Komplex számok algebrai alakja

Lukács Antal

2016. február 19.

1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Legyen $z_1 = 2 + 3i$ és $z_2 = 5 - 4i$! Határozzuk meg az alábbiakat!

   (a) $z_1 + z_2$

   (b) $3z_2 - z_1$

   (c) $z_1 \cdot z_2$

   (d) $\mathrm{Re}(i \cdot z_1)$

   (e) $\mathrm{Im}(z_2 + 2i^{19})$

   Megoldás:

   (a) Két komplex számot kell összeadnunk. Ezt úgy hajtjuk végre, hogy összeadjuk a valós részeket, így magkapjuk az összeg valós részét, és összeadjuk a képzetes részeket, s ezzel megkapjuk az összeg képzetes részét.
   $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 4i) = (2 + 5) + (3 - 4)i = 7 - i$

   (b) A feladat két részből áll. Elsőként egy komplex számot meg kell szoroznunk egy valós számmal. Ezt úgy hajtjuk végre, hogy a komplex szám valós és képzetes részét is megszorozzuk a valós számmal.
   $3z_2 = 3(5 - 4i) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot (-4)i = 15 - 12i$
   Ezután két komplex szám kivonása a feladat, amit az összeadáshoz hasonlóan úgy végzünk el, hogy valós részből valós részt vonunk ki, képzetes részből pedig képzetes részt.
   $3z_2 - z_1 = (15 - 12i) - (2 + 3i) = (15 - 2) + (-12 - 3)i = 13 - 15i$

   (c) Most szoroznunk kell két komplex számot. Ezt úgy végezhetjük el a legegyszerűbben, hogy a két komplex számot, mint két darab kéttagú algebrai kifejézést szorozzuk össze, azaz minden tagot minden taggal szorzunk.
   $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (5 - 4i) =$

$= (2\cdot 5)+(2\cdot(-4i))+((3i)\cdot 5)+((3i)\cdot(-4i)) = 10-8i+15i-12i^2$

Ezután használjuk fel, hogy tudjuk, $i^2 = -1$, majd vonjuk össze az egynemű tagokat, azaz külön a valós részeket és a képzetes részeket.

$10-8i+15i-12i^2 = 10-8i+15i-12\cdot(-1) = 10-8i+15i+12 =$
$= (10+12)+((-8)+15)i = 22+7i$

(d) Két részből áll a feladat. Először egy szorzást kell elvégeznünk, majd a szorzatnak venni a valós részét. A szorzást most egyszerűbben hajthatjuk végre, mint az előbb, hiszen az első tényező csak a képzetes egység, így nem kéttagú kifejezés.

$i \cdot z_1 = i\cdot(2+3i) = i\cdot 2 + i\cdot(3i) = 2i+3i^2$

Most is használjuk fel, hogy $i^2 = -1$.

$2i+3i^2 = 2i+3\cdot(-1) = 2i-3 = -3+2i$

Ezután vegyük az eredmény valós részét.

$\mathrm{Re}(i\cdot z_1) = \mathrm{Re}(-3+2i) = -3$

(e) Ez a feladat már három részből áll. Elsőként meg kell határoznunk i^{19}-t. Utána ennek kétszeresét hozzá kell adnunk z_2-höz. Végül az eredménynek vennünk kell a képzetes részét.

Az i hatványairól tudjuk, hogy periodikusan váltakoznak.

$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \cdots$

Ezért, ha i valamilyen magasabb kitevős hatványát kell meghatározni, akkor elég azt megviszgálni, mi a kitevőnek a maradéka 4-gyel osztva, s elég az i-t erre a maradékra hatványozni. Ez jelen esetben a következőt jelenti:

$i^{19} = i^{(4\cdot 4+3)} = \left(i^4\right)^4\cdot i^3 = 1^4\cdot i^3 = i^3 = -i$

Adjuk ennek kétszeresét z_2-höz.

$z_2 + 2i^{19} = (5-4i)+2\cdot(-i) = 5-4i-2i = 5-6i$

Végül vegyük ennek a képzetes részét!

$\mathrm{Im}(z_2+2i^{19}) = \mathrm{Im}(5-6i) = -6$

Nagyon figyeljünk oda arra, hogy a képzetes rész csak az i együtthatója. Nem tartalmazza az i-t.

2. **Feladat:** Legyen $z_1 = 3-5i$ és $z_2 = 4+2i$! Határozzuk meg az alábbiakat!

