gt-v_0$$

Egy középiskolából ismert összefüggést kaptunk, melyet ott a függőleges hajítások kinematikája során ismertünk meg.

Ha most továbbmegyünk, és le szeretnénk írni a test talajtól való távolságát is az idő függvényében, akkor ezt a függvényt is integrálnunk kell, hiszen a sebesség az elmozdulás idő szerinti deriváltja.

$$s(t)=\int v(t)\,dt=\int gt-v_0\,dt$$

Az integrálást természetesen tagonként hajtjuk végre, s az első tagból a konstans g szorzó kiemelhető.

$$\int gt-v_0\,dt=g\int t\,dt-\int v_0\,dt=g\frac{t^2}{2}-v_0t+c^*$$

Megkaptuk tehát az elmozdulást az időben leíró függvényt, ami $s(t)=g\frac{t^2}{2}-v_0t+c^*$ lett.

Ebben is szerepel azonban egy integrációs konstans, amit most c^*-gal jelöltünk, hogy megkülönböztessük az előző konstanstól. Nyilván most ennek a konstansnak is konkrét értéke kell legyen. Tudjuk, hogy kezdetben h_0 magasságban van test, azaz ennek a függvénynek $t=0$ esetén h_0 az értéke. Jelölésben $s(0)=h_0$. De $s(0)$-t úgy is megkaphatjuk, hogy az $s(t)$ függvényben t helyére 0-t helyettesítünk.

$$s(0)=g\frac{0^2}{2}-v_0\cdot 0+c^*=c^*$$

Tegyük egyenlővé a kettőt, s azt kapjuk: $c^* = h_0$.
Ezek után felírhatjuk azt a konkrét függvényt, amely az adott mozgás során a test helyét írja le az idő függvényében.

$$s(t) = g\frac{t^2}{2} - v_0 t + h_0$$

Ismét olyan összefüggést kaptunk, ami már a középiskolából ismert.

Ellenőrző kérdések:

1. kérdés: $\int 9x^5 - 7^x \, dx$

Válasz1: $45x^4 - \frac{7^x}{\ln 7} + c$

Válasz2: $\frac{3}{2}x^6 - \frac{7^x}{\ln 7} + c$ (helyes)

Válasz3: $45x^4 - 7^x \cdot \ln 7 + c$

Válasz4: $\frac{3}{2}x^6 - 7^x \cdot \ln 7 + c$

2. kérdés: $\int 4\sqrt[5]{x^3} \, dx$

Válasz1: $\frac{12}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} + c$

Válasz2: $\frac{12}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + c$

Válasz3: $\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^8} + c$ (helyes)

Válasz4: $\frac{5}{2}\sqrt[8]{x^5} + c$

3. kérdés: $\int \frac{3}{x^4} \, dx$

Válasz1: $-\frac{1}{x^3} + c$ (helyes)

Válasz2: $\frac{1}{x^3} + c$

Válasz3: $-\frac{3}{5}\frac{1}{x^5} + c$

Válasz4: $\frac{3}{5}\frac{1}{x^5} + c$

4. kérdés: $\int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}} \, dx$

Válasz1: $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5}+c$

Válasz2: $\frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3}+c$

Válasz3: $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+c$ (helyes)

Válasz4: $\frac{3}{5}\sqrt[5]{x^3}+c$

5. kérdés: $\int x\left(5\sqrt{x}+4\right)dx$

Válasz1: $2\sqrt{x^5}+2x^2+c$ (helyes)

Válasz2: $\frac{10}{3}\sqrt{x^3}+2x^2+c$

Válasz3: $2\sqrt{x^5}+4x^2+c$

Válasz4: $\frac{10}{3}\sqrt{x^3}+4x^2+c$

6. kérdés: $\int \frac{x^3+6x-3}{2x^2}dx$

Válasz1: $\frac{x^2}{4}-\frac{3}{4x^2}+\frac{3}{x^3}+c$

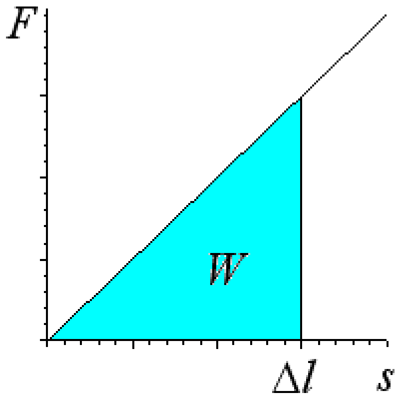
Válasz2: $x^2+3\ln|x|+\frac{3}{x^3}+c$

Válasz3: $x^2-\frac{3}{4x^2}+\frac{3}{x^3}+c$

Válasz4: $\frac{x^2}{4}+3\ln|x|+\frac{3}{2x}+c$ (helyes)

Motivációs példa: Mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy egy m tömegű űrhajót h távolságra juttassunk a Föld felszínétől?
Egy látszólag egyszerű feladattal állunk szemben, hiszen a munkát, amint azt középiskolában fizikából tanultuk, az erő és az erő irányába eső elmozdulás szorzataként számolhatjuk. Ezért először arra gondolhatunk, hogy meghatározzuk az űrhajóra ható gravitációs erőt, és ezt megszorozzuk h-val, hiszen a gravitációs erővel párhuzamos elmozdulás pontosan az, amennyivel az űrhajó eltávolodik a Föld felszínétől. De van egy kis gond, ami miatt ez mégsem ilyen egyszerű. Mivel h nagy, ezért az űrhajóra ható gravitációs erő nem tekinthető állandónak, hanem változik a Föld középpontjától való távolság függvényében. Márpedig a munkát csak akkor számolhatjuk a fenti egyszerű módon, ha az erő állandó. Változó erő munkájáról középiskolában azt tanultuk, hogy az erő-elmozdulás grafikon alatti alakzat területe adja meg az ilyen erő munkáját. Ennek jól ismert esete a rugó nyújtása. Ekkor tudjuk, hogy a rugó nyújtásához szükséges erő egyenesen arányos a rugó megnyúlásával. Ezt írja le

az $F_{rugó} = D \cdot \Delta l$ összefüggés, melyben D a rugóállandó, Δl pedig a rugó megnyúlása. Ha ábrázoljuk az erőt megnyúlás függvényében, akkor egyszerű lineáris függvényt kapunk.



Ha a rugót nyújtatlan állapotból Δl -lel megnyújtjuk, akkor a közben végzett munka az ábrán kékkel jelzett alakzat területe. Ez most könnyen meghatározható, hiszen egy derékszögű háromszög területét kell kiszámolni.

$$W = \frac{1}{2} F_{rugó} \cdot \Delta l = \frac{1}{2}\left(D \cdot \Delta l\right) \cdot \Delta l = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2$$

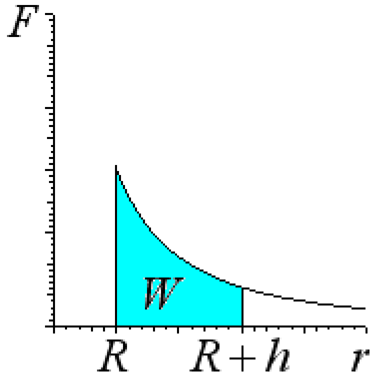
Az űrhajó esetén azonban a Föld által az űrhajóra kifejtett gravitációs erő nem lineáris a távolság függvényében, hanem a Föld középpontjától mért távolság négyzetével fordítva arányos. A gravitációs erőre az alábbi törvény ismert:

$$F_{grav} = k \frac{Mm}{r^2}.$$

Ebben k a gravitációs állandó $\left(k = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}\right)$, M a Föld tömege $\left(M = 6 \cdot 10^{24}\, kg\right)$, m az űrhajó tömege, r az űrhajónak a Föld középpontjától mért távolsága. Most r tölti be a változó szerepét, azaz a gravitációs erő r -nek a függvénye. Jelölésben ezt az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$F_{grav} = F_{grav}\left(r\right) = k \frac{Mm}{r^2}.$$

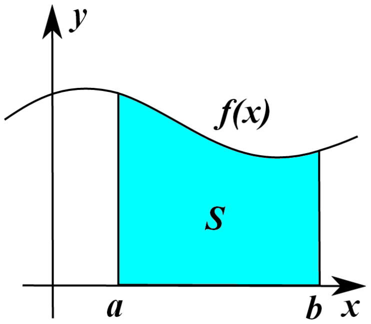
Ha most ábrázoljuk az erőt a Föld középpontjától mért távolság függvényében, akkor az alábbit kapjuk.