(a) $\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(b) $\overline{(z_1^2)}$

(c) $\dfrac{z_1}{z_2}$

(d) $\dfrac{i}{z_1}$

Megoldás:

(a) A feladatban két komplex szám konjugáltját kell meghatározni, majd a konjugáltakat összeadni. Kezdjük a konjugálásokkal. Egy komplex szám konjugáltját úgy kapjuk, hogy a komplex szám képzetes részének előjelét megváltoztatjuk. Jelen esetben ez az alábbiakat jelenti:

$\overline{z_1} = \overline{(3-5i)} = 3+5i$

$\overline{z_2} = \overline{(4+2i)} = 4-2i$

Ezután már csak az összeadás van hátra.

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (3+5i) + (4-2i) = (3+4) + (5-2)i = 7+3i$

Itt meg kell jegyezni, hogy ugyanezt az eredményt kaptuk volna, ha a műveleteket fordított sorrendben hajtjuk végre, azaz először összeadjuk a két komplex számot, majd az eredménynek vesszük a konjugáltját. A műveletek ilyen sorrendjét képletben $\overline{z_1 + z_2}$ formában írhatjuk. Ellenőrizzük le, hogy így valóban ugyanazt kapjuk, mint az előbb. Most elsőként az összeadást végezzük el.

$z_1 + z_2 = (3-5i) + (4+2i) = (3+4) + (-5+2)i = 7-3i$

Ezután vegyük ennek konjugáltját, azaz változtassuk meg a képzetes rész előjelét.

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{7-3i} = 7+3i$

Általánosságban is igaz, hogy $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$, s hasonlóan igaz a $\overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{z_1 - z_2}$ összefüggés is.

(b) Most elsőként egy komplex számot négyzetre kell emelnünk, majd utána az eredmény konjugáltját kell vennünk. A négyzetre emelés lényegében egy szorzás, hiszen ekkor a komplex számot önmagával szorozzuk.

$z_1^2 = (3-5i)^2 = (3-5i)\cdot(3-5i) =$

$3\cdot 3 + 3\cdot(-5i) + (-5i)\cdot 3 + (-5i)\cdot(-5i) = 9 - 15i - 15i + 25i^2 =$

$= 9 - 15i - 15i + 25\cdot(-1) = 9 - 15i - 15i - 25 = -16 - 30i$

Persze hivatkozhattunk volna a középiskolából ismert $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ összefüggésre is, azaz a kéttagú kifejezések négyzetre emelési módjára. Ekkor a következő a számolás.

$z_1^2 = (3-5i)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot(-5i) + (-5i)^2$

A $(-5i)^2$ számolásakor egy szorzatot emelünk négyzetre, amit tényezőnként végezhetünk el.

$3^2 + 2\cdot 3\cdot(-5i) + (-5i)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot(-5i) + (-5)^2\cdot i^2 =$

$9 - 30i + 25\cdot i^2 = 9 - 30i + 25\cdot(-1) = 9 - 30i - 25 =$

$= -16 - 30i$

Ezután már csak a konjugálás van hátra.

$\overline{(z_1^2)} = \overline{-16-30i} = -16 + 30i$

Az előbb megállapítottuk, hogy az összeadás és a konjugálás sorrendje felcserélhető. Ezen feladat után az a kérdés vetődik fel, hogy vajon a négyzetre emelés, és a konjugálás sorrendje is felcserélhető-e, azaz ugyanezt az eredményt kapjuk-e, ha a komplex számnak először konjugáltját vesszük, s azt emeljük négyzetre. Végezzük el most ilyen sorrendben a műveleteket. Ez képletben a következő módon írható: $(\overline{z_1})^2$

$\overline{z_1} = \overline{(3-5i)} = 3+5i$

Ezután jöhet a négyzetre emelés.

$(\overline{z_1})^2 = (3+5i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (5i) + (5i)^2 =$

$= 9 + 30i + 25i^2 = 9 + 30i + 25 \cdot (-1) = 9 + 30i - 25 = -16 + 30i$

Amint látható, a műveletek ilyen sorrendje esetén is ugyanazt kaptuk. Általánosan is igaz, hogy a négyzetre emelés és a konjugálás sorrendje felcserélhető, azaz $\overline{(z^2)} = (\overline{z})^2$. Még általánosabban hasonlót mondhatunk ki a szorzás és a konjugálás sorrendjét illetően, mely képletben $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$ alakban írható.