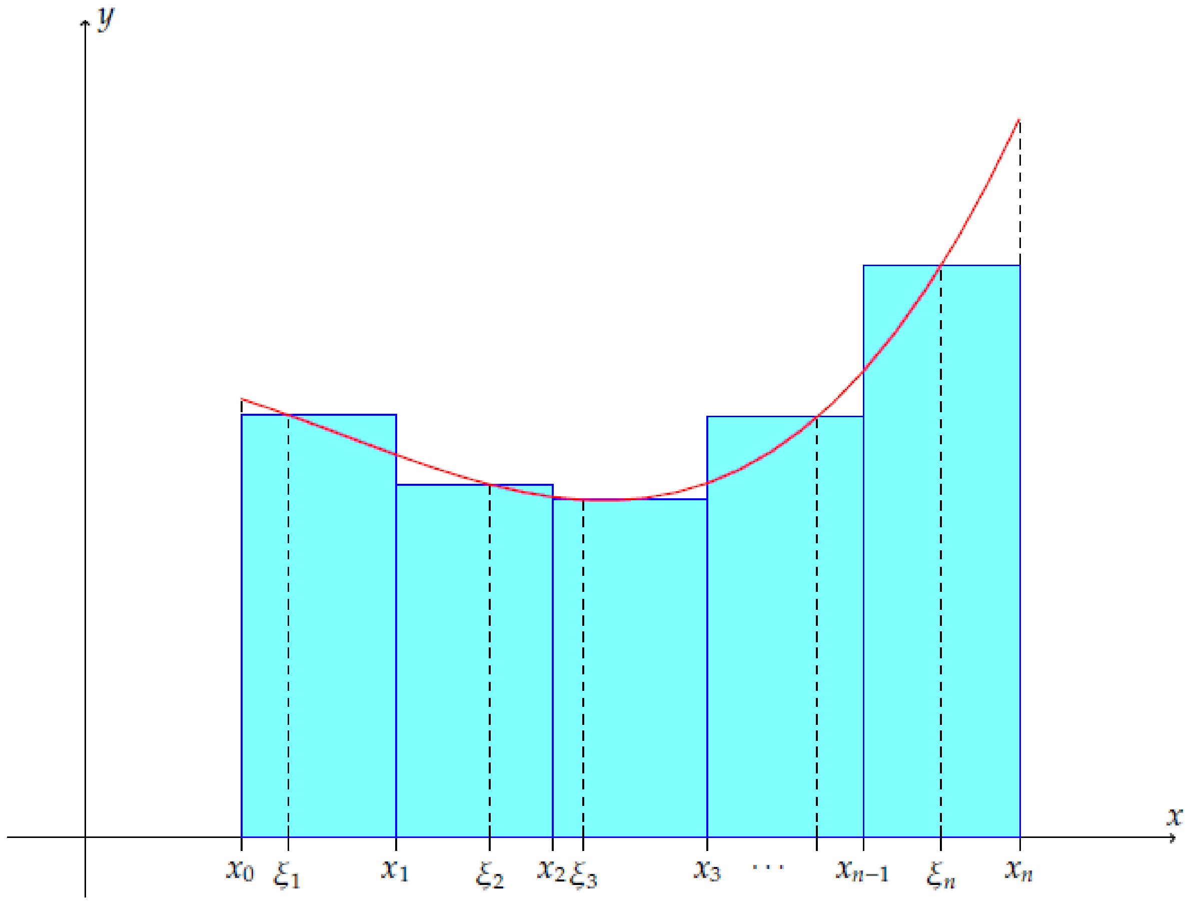
Ezen az ábrán a kékkel jelzett alakzat területe adja meg azt a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy az űrhajó a Föld felszínétől h magasságra távolodjon el. Most egy olyan alakzat területét kell meghatároznunk, melyet egyik oldaláról a vízszintes tengely egy szakasza, két másik oldaláról a függőleges tengellyel párhuzamos szakaszok, negyedik oldaláról pedig egy függvény grafikonja határol. Mivel például változó erő munkájának számoláshoz szükség volt ilyen alakzatok területének meghatározására, ki kellet dolgozni egy módszert, amivel ilyen görbe vonalú alakzatok területe egzakt módon meghatározható. Ez vezetett el a határozott integrál fogalmához, amivel az alábbiakban ismerkedünk meg.

Elméleti összefoglaló:

Induljunk ki tehát abból, hogy adott egy $[a,b]$-n értelmezett folytonos $f(x)$ függvény, melyre $f(x)>0$ teljesül az $[a,b]$-n, és szeretnénk meghatározni az $y=f(x)$, az $y=0$, az $x=a$ és az $x=b$ görbék által határolt alakzat területét. Ez az alakzat látható az alábbi ábrán.



Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n részre valamilyen $F_n=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ halmazzal, amelyre $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ teljesül. Ezt az F_n halmazt az $[a,b]$ intervallum egy felosztásának nevezzük. Egy-egy részintervallum hosszát a szomszédos osztópontok különbségeként kaphatjuk meg. Az i-edik részintervallum hossza például x_i-x_{i-1}, melyet Δx_i-vel is jelölünk. (A részintervallumok nem feltétlenül egyforma hosszúak.) A felosztás finomságának nevezzük a leghosszabb részintervallum hosszát, azaz $\max\Delta x_i$-t. Válasszunk ki mindegyik $[x_{i-1},x_i]$ részintervallumból egy ξ_i számot. Emeljünk mindegyik részintervallum fölé $f(\xi_i)$ magasságú téglalapot.



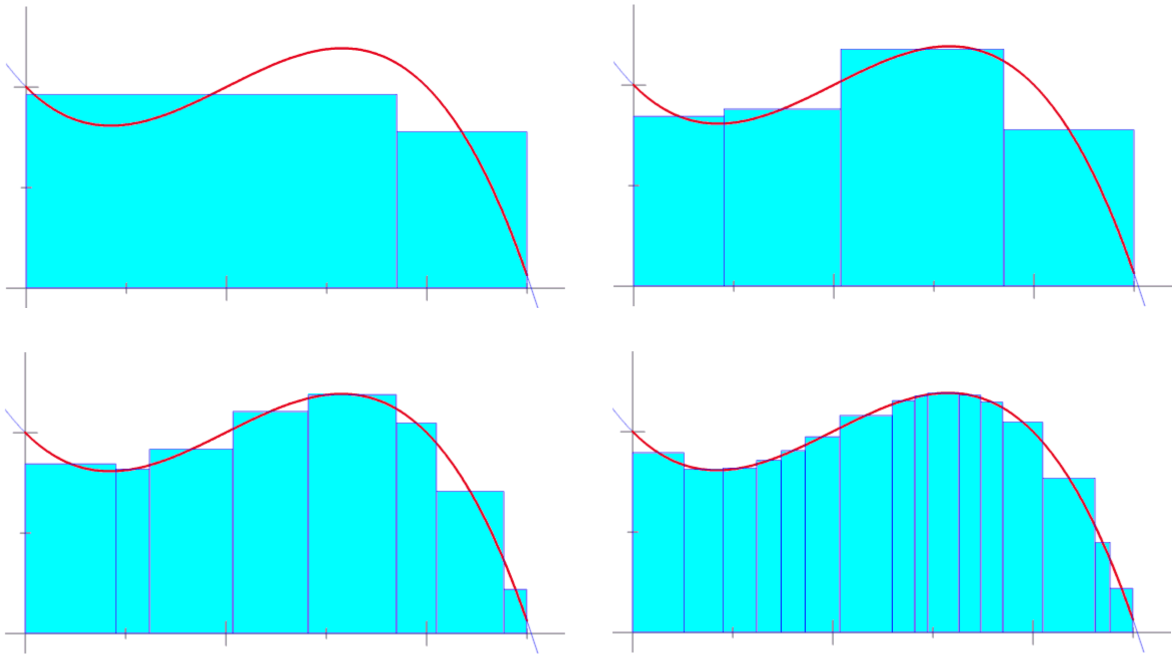
Ezen téglalapok területének összegével közelítjük a meghatározandó területet. Ezt az összeget az adott felosztáshoz tartozó közelítő összegnek nevezzük, és σ_n-nel jelöljük. Írjuk fel ezt az összeget. Az első téglalap területe: $T_1 = f(\xi_1)\cdot(x_1 - x_0) = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1$, a második téglalap területe $T_2 = f(\xi_2)\cdot(x_2 - x_1) = f(\xi_2)\cdot\Delta x_2$, az i-edik téglalap területe $T_i = f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Ezek alapján a közelítő összeg a következő:

$$\sigma_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = f(\xi_1)\cdot(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\cdot(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)\cdot(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n.$$

Ugyanezt rövidebben is írhatjuk:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

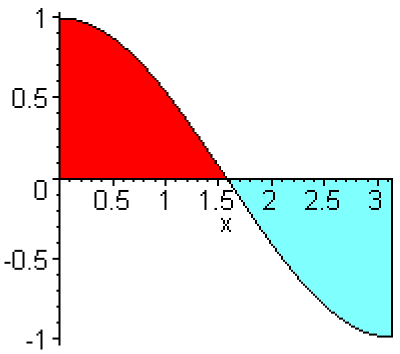
Növeljük a felosztásban a részintervallumok számát, így újabb és újabb felosztásokat kapunk. Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük akkor így felosztásoknak egy sorozatát kapjuk. Várhatóan az egyre több osztóponttal rendelkező felosztások egyre pontosabban fogják közelíteni az alakzatot, melynek területét meghatározni szeretnénk. Ez azonban csak akkor lesz igaz, ha a felosztás az osztópontok számának növelésével egyre finomodik is, azaz nem marad benne sehol túl hosszú részintervallum. Ezt fejezzük ki azzal, hogy olyan felosztássorozatot készítünk, amiben a felosztás finomsága nullához tart, azaz $\max \Delta x_i \to 0$. Nem történhet meg olyan a felosztássorozatban, hogy az $[a,b]$ intervallum egyik részén egyre sűrűsödik a felosztás, de valahol máshol benne marad egy hosszabb részintervallum. Az ilyen felosztássorozatokat végtelenül finomodó felosztássorozatoknak nevezzük. Az alábbi ábrákon ilyen egyre finomodó felosztások láthatók.



Definíció: Azt mondjuk, hogy az $[a,b]$-n értelmezett $f(x)$ függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$-n, ha a σ_n közelítő összegek sorozata minden végtelenül finomodó felosztássorozat estén konvergens, és ugyanahhoz a számhoz tart. Ekkor ezt a számot az $f(x)$ függvény $[a,b]$-n vett Riemann-integráljának, vagy határozott integráljának nevezzük és $\int_a^b f(x)dx$-szel jelöljük. Ez rövidebben az alábbi jelölésekkel írható:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Itt kell megjegyeznünk, hogy az egyszerűség kedvéért az elején olyan függvényről beszéltünk, ami az $[a,b]$-n pozitív értékeket vesz fel. Ekkor a fenti definíció valóban a függvény grafikonja és az x-tengely között elhelyezkedő alakzat területét adja meg az $[a,b]$-n. Ha azonban a függvény negatív értékeket is felvehet, akkor a téglalapokkal történő közelítésben $f(\xi_i)$ is lehet negatív, így az $f(\xi_i)\Delta x_i$ szorzat az i-edik téglalap területét előjelesen adja meg. Ha $f(\xi_i)>0$, a közelítésben a téglalap az x-tengely felett helyezkedik el. Ekkor $f(\xi_i)\Delta x_i$ pozitív, tehát valóban a téglalap területét kapjuk. De ha $f(\xi_i)<0$, a téglalap az x-tengely alatt helyezkedik el. Ekkor $f(\xi_i)\Delta x_i$ negatív, s a téglalap területének -1-szeresével egyenlő. Ebből következően, az integrál a függvény grafikonja és az x-tengely között elhelyezkedő alakzat területét előjelesen adja meg. Ha a függvény pozitív, azaz grafikonja az x-tengely felett halad, akkor valóban területet kapunk, de ha a függvény negatív, akkor a terület -1-szeresét kapjuk. Ezért kapjuk azt, hogy ha egy függvény előjele megváltozik az $[a,b]$ belsejében, és a pozitív illetve negatív részen egyenlő nagyságú a terület a függvény grafikonja és az x-tengely között, akkor nulla a függvény integrálja az $[a,b]$ intervallumon. Erre példa mondjuk az $f(x)=\cos x$ függvény a $[0,\pi]$-n.



Amint az ábrán látható, a pirossal illetve kékkel jelölt alakzatok szimmetria miatt egyenlő területűek, de míg a piros az x-tengely felett, a kék az x-tengely alatt helyezkedik el. Az integrálás így a piros alakzat területét, a kék alakzat területének pedig -1-szeresét adja. Így a függvény integrálja a teljes $[0,\pi]$ intervallumon ezek összeg, azaz nulla lesz.

A Riemann-integrál hosszadalmas definíciója után felvetődik az a kérdés, hogy milyen függvények integrálhatóak. Ezzel kapcsolatban két tételt mondunk ki bizonyítás nélkül.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f(x)$ ezen az intervallumon korlátos. A korlátosság tehát szükséges feltétele az integrálhatóságnak. (Nem minden $[a,b]$-n korlátos függvény integrálható $[a,b]$-n.)

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor integrálható is $[a,b]$-n. A folytonosság tehát elégséges feltétele az integrálhatóságnak. (Nem minden $[a,b]$-n integrálható függvény folytonos $[a,b]$-n.)

A határozott integrálra vonatkozóan sok tétel bizonyítható. Ezeket szokták a határozott integrál tulajdonságainak nevezni. Vannak köztük olyanok, melyek hasonlóak, mint a határozatlan integrál tulajdonságai.

Tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ integrálhatóak az $[a,b]$-n, k pedig tetszőleges valós szám, akkor a $k\cdot f(x)$, $f(x)+g(x)$ és $f(x)-g(x)$ függvények is integrálhatóak $[a,b]$-n, és

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)-g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Tehát amint a határozatlan integrálnál, úgy a határozott integrálnál is konstans szorzó kiemelhető az integrálból, valamint összeget és különbséget tagonként integrálhatunk. A különbségre vonatkozó állítás a másik kettőből már egyszerűen következik.

A határozott integrálnak vannak olyan tulajdonságai is, amelyekben az integrálási intervallumnak fontos szerepe van. A határozatlan integrálnál ilyen tulajdonságok nyilván nem voltak.

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható a-tól b-ig, akkor integrálható b-től a-ig is, és

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

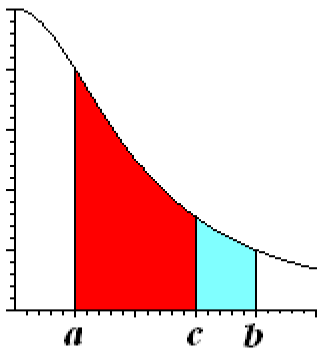
Azaz ha felcseréljük az integrálási határokat, az integrál -1-szeresét kapjuk.

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$-n, akkor integrálható $[a, b]$ bármely részintervallumán is.

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$-n, és $a < c < b$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ezt fogalmazhatjuk úgy is, hogy az integrálás az $[a,b]$-n részletekben is végrehajtható. Pozitív értékű függvény esetén szemléletesen arról van szó, hogy a függvény grafikonja és az x-tengely közti terület az $[a,b]$-n úgy is meghatározható, hogy vesszük a területet az $[a,c]$-n, és hozzáadjuk a területet $[c,b]$-n. (Az $[a,b]$ intervallumon a terület a piros és kék alakzat területének összege.)



Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumokon, akkor integrálható az $[a,b]$ intervallumon is, és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tétel: Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$-n, és $f(x) \geq 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Ha nem negatív függvényt integrálunk, akkor az integrál sem negatív.

Tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ integrálhatóak az $[a,b]$-n, valamint $f(x) \geq g(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor

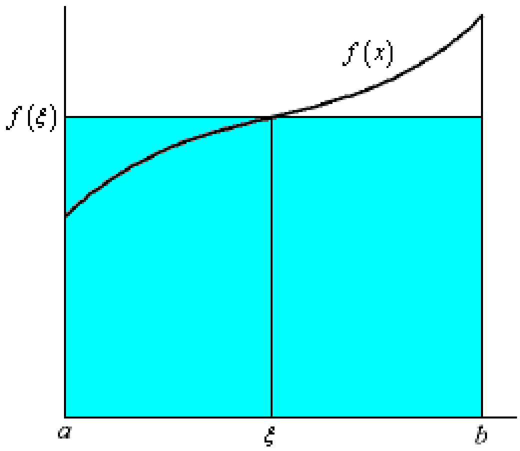
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Más megfogalmazásban azt mondhatjuk, hogy a nem kisebb értékű függvény integrálja sem kisebb.

Tétel: (Az integrálszámítás középértéktétele) Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b]$-n, akkor létezik legalább egy $\xi \in [a,b]$, melyre igaz, hogy

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Pozitív értékű függvény esetén szemléletes arról van szó, hogy az $f(x)$ függvény grafikonját tudjuk metszeni olyan vízszintes egyenessel, ami alatt az $[a,b]$-n pontosan akkora területű téglalap van, mint a függvény és az x-tengely közti alakzat területe az $[a,b]$-n. Az ábrán kékkel jelölt téglalap területe $f(\xi)\cdot(b-a)$, mely megegyezik a függvény grafikonja és az x-tengely közti területtel.



Tétel: (Newton-Leibniz-formula) Ha $f(x)$ integrálható az $[a,b]$-n, és $F(x)$ egy tetszőleges primitív függvénye $f(x)$-nek, akkor

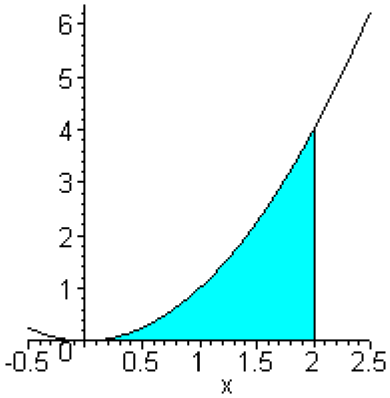
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Az $F(b)-F(a)$ különbség rövidebb írására gyakran használatos az $[F(x)]_a^b$ jelölés.
Ezt a tételt gyakran nevezik az integrálszámítás alaptételének is, mert a határozott integrál és a primitív függvény közötti kapcsolatot mondja ki. Ezzel lehetővé teszi számunkra a határozott integrál pontos kiszámolását olyan esetekben, amikor a definíció alapján ezt nem tudnánk elvégezni. Márpedig a definíció alapján csak nagyon kevés esetben számolható ki pontosan a határozott integrál, s általában akkor is nagyon nehézkes.

Kidolgozott feladatok:

8. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti alakzat területét a $[0,2]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát az alakzatról.



Amint látható, egy olyan háromszöghöz hasonló alakzat területe a kérdés, amit felülről az $f(x)=x^2$ függvény grafikonja, azaz egy parabola határol. Mivel a függvény a $[0,2]$ intervallumon nem vesz fel negatív értéket, így a területet megkapjuk, ha a függvényt integráljuk ezen az intervallumon.

$$T=\int_0^2 x^2\,dx$$

Meg kell határoznunk $f(x)$ egy primitív függvényét, így először határozatlanul integrálunk. Hatványt integrálunk, tehát eggyel növeljük a kitevőt, és osztunk az új kitevővel.

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+c$$

Mivel csak egy primitív függvényre van szükségünk, így c-t tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legegyszerűbb a $c=0$ választás. Így kapjuk, hogy $f(x)=x^2$ egy primitív függvénye

$$F(x)=\frac{x^3}{3}.$$

Ezután helyettesítünk a Newton-Leibniz-formulába.

$$T=\int_0^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{2^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{8}{3}$$

A kérdezett terület tehát $\frac{8}{3}$ egységnyi.

A későbbiekben az ehhez hasonló feladatok megoldását rövidebben írjuk majd. A primitív függvényt nem határozzuk meg külön, hanem a határozott integrál után egyből írjuk a primitív függvényt $[\ ]$-ben, feltüntetve a zárójel után az integrálási határokat. Így a megoldás lényegében csak az utolsó sorból áll majd. Ha a primitív függvény meghatározása nem ilyen egyszerű mint most, akkor célszerű lehet külön elvégezni a határozatlan integrálást, és utána visszatérni a határozott integrálhoz.

9. feladat: Határozzuk meg az $\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx$ határozott integrált!

Megoldás: A megoldás során először primitív függvényt kell keresnünk, amihez alakítsuk át az integrandust úgy, hogy egyetlen hatványt kapjunk.

$$\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int_1^4 x^{1+\frac{1}{2}}\,dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

Adjuk meg a primitív függvényt, hivatkozva a hatványok alapintegráljára, azaz növeljük eggyel a kitevőt, és osztunk az új kitevővel. A primitív függvényt tegyük a $\left[\ \right]$-be, és tüntessük fel mögötte az integrálási határokat. A primitív függvényt írjuk minél egyszerűbb alakban.

$$\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right]_1^4$$

Helyettesítsük be a primitív függvénybe a felső integrálási határt, majd vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét, és végezzük el a műveleteket.

$$\int_1^4 x\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right]_1^4 = \frac{2}{5}\sqrt{4^5} - \frac{2}{5}\sqrt{1^5} = \frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{62}{5} = 12.4$$

10. feladat: $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

Megoldás: Járjunk el úgy mint az előző feladatban, azaz írjuk hatványként az integrálandó függvényt.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt, s hozzuk minél egyszerűbb alakra.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_1^8 = \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_1^8$$

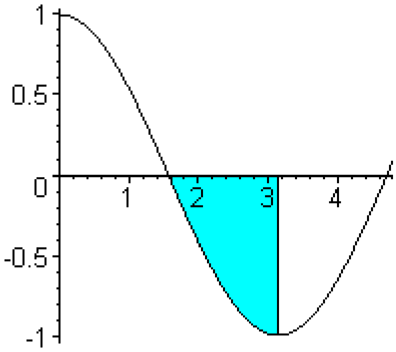
Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a két helyettesítési érték különbségét. A felső határ helyettesítési értékéből vonjuk az alsó határ helyettesítési értékét. A műveleteket ezután végezzük el.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_1^8 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{1^2} = \frac{3}{2}\cdot 4 - \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{9}{2} = 4.5$$

Ha a primitív függvényben szerepel valamilyen konstans szorzó, mint jelen esetben a $\frac{3}{2}$, akkor azt határok behelyettesítésekor rögtön kiemelhetjük, így nem kell kétszer leírnunk.

11. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti alakzat területét a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk ábrát a függvényről és a kérdéses alakzatról.