(c) Most két komplex szám osztása a feladat. Ezt úgy hajtjuk végre, hogy a nevező konjugáltjával bővítünk.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-5i}{4+2i} = \frac{3-5i}{4+2i} \cdot \frac{4-2i}{4-2i} = \frac{(3-5i)\cdot(4-2i)}{(4+2i)\cdot(4-2i)}$

Két szorzást kell elvégeznünk, egyet a számlálóban, egyet pedig a nevezőben. Nézzük először a számlálót, immár kicsit kevésbe részletesen írva, mint eddig.

$(3-5i)\cdot(4-2i) = 12-6i-20i+10i^2 = 12-6i-20i-10 = 2-26i$

Ezután foglalkozzunk a nevezővel.

$(4+2i)\cdot(4-2i) = 16-8i+8i-4i^2 = 16-8i+8i+4 = 20$

Ezt egyszerűbben is megkaphattuk volna. Mivel komplex szám a saját konjugáltjával van szorozva, ezért a két tényező csak az egyik tag előjelében tér el. Középiskolából pedig ismerünk egy összefüggést az ilyen szorzatokra. Eszerint $(x+y)\cdot(x-y) = x^2-y^2$. Ha ezt használjuk a nevezőben a szorzat számolásához, akkor a következőt írhatjuk:

$(4+2i)\cdot(4-2i) = 4^2-(2i)^2 = 16-4i^2 = 16-4\cdot(-1) = 16+4 = 20$

Térjünk vissza az osztáshoz.

$\frac{(3-5i)\cdot(4-2i)}{(4+2i)\cdot(4-2i)} = \frac{2-26i}{20}$

Mivel a nevezőben egy valós szám áll, ha külön osztjuk a számlálóban levő tagokat, akkor egy algebrai alakú komplex számot kapunk.

$\frac{2-26i}{20} = \frac{2}{20} - \frac{26i}{20} = \frac{1}{10} - \frac{13}{10}i = 0.1 - 1.3i$

Mielőtt a következő feladatra lépnénk, ejtsünk pár szót az osztásnál a nevezőben álló szorzatról. Ilyenkor egy komplex számot mindig a saját konjugáltjával szorzunk, azaz a nevezőben $(a+bi)\cdot(a-bi)$ típusú szorzat áll. Felhasználva a korábban említett $(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$ középiskolai azonosságot, végezzük el ezt a szorzást.

$(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-(b)^2\cdot i^2=a^2-(b)^2\cdot(-1)=a^2+b^2$

Azaz ilyen esetben a komplex szám valós és képzetes részének négyzetösszegét kapjuk. Ha ezt megjegyezzük, akkor az osztást gyorsabban tudjuk elvégezni.

(d) Amint az előbb is, egy osztást kell elvégeznünk. Bővítsünk a nevező konjugáltjával.

$\frac{i}{z_1}=\frac{i}{3-5i}=\frac{i}{3-5i}\cdot\frac{3+5i}{3+5i}=\frac{i\cdot(3+5i)}{(3-5i)\cdot(3+5i)}$

A számlálóban bontsuk fel a zárójelet, a nevezőben pedig használjuk fel azt, amit az előbb megállapítottunk. Eszerint, ha a komplex számot saját konjugáltjával szorozzuk, akkor a valós és képzetes rész négyzetének összegét kapjuk.

$\frac{i\cdot(3+5i)}{(3-5i)\cdot(3+5i)}=\frac{3i+5i^2}{3^2+(-5)^2}=\frac{3i+5\cdot(-1)}{9+25}=\frac{-5+3i}{34}=$
$=-\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i$

3. **Feladat:** Határozzuk meg a $z=\frac{7-17i}{3+2i}-(3-i^9)$ komplex szám algebrai alakját!

Megoldás: A feladat több részletből áll. El kell végezni egy osztást, meg kell határozni i^9-t, s végül egy kivonást kell végrehajtani. Kezdjük az osztással.

$\frac{7-17i}{3+2i}=\frac{(7-17i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)}=\frac{21-14i-51i+34i^2}{3^2+2^2}=$
$=\frac{21-14i-51i+34\cdot(-1)}{9+4}=\frac{21-14i-51i-34}{13}=\frac{-13-65i}{13}=$
$=-\frac{13}{13}-\frac{65}{13}i=-1-5i$

Ezután határozzuk meg i^9-t!

$i^9=i^{(4\cdot2+1)}=\left(i^4\right)^2\cdot i^2=1^2\cdot i^1=i^1=i$

A részeredményeket felhasználva határozzuk meg z algebrai alakját.