Amint látható, a függvény a megadott intervallumon negatív értékeket és a 0-t veszi fel, így az alakzat területe a függvény integráljának -1-szerese lesz. Persze ezt úgy is mondhatnánk, hogy az integrál abszolút értéke lesz a terület.

$$T = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx \right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = -\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

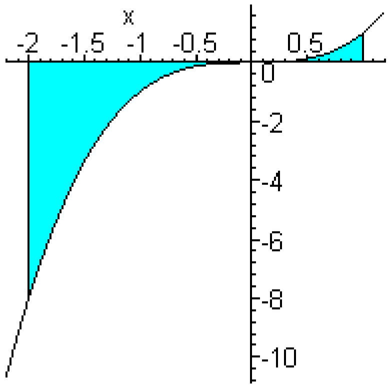
Helyettesítsük a felső integrálási határt, majd vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét, és végezzük el a műveleteket.

$$T = -\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}\right) = -(0-1) = 1$$

A kérdezett terület tehát pontosan 1 egységnyi.

12. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti alakzat területét a $[-2,1]$ intervallumon.

Megoldás: Most is egy ábrával célszerű kezdenünk a megoldást.



Amint látható, a függvénynek az $x = 0$-nál zérushelye van, s a $[-2,0)$ intervallumon negatív, a $(0,1]$ pedig pozitív. A területet így két részletben kell számolnunk. Integráljuk egyrészt a függvényt a $[-2,0]$ intervallumon, és ennek az integrálnak vesszük az abszolút értékét, mert itt a függvény negatív vagy 0. Ezzel megkapjuk a függvény és az x-tengely közti területet $[-2,0]$ intervallumon. Valamint vesszük a függvény integrálját a $[0,1]$ intervallumon, ami megegyezik itt a függvény és az x-tengely közti területtel, mert a függvény itt pozitív vagy 0. A teljes területet pedig a két terület összegeként kapjuk.

$$T=\left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right|+\int_{0}^{1} x^3\,dx=-\int_{-2}^{0} x^3\,dx+\int_{0}^{1} x^3\,dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T=-\int_{-2}^{0} x^3\,dx+\int_{0}^{1} x^3\,dx=-\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

Mindkét esetben helyettesítsük az integrálási határokat, és felső határ helyettesítési értékéből vonjuk ki az alsó határ helyettesítési értékét. A számolásokat ezután végezzük el.

$$T=-\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=-\left(\frac{0^4}{4}-\frac{(-2)^4}{4}\right)+\left(\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)=-(0-4)+\left(\frac{1}{4}-0\right)=\frac{17}{4}=4.25$$

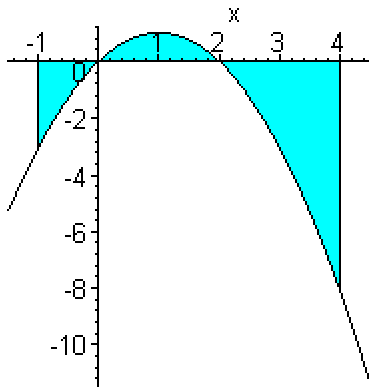
A kérdezett terület tehát 4.25 egység.

13. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=2x-x^2$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti alakzat területét a $[-1,4]$ intervallumon.

Megoldás: Most is célszerű ábrázolni a függvény adott intervallumba eső részét. Mivel másodfokú függvényt kell ábrázolnunk, célszerű meghatározni a zérushelyeket. Emeljünk ki x-et, mert így azt kell vizsgálnunk, hogy egy szorzat mikor egyenlő nullával.

$$2x-x^2=0 \iff x(2-x)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{vagy} \\ 2-x=0 \iff x=2 \end{cases}$$

A zérushelyek tehát $x_1=0$ és $x_2=2$. Ezek ismeretében már könnyen ábrázolható a parabola. Mivel x^2 együtthatója negatív, ezért konkáv parabolát kell rajzolnunk.



A kérdéses alakzat most három részből áll, mivel a függvény két helyen is metszi az x-tengelyt az adott intervallumon belül. Az első rész a $[-1,0]$ intervallumhoz tartozó rész, a második a $[0,2]$ intervallumhoz tartozó rész, s a harmadik a $[2,4]$ intervallumhoz tartozó rész. Mivel az első és a harmadik részen a függvény nem pozitív, így a terület meghatározásához ezeken a részeken a függvény integráljának abszolút értékét kell venni.

$$T = \left|\int_{-1}^{0} 2x - x^2\, dx\right| + \int_{0}^{2} 2x - x^2\, dx + \left|\int_{2}^{4} 2x - x^2\, dx\right| = -\int_{-1}^{0} 2x - x^2\, dx + \int_{0}^{2} 2x - x^2\, dx - \int_{2}^{4} 2x - x^2\, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = -\int_{-1}^{0} 2x - x^2\, dx + \int_{0}^{2} 2x - x^2\, dx - \int_{2}^{4} 2x - x^2\, dx = -\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} - \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{4}$$

Helyettesítsük mindhárom estben az integrálási határokat a Newton-Leibniz-formulának megfelelően, majd hajtsuk végre a műveleteket.

$$T = -\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} - \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{2}^{4} =$$

$$= -\left(\left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right) - \left((-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) + \left(\left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right)\right) - \left(\left(4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right)\right) =$$

$$= -\left(0 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right) + \left(\left(4 - \frac{8}{3}\right) - 0\right) - \left(\left(16 - \frac{64}{3}\right) - \left(4 - \frac{8}{3}\right)\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \left(-\frac{16}{3} - \frac{4}{3}\right) = \frac{28}{3}$$

Amint látható, minél több helyen metszi a függvény grafikonja az adott intervallumon belül a x-tengelyt, annál több részben kell számolnunk a területet. Mindig figyeljünk oda arra, hogy mely részintervallumokon halad a függvény grafikonja a x-tengely alatt. Ezeken a részeken az integrál abszolút értékét kell vennünk, azaz szorozni kell az integrált -1-gyel.

Ezek után térjünk vissza ahhoz a motivációs példához, ami a határozott integrál bevezetése előtt szerepelt.

14. feladat: Mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy egy m tömegű űrhajót h távolságra juttassunk a Föld felszínétől?

Megoldás: Amint az korábban szerepelt, az űrhajóra a Föld által kifejtett gravitációs erő hat, amit $F_{grav} = F_{grav}(r) = k\dfrac{Mm}{r^2}$ összefüggéssel írhatunk le a Föld középpontjától mért távolság függvényében. A munka az $F_{grav}(r)$ függvény grafikonja alatti terület az $[R, R+h]$ intervallumon. Amint az egy korábbi ábrán látható volt, a függvény pozitív értékeket vesz fel, így a terület a függvény ezen intervallumon vett integráljával egyenlő. A változó szerepét most r tölti be, így r szerint integrálunk.

$$W = \int_{R}^{R+h} k\frac{Mm}{r^2}\, dr$$

Mivel $k,\ M,\ m$ konstansok, így kiemelhetők az integrálból.

$$W = kMm\int_{R}^{R+h} \frac{1}{r^2}\, dr$$

Az integrandust ezután írjuk negatív kitevős hatvány formájában. Így már könnyen meghatározható a primitív függvény, amit hozzunk minél egyszerűbb alakra.

$$W = kMm\int_R^{R+h} r^{-2}\,dr = kMm\left[\frac{r^{-1}}{-1}\right]_R^{R+h} = kMm\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h}$$

Helyettesítsük be ezután az integrálási határokat, s vegyük a két helyettesítési érték különbségét.

$$W = kMm\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h} = kMm\left(-\frac{1}{R+h}-\left(-\frac{1}{R}\right)\right) = kMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)$$

Ezzel olyan összefüggést kaptunk a munkára, amibe csak az űrhajó tömegét és a felszíntől való eltávolodását kell behelyettesíteni. Ha ezeket az adatokat ismerjük, a munka pontosan kiszámolható.

Ellenőrző kérdések:

7. kérdés: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt[3]{x}$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti alakzat területét a $[0,8]$ intervallumon.

Válasz1: 9
Válasz2: 10
Válasz3: 12 (helyes)
Válasz4: 15

8. kérdés: $\int_1^{16} x\sqrt[4]{x}\,dx$

Válasz1: $\frac{1972}{9}$
Válasz2: $\frac{2044}{9}$ (helyes)
Válasz3: $\frac{2096}{9}$
Válasz4: $\frac{2110}{9}$

9. kérdés: $\int_1^{9} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

Válasz1: 3
Válasz2: $\frac{10}{3}$
Válasz3: 4 (helyes)
Válasz4: $\frac{13}{3}$

10. kérdés: Határozzuk meg az $f(x)=\sin x$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti alakzat területét a $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon.

Válasz1: $\frac{1}{2}$ (helyes)
Válasz2: $\frac{1}{\sqrt{2}}$
Válasz3: $\frac{1}{3}$
Válasz4: $\frac{1}{\sqrt{3}}$

11. kérdés: Határozzuk meg az $f(x)=4-x^2$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti alakzat területét a $[0,3]$ intervallumon.

Válasz1: 3
Válasz2: $\frac{14}{3}$
Válasz3: 6
Válasz4: $\frac{23}{3}$ (helyes)

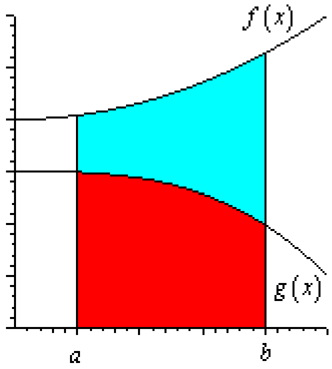
12. kérdés: Határozzuk meg az $f(x)=x^2+3x$ függvény grafikonja és az x-tengely közötti alakzat területét a $[-5,1]$ intervallumon.

Válasz1: 6
Válasz2: 8 (helyes)
Válasz3: 12
Válasz4: 15

Elméleti összefoglaló: A határozott integrál nem csak olyan alakzatok területének meghatározását teszi lehetővé, melyek egy függvény grafikonja és az x-tengely között helyezkednek el, hanem más görbékkel határolt alakzatokét is. Ha például a folytonos $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai nem metszik egymást az $[a,b]$ intervallum belsejében, akkor a függvények grafikonjai, valamint az $x=a$ és $x=b$ egyenesek által határolt síkrész területe, vagy máképp fogalmazva a függvények grafikonjai közti terület az $[a,b]$ intervallumon a következő:

$$T=\left|\int_a^b f(x)-g(x)\,dx\right|.$$

Ha tudjuk, hogy az $[a,b]$-n $f(x)\geq g(x)$, akkor az abszolút érték elhagyható, hiszen $f(x)-g(x)$ nem negatív értékű függvény az $[a,b]$-n. Az állítás helyességét az egyszerűség kedvéért $f(x)$ és $g(x)$ $[a,b]$-n pozitív függvények esetén az alábbi ábra segítségével láthatjuk be.