$z=\frac{7-17i}{3+2i}-(3-i^9)=(-1-5i)-(3-i)=(-1-3)+(-5+1)i=-4-4i$

4. **Feladat:** Határozzuk meg a $z=(3+2i)(5+4i-\overline{7-3i})$ komplex szám képzetes részét!

Megoldás: Meg kell határoznunk z algebrai alakját, melyből a képzetes rész már könnyen kiolvasható. Ehhez végezzük el a műveleteket. Elsőként hajtsuk végre a konjugálást. Ne feledkezzünk el arról, hogy minden úgymond 'hosszú' műveleti jel egyben zárójel is, és ha elvégezzük a műveletet, utána ki kell tenni a zárójelet. Most ez azt jelenti, hogy a $7-3i$ konjugáltját zárójelbe kell tenni.

$z = (3+2i)(5+4i-\overline{7-3i}) = (3+2i)(5+4i-(7+3i))$

Ezután végezzük el a kivonást.

$z = (3+2i)(5+4i-(7+3i)) = (3+2i)(5+4i-7-3i) = (3+2i)(-2+i)$

Következik egy szorzás.

$z = (3+2i)(-2+i) = -6+3i-4i+2i^2 = -6+3i-4i-2 = -8-i$

Megvan tehát z algebrai alakja. A képzetes rész ebben az i együtthatója, azaz jelen esetben a -1.

5. **Feladat:** Oldjuk meg az $x^2+4x+5=0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

   Megoldás: Egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk, így csak be kell helyettesítenünk a megoldóképletbe.

   $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

   Amint látható, negatív szám áll négyzetgyök alatt. Ezt a műveletet a valós számok halmazán nem tudjuk elvégezni, tehát az egyenletnek valós gyöke nincs. Elvégezhető azonban a komplex számok halmazán. Olyan komplex számot, vagy számokat kell keresnünk, melynek négyzete -4-gyel egyenlő. Írjuk ehhez a -4-et $4\cdot(-1)$ alakban. Szorzatból tényezőnként vonhatunk gyököt, tehát külön kereshetünk olyan számot, melynek négyzete 4, s melynek négyzete -1. Tudjuk, hogy $4 = 2^2$ és $-1 = i^2$. Ezek alapján $-4 = 2^2 \cdot i^2 = (2i)^2$. Találtunk tehát olyan komplex számot, aminek a négyzete -4 , így a komplex számok halmazán elvégezhető ez a gyökvonás. A komplex számok halmazán azonban egy z szám négyzetgyökének nevezünk minden olyan komplex számot, amelynek négyzete z-vel egyenlő. Nyilvánvaló, hogy nem csak a $2i$, hanem a $-2i$ négyzete is -4-gyel egyenlő. Belátható, hogy a 0 kivételével minden z komplex szám esetén két olyan komplex szám létezik, melynek négyzete z-vel egyenlő, tehát a 0-n kívül minden komplex számnak két négyzetgyöke van. Ez azt jelenti, hogy $\sqrt{-4} = \pm 2i$, hiszen ez az a két komplex szám, melynek négyzete -4.

   Mivel a komplex számok esetében két négyzetgyök van, ezért komplexben felesleges $\pm$-t írni a gyökjel elé a megoldóképletben, mert a négyzetgyökvonásnak két eredménye lesz majd, s abban jelenik meg a $\pm$.

Írjuk be a gyökvonás eredményét a megoldóképletbe.

$$x_{1,2} = \frac{-4 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} \dfrac{-4+2i}{2} = -2+i \\ \dfrac{-4-2i}{2} = -2-i \end{cases}$$

Amint látható, az egyenletnek két komplex szám a megoldása.

Mielőtt áttérnénk a következő feladatra, két dolgora szeretném felhívni a figyelmet.

Egyrészt arra, hogy a komplex számok halmazán negatív valós számokból is lehet négyzetgyököt vonni. Ezt könnyen végrehajthatjuk úgy, hogy a negatív számot egy pozitív valós szám és a -1 szorzatára bontjuk, majd ezután tényezőnként vonunk gyököt. Tudjuk, hogy $\sqrt{-1} = \pm i$.

Másrészt pedig arra, hogy ha komplexben vonunk gyököt, akkor a pozitív valós számoknak is két négyzetgyöke van, mert komplexben a z szám négyzetgyökének nevezünk minden olyan számot, aminek négyzete z. A komplex számok halmazán például $\sqrt{9} = \pm 3$, és nem csak a 3. Persze a valós számok halmazán $\sqrt{9} = 3$, ott a definíció szerint csak egy négyzetgyök van.

6. **Feladat:** Oldjuk meg az $x^2+2ix+15 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

   Megoldás: Most is másodfokú egyenletet kell megoldanunk, így csak be kell helyettesítenünk a megoldóképletbe. Változás az előző feladathoz képest, hogy most nem csak valós számok szerepelnek együtthatóként az egyenletben. Természetesen ilyenkor a komplex számokat kell behelyettesíteni a képletbe.

   $$x_{1,2} = \frac{-2i + \sqrt{(2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{-2i + \sqrt{-4-60}}{2} = \frac{-2i + \sqrt{-64}}{2}$$

   A gyökvonát hajtsuk végre külön. Mivel $-64 = 64 \cdot (-1) = 64 \cdot i^2$, ezért $\sqrt{-64} = \pm 8i$

   Az eredménnyel térjünk vissza a megoldóképlethez.

   $$x_{1,2} = \frac{-2i + \sqrt{-64}}{2} = \frac{-2i \pm 8i}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2i+8i}{2} = 3i \\ \dfrac{-2i-8i}{2} = -5i \end{cases}$$

   Most is két komplex megoldást kaptunk. Ezek a megoldások azért különlegesek, mert valós részük nulla. Az ilyen számokat nevezzük tiszta képzetes számoknak.

7. **Feladat:** Oldjuk meg a $3z + \overline{z} = 16 - 4i$ egyenletet.

   Megoldás: Az egyenletben szerepel ismeretlenként egy komplex szám és annak konjugáltja is. Ilyen esetben célszerű az ismeretlen komplex számot általánosan algebrai alakban felírni, mert abból könnyen előállítható a konjugált is. Egy komplex szám algebrai alakja általánosan a következő: $z = a + bi$, ahol a és b valós számok. Azaz egy komplex ismeretlen két valós ismeretlent jelent. Ebből feírjuk a konjugáltat: $\overline{z} = a - bi$. Helyettesítsük be az algebrai alakokat az egyenletben z és $\overline{z}$ helyére.

$3(a + bi) + (a - bi) = 16 - 4i$

Az egyenlet bal oldalán végezzük el a műveleteket, azaz bontsuk fel a zárójeleket, és vonjuk össze a valós illetve képzetes részeket.

$3a + 3bi + a - bi = 16 - 4i$

$4a + 2bi = 16 - 4i$

Két komplex szám csak úgy lehet egyenlő, ha külön a valós részeik is megegyeznek, és külön a képzetes részeik is egyenlők. Így a komplex egyenletet felbonthatjuk egy két egyenletből álló egyenletrendszerre.

A valós részek egyenlőségéből a $4a = 16$ egyenletet kapjuk, amiből $a = 4$ következik.

A képzetes részek egyenlősége a $2b = -4$ egyenletet jelenti, melyből $b = -2$ következik.

Mivel meghatároztuk az ismeretlen komplex szám valós és képzetes részét is, így felírhatjuk az egyenlet megoldását.

$z = a + bi = 4 - 2i$

2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a $z = \dfrac{1 - i^2 + i^4 - i^6 + \cdots - i^{18}}{1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^9}$ komplex szám algebrai alakját!

   Megoldás: Először a számlálóban és a nevezőben álló kifejezések algebrai alakját kell meghatározni, majd utána elvégezni az osztást.

   Kezdjük a számlálóval. Az i-nek csak páros kitevőjű hatványai szerepelnek, melyek vagy 1-gyel, vagy -1-gyel egyenlőek. Ha a kitevő osztható 4-gyel, akkor a hatvány 1, ha nem osztható 4-gyel, akkor a hatvány -1. Írjuk be ezeket az i hatványai helyére.

   $1 - i^2 + i^4 - i^6 + \cdots - i^{18} = 1 - (-1) + 1 - (-1) + \cdots - (-1) =$

   $= 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$

   A számlálóban tehát csupa egyest kell összadnunk. Már csak az a kérdés, hogy hány darabot. Mivel a legnagyobb kitevő 18, a legkisebb pedig 0, és kettesével változik, ezért 10 darab tag van, azaz a számlálóban $10 \cdot 1 = 10$ áll.

Ezután foglalkozzunk a nevezővel. Itt is írjuk be i különböző hatványainak az értékét.