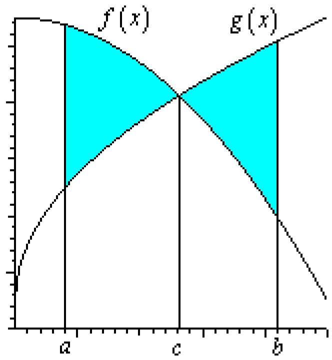


Ezen látható, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ megadja a pirossal és kékkel jelölt alakzatok területének összegét, az $\int_a^b g(x)dx$ pedig csak a piros alakzat területét. A kékkel jelölt síkrész területe így a kettő különbsége, tehát: $T=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$. A határozott integrál tulajdonságai között szerepelt, hogy azonos intervallumon vett integrálok különbsége megegyezik a függvények különbségének integráljával, azaz:

$$T=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)-g(x)dx.$$

Két függvény grafikonja közti területet tehát úgy kapjuk, hogy a nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbat, s különbséget integráljuk.

Ha a két függvény grafikonja metszi egymást az $[a,b]$ intervallum belsejében, akkor a grafikonok közti területet részletekben számolhatjuk. Az alábbi ábrán látható, hogy az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai metszik egymást a c helyen.



Az $[a,c]$ intervallumon $f(x)\geq g(x)$, így ezen a részintervallumon $f(x)-g(x)$-et integráljuk, míg a $[c,b]$ intervallumon $g(x)\geq f(x)$, így ezen a részintervallumon $g(x)-f(x)$-et integráljuk. A terület tehát a következő:

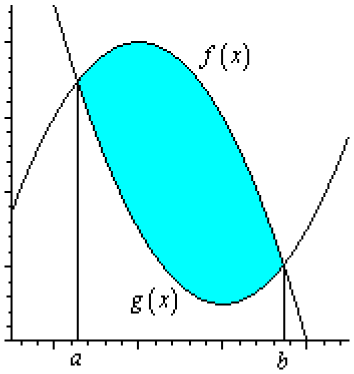
$$T = \int_a^c f(x) - g(x)\,dx + \int_c^b g(x) - f(x)\,dx\,.$$

Amennyiben nem szeretnénk vizsgálni, hogy az egyes részeken melyik függvény vesz fel nagyobb értékeket, akkor megtehetjük azt is, hogy tetszőlegesen vesszük a két függvény különbségét, azt integráljuk az egyes részeken, s az integráloknak vesszük az abszolút értékét. Ezt az alábbi módon írhatjuk.

$$T = \left|\int_a^c f(x) - g(x)\,dx\right| + \left|\int_c^b f(x) - g(x)\,dx\right|$$

Ha a függvények grafikonjai nem csak egy helyen metszik egymást, akkor természetesen több részletben kell számolnunk.

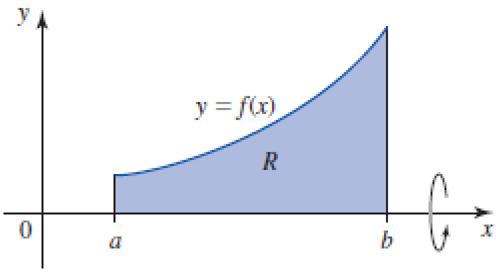
Lényegében ugyanígy járhatunk el, ha két függvény grafikonja által közrezárt síkrész területe a kérdés. Az ilyen alakzat a grafikonok metszéspontjai között helyezkedik el, amint az alábbi ábrán látható.

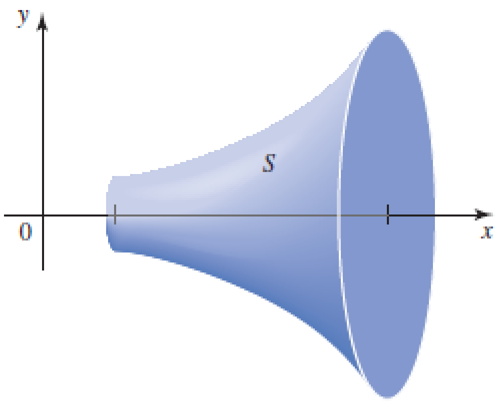


Ilyenkor először meg kell oldanunk az $f(x) = g(x)$ egyenletet. Ezzel kapjuk meg a metszéspontok helyét, azaz a -t és b -t. Ezek után az $[a,b]$-n nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbat, s különbséget integráljuk $[a,b]$-n.

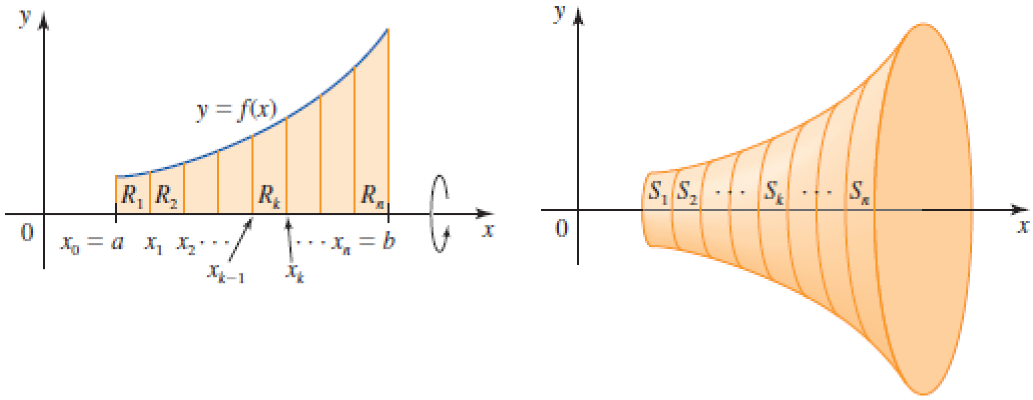
A görbe vonallal határolt alakzatok területének számolása a határozott integrál legkézenfekvőbb alkalmazása. De a határozott integrál nem csak erre jó. Az alábbiakban a forgástestek térfogatának meghatározására ismerünk meg egy alkalmazást.

Tekintsük az $[a,b]$ intervallumon nem negatív, folytonos $f(x)$ függvényt. Az $f(x)$ grafikonja, az x -tengely, az $x = a$ és $x = b$ egyenes által határolt alakzatot forgassuk meg az x -tengely körül, így egy forgástestet kapunk. Ez látható az alábbi ábrákon.

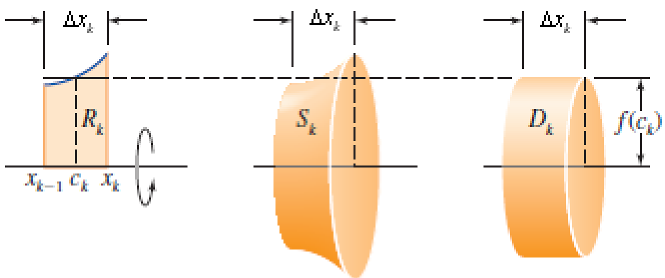




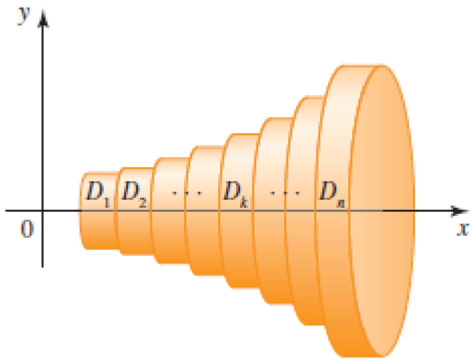
Határozzuk meg ennek a forgástestnek a térfogatát. Használjuk ehhez azt az eljárást, amit a terület meghatározásakor alkalmaztunk. Osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot n részre. Az intervallum felosztása a forgástestet vékony rétegekre bontja.



A vékony rétegekben határozzuk meg közelítőleg a térfogatot úgy, hogy lapos hengerrel közelítünk. Tekintsük a k -adik részintervallumot, melynek szélessége Δx_k. Válasszunk a részintervallumból egy számot, legyen ez c_k. Hanyagoljuk el a függvény változását a részintervallumon, és tekintsük úgy, mintha az egész részen az $f(c_k)$ értéket venné fel a függvény. A forgatás során így az ívelt oldalú rétegből egy lapos henger lesz, melynek sugara $f(c_k)$-val egyenlő, magassága pedig Δx_k. Ez látható az alábbi ábrán.



Hajtsuk végre ezt a közelítést minden részintervallumon, így a forgástestet egymás melletti lapos hengerek sokaságával közelítjük.



Írjuk fel, hogyan számolható ki egy ilyen lapos henger térfogata. Mivel a k -adik henger sugara $f(c_k)$, magassága pedig Δx_k a térfogata az alábbi:

$V_k = \pi f^2(c_k)\Delta x_k$.

Összegezzük ezután a hengerek térfogatát, ezzel egy közelítést kapunk a forgástest térfogatára.

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(c_k)\Delta x_k$$

Ebben az összegben felismerhető, hogy a $\pi f^2(x)$ függvény integrálközelítő összege.
A közelítés nyilván annál pontosabb lesz, minél laposabbak a hengerek. Növeljük ezért az osztópontok számát, s vegyük a fenti összeg határértékét $n \to \infty$ esetén, miközben a felosztás finomsága egyre kisebb lesz, azaz $\max \Delta x_k \to 0$. Ha létezik a határérték, megkapjuk a pontosan a test térfogatát. A közelítő összeg határértéke pedig nem más, mint a $\pi f^2(x)$ függvény határozott integrálja az $[a,b]$ intervallumon.

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} V_k = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(c_k)\Delta x_k = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

A konstans π kiemelhető az integrálból, s így a forgástest térfogatára az alábbi összefüggést kapjuk:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Ezzel olyan képlethez jutottunk, amibe egy konkrét feladat esetén csak be kell helyettesítenünk az adott függvényt és az intervallum határait, majd végre kell hajtanunk az integrálást.
A fenti eljárás segítségével sok más dologra lehet olyan képletet levezetni, amiben integrál szerepel. Ilyenek például a görbe ívhossza, forgástest palástjának felszíne, kiterjedt test tömegközéppontja és tehetetlenségi nyomatéka.

Kidolgozott feladatok:

15. feladat: Mekkora az $f(x) = 4x - x^2 + 1$ és $g(x) = \frac{1}{x}$ függvények grafikonjai közötti terület az $[1,4]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a két függvényről a megadott intervallumon. Ha kiszámoljuk a két függvény értékét az intervallum végpontjaiban, akkor a görbék jelleg alapján könnyű elkészíteni az ábrát.