$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^9 = 1 + i + (-1) + (-i) + \cdots + i$

Tudjuk, hogy az i hatványai periodikusan ismétlődnek, s csupán négy különböző hatvány van. Az összeg elején pontosan 4 hatványt írtunk ki, ami egy periódust alkot. Kapcsoljunk össze zárójellel egy-egy ilyen periódust.

$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^9 = 1 + i + (-1) + (-i) + \cdots + i = = [1 + i + (-1) + (-i)] + [\cdots] + 1 + i$

Látható, hogy egy perióduson belül az összeg 0 lesz, hiszen szerepel benne az 1 és a -1, valamint az i és a $-i$. Így csak az a kérdés, hogy hány tag marad még a teljes periódusokon kívül. Mivel itt is 10 tag van, így az utolsó kettő marad meg, azaz a nevező $1 + i$-vel egyenlő.

Ezután térjünk vissza a részeredményekkel a törthöz.

$z = \dfrac{1 - i^2 + i^4 - i^6 + \cdots - i^{18}}{1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^9} = \dfrac{10}{1 + i}$

Már csak egy osztást kell elvégeznünk.

$z = \dfrac{10}{1 + i} = \dfrac{10 \cdot (1 - i)}{(1 + i) \cdot (1 - i)} = \dfrac{10 - 10i}{1^2 + 1^2} = \dfrac{10 - 10i}{2} = 5 - 5i$

2. **Feladat:** Oldjuk meg a $\dfrac{(2 + i) \cdot z}{2 + 6i} = \overline{1 - 2i^6 - i^7}$ egyenletet!

   Megoldás: Végezzük el az egyenlet jobb oldalán a műveleteket, majd fejezzük ki az ismeretlent. Első lépésként helyettesítsük be i hatványainak értékét. Mivel $i^6 = -1$ és $i^7 = -i$, így az egyenlet a következő alakot ölti.

   $\dfrac{(2 + i) \cdot z}{2 + 6i} = \overline{1 - 2 \cdot (-1) - (-i)}$

   Ezután vonjunk össze a jobb oldalon.

   $\dfrac{(2 + i) \cdot z}{2 + 6i} = \overline{3 + i}$

   Most végezzük el a konjugálást.

   $\dfrac{(2 + i) \cdot z}{2 + 6i} = 3 - i$

   Itt feltétlenül álljunk meg egy pillanatra! Meg kell jegyezni, hogy a konjugálás nem azt jelenti, hogy minden olyan tag előjelét megváltoztatjuk, amiben az i szerepel. A konjugálás során csak a képzetes rész előjele változik. Ebben a feladatban jól látható, hogy az eredeti felírásban két tag is tartalmazza az i-t, de mégis csak az egyik előjelét kell megváltoztatni. Az i^7 valóban képzetes, hiszen $-i$-vel egyenlő, de az i^6 valós, hiszen -1-gyel egyenlő.

Térjünk vissza az egyenlet megoldásához. Most szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $2+6i$-vel, és osszuk mindkét oldalt $2+i$-vel. Így kifejezzük az ismeretlent.

$$z = \frac{(3-i)(2+6i)}{2+i}$$

El kell még végezni a jobb oldalon a műveleteket. Írjuk le külön a számlálóból a szorzást.

$$(3-i)(2+6i) = 6+18i-2i-6i^2 = 6+18i-2i+6 = 12+16i$$

Helyettesítsük ezt be, majd végezzük el az osztást.

$$z = \frac{12+16i}{2+i} = \frac{(12+16i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{24-12i+32i-16i^2}{2^2+1^2} =$$
$$= \frac{24-12i+32i+16}{4+1} = \frac{40+20i}{5} = 8+4i$$

A megoldás tehát $z = 8+4i$.

3. **Feladat:** Ha tudjuk, hogy $(x+y)+(x-y)i = (1+i)^2 + \frac{1}{i}$, mivel egyenlő az x és y valós szám?

Megoldás: Az egyenlet jobb oldalán végezzük el a műveleteket, és írjuk fel az ott álló komplex számot algebrai alakban. Számoljunk részletekben.

$$(1+i)^2 = 1^2+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i$$
$$\frac{1}{i} = \frac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \frac{-i}{0^2+1^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

(Itt is ugyanúgy végeztük el az oszást, mint az eddigiekben, azaz a nevező konjugáltával bővítettük a törtet. A nevezőben $i = 0+i$ állt, s ennek konjugáltával $0-i=-i$-vel bővítettünk.)

Helyettesítsük be a részeredményeket az egyenletbe.

$$(x+y)+(x-y)i = 2i-i = i$$

Mivel x és y valós számok, ezért $x+y$ és $x-y$ is valós szám. Ez azt jelenti, hogy az egyenlet bal oldalán tulajdonképpen egy komplex szám áll, melynek valós része $x+y$, s képzetes része $x-y$. Arra hivatkozhatunk ismét, hogy két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha külön a valós, és a képzetes részeik is egyenlők. A jobb oldal valós része 0, képzetes része pedig 1, hiszen $i = 0+1\cdot i$. A komplex egyenletből így az alábbi két egyenletből álló egyenletrendszert kapjuk.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Meg kell oldanunk az egyenletrendszert.

Adjuk össze a két egyenletet, így a $2x = 1$ egyenletet kapjuk, amiből $x = \frac{1}{2}$.

Ha kivonjuk a két egyenletet, akkor a $2y = -1$ egyenletet kapjuk, amiből $y = -\frac{1}{2}$.

(Miután megkaptuk x értékét, természetesen y-t valamelyik egyenletbe történő visszahelyettesítéssel is megkaphattuk volna.)

A feladat megoldása: $x = \frac{1}{2}$ és $y = -\frac{1}{2}$.

4. **Feladat:** Oldjuk meg a $z^2 - 2\overline{z} = 0$ egyenletet!

   Megoldás: Olyan egyenletet kell megoldanunk, amiben egy komplex ismeretlen, és annak konjugáltja is szerepel. Mint egy korábbi feladatban, most is célszerű felírni általánosan az ismeretlen algebrai alakját, mert ebből felírható a konjugált is.

   $z = a + bi$ és $\overline{z} = a - bi$

   Helyettesítsük be ezeket az egyenletbe.

   $(a + bi)^2 - 2(a - bi) = 0$

   Végezzük el a négyzetre emelést, és bontsuk fel a zárójelet.

   $a^2 + 2abi + (bi)^2 - 2a + 2bi = 0$

   $a^2 + 2abi + b^2i^2 - 2a + 2bi = 0$

   $a^2 + 2abi - b^2 - 2a + 2bi = 0$

   Csoportosítsuk ezután a bal oldalon a tagokat úgy, hogy külön a valósakat, és külön a képzeteseket.

   $(a^2 - b^2 - 2a) + (2ab + 2b)i = 0$

   Használjuk fel, hogy két komplex szám csak úgy lehet egyenlő, ha külön a valós részeik is, és külön a képzetes részeik is megegyeznek. A jobb oldalon 0 áll, ami azt jelenti, hogy ott a valós és képzetes rész is 0, hiszen a 0 komplex szám algebrai alakja $0 + 0i$. Így a komplex egyenletből az alábbi egyenletrendszert kapjuk.

   A valós részek egyenlősége: $a^2 - b^2 - 2a = 0$

   A képzetes részek egyenlősége: $2ab + 2b = 0$

   A második egyenlettel célszerű először foglalkozni, mert annak bal oldalán kiemelhető $2b$.

   $2b(a + 1) = 0$

   Ez azért jó, mert egy szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyi tényezője 0. Így két eset fordulhat elő. Az első eset, ha $2b = 0$, amiből $b = 0$ következik, a második pedig, ha $a + 1 = 0$, amiből $a = -1$ következik.

Innentől tehát két ágon folytatódik a megoldás.

Az első esetben $b = 0$.

Ezt helyettesítsük be a valós részek egyenlőségét leíró egyenletbe.

$a^2 - 0^2 - 2a = 0$, azaz $a^2 - 2a = 0$.

Az egyenlet bal oldalán kiemelhető a.

$a(a - 2) = 0$

Mivel ismét szorzat egyenlő 0-val, ezért két eset van. Egyrészt $a = 0$, másrészt pedig $a - 2 = 0$, amiből $a = 2$ következik.

Ezután már felírhatjuk az egyenlet két megoldását. A megoldásokat célszerű indexeléssel megkülönböztetni.

Az $a = 0$ és $b = 0$ számpárból kapjuk a $z_1 = 0 + 0i = 0$ megoldást.

Az $a = 2$ és $b = 0$ számpárból pedig a $z_2 = 2 + 0i = 2$ megoldást kapjuk.

Ezután foglalkozzunk a második esettel, amikor $a = -1$.

Ezt behelyettesítjük a valós részek egyenlőségét leíró egyenletbe.

$(-1)^2 - b^2 - 2(-1) = 0$, azaz $3 - b^2 = 0$.

Ennek az egyenletnek két megoldása van: $b = \sqrt{3}$ és $b = -\sqrt{3}$.