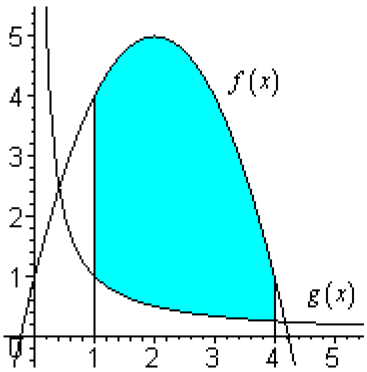
$$f(1) = 4\cdot 1 - 1^2 + 1 = 4$$

$$f(4) = 4\cdot 4 - 4^2 + 1 = 1$$

$$g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(4) = \frac{1}{4}$$

Az $f(x)$ grafikonja egy konkáv parabola, $g(x)$ grafikonja pedig hiperbola. Illesszünk ilyen görbéket a meghatározott pontokra.



Amint látható, a megadott intervallumon belül nem metszi egymást a két függvény. Így egyszerűen vennünk kell a két függvény különbségét, s azt kell integrálnunk a megadott intervallumon. Mivel tudjuk, hogy az adott intervallumban $f(x) > g(x)$, így ha az $f(x) - g(x)$ különbséget vesszük, akkor nincs szükség abszolút értékre.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1\right) - \frac{1}{x}\,dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1\right) - \frac{1}{x}\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x\right]_1^4$$

Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$T = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x\right]_1^4 = \left(2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} + 4 - \ln 4\right) - \left(2\cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} + 1 - \ln 1\right) =$$

$$= \left(32 - \frac{64}{3} + 4 - \ln 4\right) - \left(2 - \frac{1}{3} + 1 - 0\right) = 12 - \ln 4 \approx 10.61$$

A kérdéses terület tehát közelítőleg 10.61 egység.

16. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = e^x$ és $g(x) = x^2 - 2x + 1$ függvények grafikonjai közti területet a $[-1,1]$ intervallumon.

Megoldás: Készítsünk most is ábrát a két függvényről. Célszerű most is meghatározni a függvények értékét a megadott intervallum végpontjaiban.

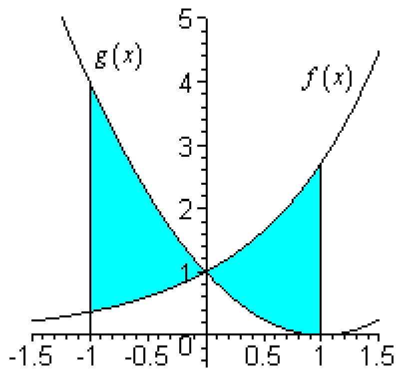
$$f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.37$$

$$f(1) = e^1 = e \approx 2.72$$

$$g(-1) = (-1)^2 - 2\cdot(-1) + 1 = 4$$

$$g(1) = 1^2 - 2\cdot 1 + 1 = 0$$

Az $f(x)$ exponenciális függvény, $g(x)$ pedig másodfokú tehát parabola. A görbék jellege alapján így már könnyű ábrázolni a függvényeket.



Az ábráról úgy látszik, a két grafikon $x=0$ -nál metszi egymást. Ezt a függvényekbe helyettesítéssel könnyen ellenőrizhetjük.

$f(0)=e^0=1$

$g(0)=0^2-0\cdot 1+1=1$

Mindkét függvény 1-et vesz fel, tehát az $x=0$ helyen valóban metszik egymást. Más metszéspont nincs.

A kérdezett területet a metszéspont miatt most két részletben integrálva tudjuk meghatározni. Az első részen -1 és 0 között $g(x)>f(x)$, így itt a $g(x)-f(x)$ függvényt integráljuk, a második részen 0 és 1 között $f(x)>g(x)$, ezért itt az $f(x)-g(x)$ függvényt integráljuk, majd a két integrált összeadjuk. Így nem szükséges az abszolút értékét venni egyik integrálnak sem.

$$T=\int_{-1}^{0}\left(x^2-2x+1\right)-e^x\,dx+\int_{0}^{1}e^x-\left(x^2-2x+1\right)dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényeket.

$$T=\left[\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)-e^x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\right]_{0}^{1}$$

Helyettesítsük a Newton-Leibniz-formulának megfelelően az integrálási határokat, és hajtsuk végre a műveleteket.

$$T=\left(\frac{0^3}{3}-0^2+0-e^0\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2+(-1)-e^{-1}\right)+\left(e^1-\frac{1^3}{3}+1^2-1\right)-\left(e^0-\frac{0^3}{3}+0^2-0\right)=$$

$$=(-1)-\left(-\frac{1}{3}-2-\frac{1}{e}\right)+\left(e-\frac{1}{3}\right)-(1)=e+\frac{1}{e}\approx 3.09$$

A kérdéses terület tehát közelítőleg 3.09 egység.

17. feladat: Mekkora területű síkrészt zárnak közre az $f(x)=x^2-1$ és $g(x)=1-x$ függvények grafikonjai?

Megoldás: Mivel két görbe által közrezárt síkrész területe a kérdés, ezért meg kell határoznunk a metszéspontjaikat. Oldjuk meg tehát az $f(x)=g(x)$ egyenletet.

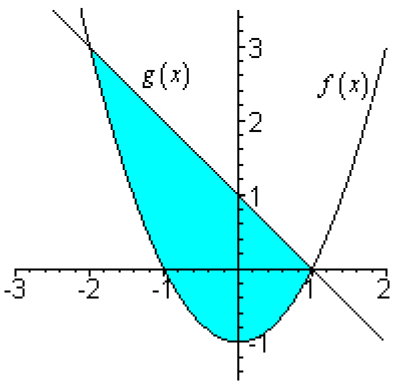
$$x^2-1=1-x \;\Leftrightarrow\; x^2+x-2=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

A kérdezett területet ezután úgy kaphatjuk, hogy a két függvény különbségét integráljuk a két metszéspont között, azaz a $[-2,1]$ intervallumon, s vesszük az integrál abszolút értékét. Ha azonban el tudjuk dönteni, melyik függvény nagyobb az intervallum belsejében, és a nagyobb értékű függvényből vonjuk ki a kisebb értékűt, akkor nincs szükség az abszolút értékre. Ha készítünk egy ábrát, akkor arról ezt le tudjuk majd olvasni. Az intervallum végpontjaiban a két függvény most ugyanazon értékeket veszi fel. Mivel $g(x)$ az egyszerűbb, így ebbe célszerű helyettesíteni.

$$f(-2) = g(-2) = 1-(-2) = 3$$

$$f(1) = g(1) = 1-1 = 0$$

Az $f(x)$ másodfokú függvény, grafikonja konvex parabola, $g(x)$ elsőfokú, grafikonja egyenes. Ezek után már könnyű egy jó ábrát készíteni.



A $[-2,1]$ intervallum belsejében láthatóan $g(x) > f(x)$, ezért a $g(x) - f(x)$ függvényt integráljuk, s így nem lesz szükség abszolút értékre.

$$T = \int_{-2}^{1} (1-x)-\left(x^2-1\right) dx = \int_{-2}^{1} 2-x-x^2\, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_{-2}^{1} 2-x-x^2\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1}$$

Helyettesítsük a határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$T = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} = \left(2\cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2\cdot(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = 4.5$$

A két grafikon által közrezárt terület tehát 4.5 egység.

18. feladat: Forgassuk meg az x-tengely körül az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény $[0,8]$ intervallumhoz tartozó íve és az x-tengely közötti síkrészt, és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát.

Megoldás: A megadott függvényt és intervallumot helyettesítsük be a forgástest térfogatának képletébe, amit az elméleti összefoglalóban ismertünk meg.

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^8\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$$

Alakítsuk át az integrandust egyetlen hatvánnyá, majd határozzuk meg a primitív függvényt.

$$V=\pi\int_0^8\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx=\pi\int_0^8\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 dx=\pi\int_0^8 x^{\frac{2}{3}}\,dx=\pi\left[\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_0^8=\frac{3}{5}\pi\left[\sqrt[3]{x^5}\right]_0^8$$

Helyettesítsük a felső határt, és vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét. Azután végezzük el a műveleteket.

$$V=\frac{3}{5}\pi\left[\sqrt[3]{x^5}\right]_0^8=\frac{3}{5}\pi\left(\sqrt[3]{8^5}-\sqrt[3]{0^5}\right)=\frac{3}{5}\pi(32-0)=\frac{96}{5}\pi\approx 60.32$$

A keletkező forgástest térfogata tehát közelítőleg 60.32 egység.

19. feladat: Forgassuk meg az x-tengely körül az $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ függvény $[1,5]$ intervallumhoz tartozó íve és az x-tengely közötti síkrészt, és határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát.

Megoldás: Mint az előző feladatban, most is behelyettesítünk a forgástest térfogatának képletébe.

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^5\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x}\right)^2 dx$$

Végezzük el a négyzetre emelést.

$$V=\pi\int_0^5\frac{x+1}{x^2}\,dx$$

Bontsuk fel a törtet két tört összegére, és végezzük el külön-külön az osztást.

$$V=\pi\int_0^5\frac{x+1}{x^2}\,dxV=\pi\int_0^5\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\,dx=\pi\int_0^5\frac{1}{x}+x^{-2}\,dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$V=\pi\int_0^5\frac{1}{x}+x^{-2}\,dx=\pi\left[\ln x+\frac{x^{-1}}{-1}\right]_0^5=\pi\left[\ln x-\frac{1}{x}\right]_0^5$$

Helyettesítsük az integrálási határokat a Newton-Leibniz-formula szerint, és végezzük el a műveleteket.

$$V=\pi\left[\ln x-\frac{1}{x}\right]_0^5=\pi\left(\left(\ln 5-\frac{1}{5}\right)-\left(\ln 1-\frac{1}{1}\right)\right)=\pi\left(\left(\ln 5-\frac{1}{5}\right)-(0-1)\right)=$$

$$=\pi\left(\ln 5+\frac{4}{5}\right)\approx 7.57$$

A forgástest térfogata közelítőleg 7.57 egység.

Ellenőrző kérdések:

13. kérdés: Mekkora az $f(x) = e^x$ és $g(x) = 2x - x^2 + 2$ függvények grafikonjai közti alakzat területe a $[0,1]$ intervallumon?