Így ebben az esetben is két (a, b) számpárt kaptunk, amelyekből az egyenletnek további két megoldása írható fel.

Az $a = -1$ és $b = \sqrt{3}$ számpárból kapjuk a $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$ megoldást.

Az $a = -1$ és $b = -\sqrt{3}$ számpárból pedig a $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$ megoldást kapjuk.

Végül tekintsük át az egyenlet összes megoldását. Négy darab megoldást kaptunk, melyek a következők:

$z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$ és $z_4 = -1 - \sqrt{3}i$.

5. **Feladat:** Vonjunk négyzetgyököt a $z = -5 + 12i$ komplex számból!

   Megoldás: Először fogalmazzuk át a feladatot. Olyan komplex számot, vagy számokat kell keresnünk, amelynek négyzete z-vel egyenlő. Vezessük be az $u = \sqrt{z}$ jelölést, ekkor $u^2 = z$, azaz $u^2 = -5 + 12i$. A gyökvonás tehát azt jelenti, hogy ezt az egyenletet kell megoldanunk. Mivel ebben az egyenletben az u ismeretlen komplex, ezért az előző feladathoz hasonlóan célszerű az általános algebrai alakból elindulni.

   $u = a + bi$.

   Helyettesítsük ezt be az egyenletbe.

   $(a + bi)^2 = -5 + 12i$

   Végezzük el a négyzetre emelést.

$a^2 + 2abi + (bi)^2 = -5 + 12i$

$a^2 + 2abi + b^2i^2 = -5 + 12i$

$a^2 + 2abi - b^2 = -5 + 12i$

Csoportosítsunk ezután a bal oldalon, külön a valós tagokat, s kölün a képzetes tagokat.

$(a^2 - b^2) + 2abi = -5 + 12i$

A komplex egyenletet ismét egyenletrendszerré alakíthatjuk, mert felírhatjuk külön a valós részek, és külön a képzetes részek egyenlőségét.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \end{cases}$$

A második egyenletből fejezzük ki b-t.

$$b = \frac{6}{a} \qquad (*)$$

Helyettesítsük ezt be az első egyenletbe.

$$a^2 - \left(\frac{6}{a}\right)^2 = -5$$

Végezzük el a négyzetre emelést.

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = -5$$

Szorozzunk a^2-tel.

$a^4 - 36 = -5a^2$

Rendezzük 0-ra az egyenletet.

$a^4 + 5a^2 - 36 = 0$

Célszerű az a^2 helyére egy új ismeretlent bevezetni, mert így az egyenlet visszavezethető másodfokú egyenletre. Legyen pl. $t = a^2$. Ekkor az egyenlet a $t^2 + 5t - 36 = 0$ alakot ölti.

Írjuk fel a megoldóképletet. (Mivel t valós, ezért kiírjuk a $\pm$-t.)

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-5+13}{2} = 4 \\ \dfrac{-5-13}{2} = -9 \end{cases}$$

Mivel az a valós számot jelöl, így négyzete nem lehet negatív. Ebből következik, hogy a második megoldás, a -9 hamis gyök, csak a $t = 4$ megoldásssal kell foglalkoznunk. Mivel $t = a^2$, ezért az $a^2 = 4$ egyenletet kapjuk, aminek két megoldása van, az $a_1 = 2$ és az $a_2 = -2$.

Helyettesítsük be ezeket a (*)-gal jelölt egyenletbe.

$$b_1 = \frac{6}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$b_2 = \frac{6}{a_1} = \frac{6}{-2} = -3$$

Ezután felírhatjuk a megoldásokat. Két (a, b) számpárt kaptunk, így két megoldás van.

Az $a = 2$ és $b = 3$ számpárból kapjuk az $u_1 = 2 + 3i$ megoldást.

Az $a = -2$ és $b = -3$ számpárból pedig az $u_2 = -2 - 3i$ megoldást kapjuk.

Mivel $u = \sqrt{z}$, ezért az eredményt a következő módon is írhatjuk:

$\sqrt{z} = \pm(2 + 3i)$.

Megjegyzés: Amint a feladatból látható, a négyzetgyökvonást algebrai alakban is el lehet végezni a komplex számok körében. Általában azonban nem ez a legcélszerűbb eljárás. A gyökvonást célszerűbb trigonometrikus alakban végrehajtani. Úgy nem csak négyzetgyököt, hanem bármilyen kitevőjű gyököt lehet vonni a komplex számokból.