Válasz1: $\frac{5}{3} - e$
Válasz2: $\frac{5}{3} + e$
Válasz3: $\frac{11}{3} - e$ (helyes)
Válasz4: $\frac{11}{3} + e$

14. kérdés: Mekkora az $f(x) = x^2$ és $g(x) = 2 - x$ függvények grafikonjai közötti síkrész területe a $[0,2]$ intervallumon?

Válasz1: $\frac{8}{3}$
Válasz2: 3 (helyes)
Válasz3: $\frac{19}{6}$
Válasz4: $\frac{10}{3}$

15. kérdés: Mekkora területű síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^2$ és $g(x) = 3x$ függvények grafikonjai?

Válasz1: 3
Válasz2: 3.5
Válasz3: 4
Válasz4: 4.5 (helyes)

16. kérdés: Forgassuk meg az x-tengely körül az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény $[1,4]$ intervallumhoz tartozó íve és az x-tengely közötti síkrészt. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

Válasz1: $\frac{1}{4}\pi$
Válasz2: $\frac{1}{2}\pi$
Válasz3: $\frac{3}{4}\pi$ (helyes)
Válasz4: $\frac{3}{2}\pi$

17. kérdés: Forgassuk meg az x-tengely körül az $f(x)=x\sqrt{x-1}$ függvény $[1,2]$ intervallumhoz tartozó íve és az x-tengely közötti síkrészt. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

Válasz1: $\frac{7}{6}\pi$

Válasz2: $\frac{5}{4}\pi$

Válasz3: $\frac{4}{3}\pi$

Válasz4: $\frac{17}{12}\pi$ (helyes)

További kidolgozott feladatok:

20. feladat: $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx$

Megoldás: Egy csúnya törtet kellene integrálnunk, és a törtek integrálásra nincs általános integrálási szabály. Ezért át kell alakítanunk valahogy az integrandust. Középiskolából ismert a $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ azonosság. Használjuk fel elsőként ezt.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\,dx$$

A számlálóban felismerhetjük, hogy egy a^2-b^2 típusú kifejezés, amiben a szerepét most $\cos x$, b szerepét pedig $\sin x$ tölti be. Mivel $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, a számlálót szorzattá tudjuk alakítani.

$$\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\,dx=\int \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}\,dx$$

Ezek után pedig egyszerűsíthetjük a törtet $\cos x-\sin x$-szel.

$$\int \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}\,dx=\int \cos x+\sin x\,dx$$

Ezzel nincs többé tört, hanem csak két alapintegrál összege szerepel, melyeket tagonként integrálunk.

$$\int \cos x+\sin x\,dx=\int \cos x\,dx+\int \sin x\,dx=\sin x-\cos x+c$$

21. feladat: $\int \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}\,dx$

Megoldás: Mivel a számlálóban egy különbség áll, a törtet felbonthatjuk két tört különbségére.

$$\int \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}\,dx=\int \frac{x^2}{x^2\cdot\sin^2 x}-\frac{\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}\,dx$$

Mindkét tört egyszerűsíthető, az első x^2-tel, a második $\sin^2 x$-szel.

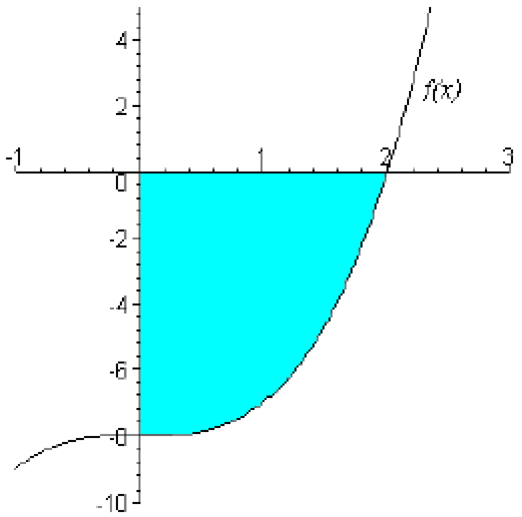
$$\int \frac{x^2}{x^2\cdot\sin^2 x}-\frac{\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}\,dx=\int \frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\,dx$$
A második törtben egy hatvány reciproka áll, amit írjunk inkább negatív kitevős hatványként.
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\,dx=\int \frac{1}{\sin^2 x}-x^{-2}\,dx$$
Így már csak alapintegrálok különbsége szerepel, melyeket külön-külön integrálunk.
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}-x^{-2}\,dx=-\operatorname{ctg} x-\frac{x^{-1}}{-1}+c=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x+c$$

22. feladat: $\int \frac{5x^2+2}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)}dx$

Megoldás: Az integrandus egy elég bonyolult tört, azonban észrevehető, hogy a számláló olyan összegre bontható, melynek egyik tagja a nevező egyik tényezőjének, másik tagja pedig a nevező másik tényezőjének a szám szorosa.
$$\int \frac{5x^2+2}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)}dx=\int \frac{3x^2+2\left(x^2+1\right)}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)}dx$$
Ez azért jó, mert így a törtet két tört összegére bonthatjuk, és a keletkező törteken belül egyszerűsíthetünk.
$$\int \frac{3x^2+2\left(x^2+1\right)}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)}dx=\int \frac{3x^2}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)}+\frac{2\left(x^2+1\right)}{x^2\cdot\left(x^2+1\right)}dx=\int \frac{3}{x^2+1}+\frac{2}{x^2}dx$$
Az összeget természetesen tagonként integráljuk, a konstans szorzók pedig kiemelhetők.
$$\int \frac{3}{x^2+1}+\frac{2}{x^2}dx=\int \frac{3}{x^2+1}dx+\int \frac{2}{x^2}dx=3\int \frac{1}{x^2+1}dx+2\int \frac{1}{x^2}dx$$
Az első tag alapintegrál, a második tagban pedig a reciprok helyett írjunk inkább negatív kitevős hatványt.
$$3\int \frac{1}{x^2+1}dx+2\int \frac{1}{x^2}dx=3\int \frac{1}{x^2+1}dx+2\int x^{-2}\,dx$$
Ezután már csak be kell helyettesítenünk a megfelelő alapintegrálokat.
$$3\int \frac{1}{x^2+1}dx+2\int x^{-2}\,dx=3\operatorname{arctg} x+2\frac{x^{-1}}{-1}+c=3\operatorname{arctg} x-\frac{2}{x}+c$$

23. feladat: Határozzuk meg azon véges síkrész területét, melyet a koordinátarendszer két tengelye és az $f\left(x\right)=x^3-8$ függvény grafikonja határol.

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a függvényről, hogy láthassuk, hogyan is helyezkedik el a kérdéses alakzat a koordinátarendszerben. Az ábrázolás könnyű, hiszen az x^3 grafikonját kell 8-cal lefelé eltolnunk az y-tengely mentén.



Amint látható, a negyedik síknegyedben van olyan síkrész, ami a feladat feltételeinek megfelel. Nyilván szükségünk van arra, hogy meghatározzuk, hol metszi a függvény grafikonja az x-tengelyt. Az ábráról sejthető, hogy $x=2$ a zérushely, s ez a függvénybe helyettesítéssel könnyen ellenőrizhető is. Természetesen az $x^3-8=0$ egyenletet is megoldhatjuk, s ezzel is igazolhatjuk, hogy 2-nél van a metszéspont. Így egyértelmű, hogy az alakzat a $[0,2]$ intervallumon található. Mivel itt a függvény negatív értékeket vesz fel, így a területet a függvény ezen intervallumon vett integráljának -1-szerese adja.

$$T=-\int_0^2 x^3-8\,dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T=-\left[\frac{x^4}{4}-8x\right]_0^2$$

Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba, és hajtsuk végre a műveleteket.

$$T=-\left(\left(\frac{2^4}{4}-8\cdot 2\right)-\left(\frac{0^4}{4}-8\cdot 0\right)\right)=-\left((4-16)-0\right)=12$$

24. feladat: Mekkora területű véges síkrészt zárnak közre az $f(x)=x^3+x$ és $g(x)=5x$ függvények grafikonjai?

Megoldás: Mivel két függvénygrafikonja által közrezárt síkrész terülte a kérdés, így először meg kell határoznunk, hol metszik egymást a grafikonok. Oldjuk meg az $f(x)=g(x)$ egyenletet.

$$x^3+x=5x \;\Leftrightarrow\; x^3-4x=0 \;\Leftrightarrow\; x\left(x^2-4\right)=0$$

Ha az első tényező nulla, akkor az $x=0$ megoldást kapjuk.

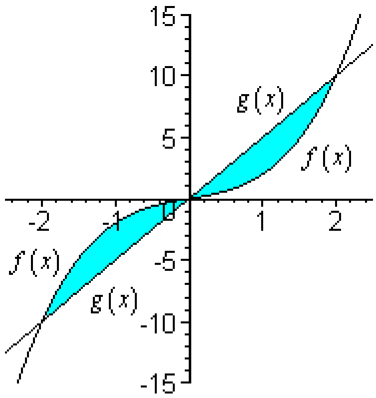
H a második tényező nulla, akkor $x^2=4$, amiből vagy $x=2$ vagy $x=-2$.

A két függvény grafikonja tehát 3 helyen is metsz egymást. Ez azt jelenti, hogy a két grafikon által közrezárt alakzat két részből áll, mert van közrezárt alakzat az első két metszéspont és a második két metszéspont között is. Ezt jól láthatjuk, ha ábrázoljuk a két függvényt. Az ábrázoláshoz célszerű meghatározni a függvények értékét a metszéspontokban. Ezeken a helyeken a két függvény azonos értéket vesz fel. Mivel $g(x)$ az egyszerűbb függvény, így célszerű abba helyettesítve számolni.

$f(-2) = g(-2) = 5\cdot(-2) = -10$

$f(0) = g(0) = 5\cdot 0 = 0$

$f(2) = g(2) = 5\cdot 2 = 10$



A kérdéses területe két integrállal határozhatjuk meg. Mivel a $[-2,0]$ intervallum belsejében $f(x) > g(x)$, ezért ezen az intervallumon integráljuk az $f(x) - g(x)$ függvényt, s mert a $[0,2]$ intervallumon $g(x) > f(x)$, ezért ezen az intervallumon integráljuk az $g(x) - f(x)$ függvényt. A terület a két integrál összege lesz.

$$T = \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x\right) - 5x\,dx + \int_{0}^{2} 5x - \left(x^3 + x\right)dx = \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx + \int_{0}^{2} 4x - x^3\,dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényeket.

$$T = \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx + \int_{0}^{2} 4x - x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$

Helyettesítsük az integrálási határokat a megszokott módon, és végezzük el a műveleteket.

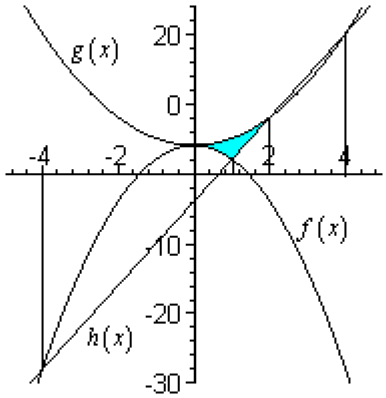
$$T = \left(\left(\frac{0^4}{4} - 2\cdot 0^2\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2\cdot(-2)^2\right)\right) + \left(\left(2\cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - \left(2\cdot 0^2 - \frac{0^4}{4}\right)\right) =$$

$$= \left(0 - (4 - 8)\right) + \left((8 - 4) - 0\right) = 4 + 4 = 8$$

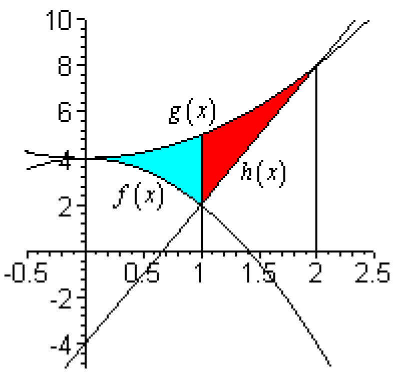
A közrezárt alakzat területe tehát 8 egység.
A feladatot egy integrál kiszámolásával is megoldhatjuk, ha kihasználjuk azt, hogy a közrezárt alakzat két része szimmetrikus az origóra. Ekkor elég az egyik integrált kiszámolnunk, és annak dupláját venni. Szimmetrikus alakzatok esetén így csökkenthetjük a számolás mennyiségét.

25. feladat: Mekkora területű véges síkrészt határolnak az alábbi függvények grafikonjai?
$f(x) = 4 - 2x^2,\ g(x) = x^2 + 4,\ h(x) = 6x - 4$

Megoldás: Most meg kellene keresnünk az összes olyan pontot, ahol két függvény grafikonja metszi egymást. Ehhez három egyenletet is meg kéne oldanunk, hiszen bármely két függvényt egyenlővé kellene tennünk egymással. Készítsünk inkább egy ábrát a három függvény grafikonjáról és olvassuk le az ábráról a metszéspontok helyét. Az ábrázolás során azt használjuk ki, hogy ismerjük a függvények jellegét. Az $f(x)=4-2x^2$ egy konkáv parabola lesz 4 egységgel eltolva az y-tengely mentén. A $g(x)=x^2+4$ konvex parabola szintén 4 egységgel eltolva az y-tengely mentén. A $h(x)=6x-4$ pedig egyenes, ami -4-ben metszi az y-tengelyt, s a meredeksége 6.



Az ábráról leolvasható, hogy öt közös pont van, s ezek az $x=-4,\ x=0,\ x=1,\ x=2,\ x=4$ helyeken vannak.
Az is látható azonban hogy a három függvény grafikonja által határolt alakzat szempontjából csak az $x=0,\ x=1,\ x=2$ helyeken lévő metszéspontok érdekesek, mert a $[-4,0]$ és intervallumokon csak két függvény grafikonja által határolt alakzat alakul ki.
Nagyítsuk fel ezután az ábra lényeges részét.



Az alakzatot az $x=1$ helyen két részre kell bontanunk, mert más függvény grafikonja határolja alulról a $[0,1]$ és más az $[1,2]$ intervallumon. Ebből következik, hogy a területet két integrál összegeként kaphatjuk meg. A $[0,1]$ intervallumon a $g(x)-f(x)$ függvényt kell integrálnunk, míg az $[1,2]$ intervallumon $g(x)-h(x)$ függvényt.

$$T=\int_0^1 \left(x^2+4\right)-\left(4-2x^2\right)dx+\int_1^2 \left(x^2+4\right)-\left(6x-4\right)dx=\int_0^1 3x^2\,dx+\int_1^2 x^2-6x+8\,dx$$

Határozzuk meg primitív függvényeket.

$$T=\int_0^1 3x^2\,dx+\int_1^2 x^2-6x+8\,dx=\left[x^3\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_1^2$$

Helyettesítsük az integrálási határokat, és végezzük el a műveleteket.

$$T=\left[x^3\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+8x\right]_1^2=\left(1^3-0^3\right)+\left(\left(\frac{2^3}{3}-3\cdot 2^2+8\cdot 2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-3\cdot 1^2+8\cdot 1\right)\right)=$$

$$=1+\left(\frac{8}{3}-12+16\right)-\left(\frac{1}{3}-3+8\right)=\frac{7}{3}$$

A három függvény grafikonja által határolt alakzat területe tehát $\frac{7}{3}$ egység.

26. feladat: Forgassuk meg az x -tengely körül az $f(x)=\operatorname{ctg} x$ függvény $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumhoz tartozó íve és az x -tengely közötti síkrészt. Határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát.

Megoldás: Helyettesítsünk be a forgástestek térfogatának képletébe.

$$V=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^2 x\,dx$$

Az integrandus egy összetett függvény, s az összetett függvényekre nincs általános integrálási szabály. Mivel várhatóan nem lesz egyszerű primitív függvényt találni, ezért végezzük el külön a határozatlan integrálást. Próbáljuk átalakítani úgy az integrandust, hogy integrálható függvényt, vagy azok összegét kapjuk. Induljunk el a legegyszerűbb szóba jöhető összefüggésből, mely szerint $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, és írjuk ezt be az integrandusba. Mivel így egy tört négyzetét kapjuk, ezután úgy alakíthatunk tovább, hogy külön emeljük négyzetre a számlálót és a nevezőt.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx=\int\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$$

Még nem látszik pontosan miért jó ez az átalakítás, de középiskolából több olyan összefüggés is ismert, melyben $\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ szerepel, így ebben az irányban tovább alakítható a függvény. Ismét a legegyszerűbb összefüggésből menjünk tovább, ami a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ azonosság. Rendezzük ezt át $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ alakra, és helyettesítsünk be az integrandus számlálójába.

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$$

Bontsuk fel ezután a törtet két tört összegére azáltal, hogy külön osztjuk el a számláló tagjait, majd egyszerűsítsünk, amelyik törtben erre lehetőség van.

$$\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}-1dx$$

Ezzel sikerült elérnünk, hogy az integrandus két alapintegrál különbsége lett. A tagokat külön-külön integrálhatjuk, s az alapintegrálokat egyszerűen be kell helyettesítenünk.

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}-1dx=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int 1dx=-\operatorname{ctg} x-x+c$$

A primitív függvényt sikerült meghatározni, de talán az olvasóban felvetődik az a kérdés, miért nem a nevezőben álló $\sin^2 x$ helyére helyettesítettünk $1-\cos^2 x$ -et, hiszen ezt is megtehettük volna. Természetesen ez az átalakítás sem lett volna hibás, de ekkor nem tudtuk volna tovább alakítani az integrandust. A törtek esetében többször hajthatunk végre olyan átalakítást, hogy külön osztjuk el a számláló tagjait. Ehhez arra van szükség, hogy a

számlálóban álljon összeg vagy különbség, és ne a nevezőben. Az is fontos volt a további alakítás során, hogy a számláló egyik tagja megegyezett a nevezővel, s így tudtunk egyszerűsíteni. Az egyszerűsítés után kapott 1 pedig alapintegrál, hiszen $\int 1dx = x + c$.
De térjünk vissza a forgástest térfogatához.

$$V = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}^2 x dx = \left[-\mathrm{ctg}\, x - x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0.68$$

A keletkező forgástest térfogata tehát 0.68 egység.

Ellenőrző kérdések:

18. kérdés: $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$

Válasz1: $\sin x + \cos x + c$ (helyes)
Válasz2: $\sin x - \cos x + c$
Válasz3: $\cos x - \sin x + c$
Válasz4: $-\sin x - \cos x + c$

19. kérdés: $\int \frac{x + \cos^2 x}{x^2 \cdot \cos^2 x} dx$

Válasz1: $\frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{tg}\, x + c$
Válasz2: $\frac{x^2}{2} + \mathrm{tg}\, x + c$
Válasz3: $\ln x \cdot \mathrm{tg}\, x + c$
Válasz4: $\ln x + \mathrm{tg}\, x + c$ (helyes)

20. kérdés: $\int \frac{1 - x^2}{x^2 \cdot \left(x^2 + 1\right)} dx$

Válasz1: $\frac{1}{x} - \mathrm{arctg}\, x + c$
Válasz2: $-\frac{1}{x} - \mathrm{arctg}\, x + c$
Válasz3: $\frac{1}{x} - 2\mathrm{arctg}\, x + c$
Válasz4: $-\frac{1}{x} - 2\mathrm{arctg}\, x + c$ (helyes)

21. kérdés: Mekkora annak a véges síkrésznek a területe, melyet a koordinátarendszer két tengelye és az $f(x) = x^3 + 1$ függvény grafikonja határol?

Válasz1: $\frac{2}{3}$

Válasz2: $\frac{3}{4}$ (helyes)

Válasz3: $\frac{4}{5}$

Válasz4: $\frac{5}{6}$

22. kérdés: Mekkora területű véges síkrészt zárnak közre az $f(x) = x^3 - 4x$ és $g(x) = -3x$ függvények grafikonjai?

Válasz1: $\frac{1}{4}$

Válasz2: $\frac{1}{2}$ (helyes)

Válasz3: $\frac{2}{3}$

Válasz4: $\frac{3}{4}$

23. kérdés: Tekintsük az $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{4} + 3$, $h(x) = -2x$ függvényeket. Mekkora a három függvény grafikonja által határolt véges síkrész területe?

Válasz1: $\frac{14}{3}$

Válasz2: $\frac{16}{3}$

Válasz3: $\frac{20}{3}$ (helyes)

Válasz4: $\frac{22}{3}$

24. kérdés: Forgassuk meg az x-tengely körül az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumhoz tartozó íve és az x-tengely közötti síkrészt. Mekkora a keletkező forgástest térfogata?

Válasz1: $\frac{4\pi - \pi^2}{4}$ (helyes)

Válasz2: $\dfrac{\pi^2 - 2\pi}{4}$

Válasz3: $\dfrac{\pi^2 + 2\pi}{4}$

Válasz4: $\dfrac{4\pi + \pi^2}{4}$