Komplex számok trigonometrikus alakja

Lukács Antal

2016. február 19.

1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi algebrai alakban adott komplex számok trigonometrikus alakját!

   $z_1 = 4 + 4i, \quad z_2 = -4 + 2i, \quad z_3 = -3 - 3\sqrt{3}i, \quad z_4 = 3 - 5i,$

   $z_5 = 3, \quad z_6 = -4, \quad z_7 = 5i, \quad z_8 = -6i$

   Megoldás: Ha algebrai alakról térünk át trigonometrikus alakra, akkor két dolgot kell meghatároznunk. Egyrészt a komplex szám abszolút értékét (r), amit a komplex szám hosszának is szoktak nevezni, másrészt a kopmlex szám argumentumát (φ), amit irányszögnek is neveznek. Ezek meghatározására az $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $a \neq 0$ esetén a $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$ összefüggések állnak rendelkezésünkre.

   Ezek alapján z_1 esetén $r = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

   Az irányszög esetén célszerű a következő módon eljárni. Először a $\operatorname{tg} \delta = \left|\dfrac{b}{a}\right|$ összefüggésből egy segédszöget határozunk meg, mely biztosan hegyesszög. Ezután ábrázoljuk a komplex számot, s attól függően, hányadik síknegyedbe esik a szám, a segédszögből határozzuk meg az irányszöget, azaz φ-t.

   Most $\operatorname{tg} \delta = \left|\dfrac{4}{4}\right| = 1$. Ebből visszakeresve $\delta = 45°$.

   Most készítsünk egy vázlatos ábrát a komplex szám elhelyezkedéséről a számsíkon.

   Mivel z_1 az első síknegyedben helyezkedik le, így $\varphi = \delta = 45°$.

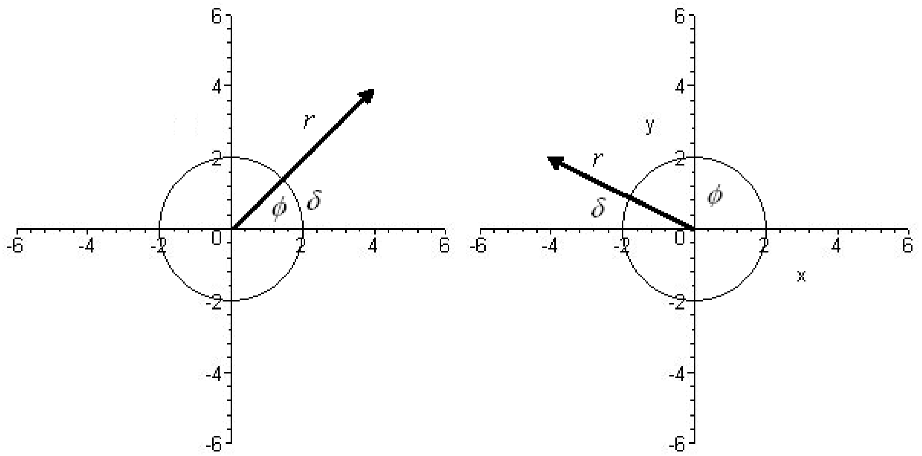
   Ezek alapján z_1 trigonometrikus alakja a következő:

   $z_1 = 4\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$

   Ezután foglalkozzunk z_2-vel.

   $r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

   $\operatorname{tg} \delta = \left|\dfrac{2}{-4}\right| = \dfrac{1}{2}$



1. ábra. z_1 és z_2

Ebből visszakeresve $\delta \cong 26.57°$.

Most nem kapjuk meg teljes pontossággal δ értékét, mert nem nevezetes szögről van szó. Ennek következtében a trigonometrikus alak is csak közelítőleg fogja megadni z_2-t. A φ szög meghatározásához készítsünk ábrát z_2-ről.

Az ábrán látható, hogy z_2 a második síknegyedbe esik, és itt a $\varphi + \delta = 180°$ összefüggés teljesül. Ezért $\varphi = 180° - \delta \cong 180° - 26.57° = 153.43°$

Ezek alapján z_2 közelítő trigonometrikus alakja a következő:

$z_2 \cong 2\sqrt{5}(\cos 153.43° + i \sin 153.43°)$.

Következhet z_3.

$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$

$\operatorname{tg} \delta = \left| \frac{-3\sqrt{3}}{-3} \right| = \sqrt{3}$

Ebből visszakeresve $\delta = 60°$.

Ábrázoljuk a z_3 komplex számot.

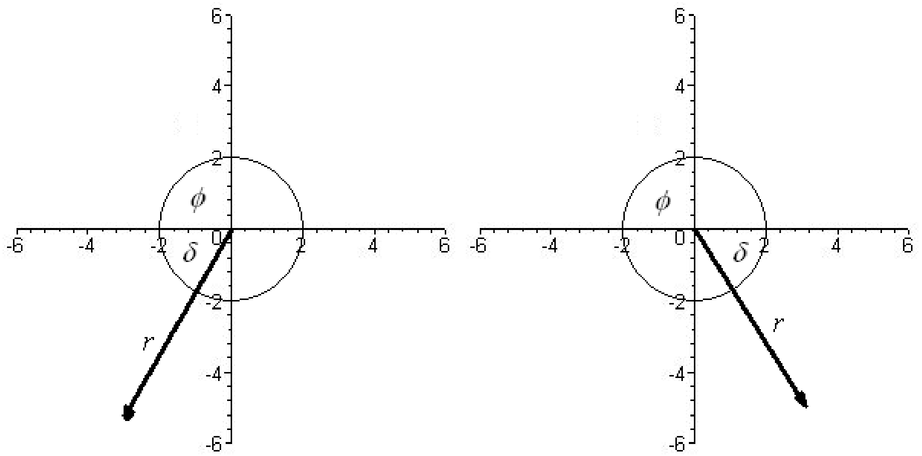
Az ábráról leolvasható, hogy ez a szám a harmadik síknegyedbe esik, és itt a $\varphi = 180° + \delta$ összefüggés teljesül. Jelen esetben $\varphi = 180° + 60° = 240°$.

Ezek alapján z_3 trigonometrikus alakja a következő:

$z_3 = 6(\cos 240° + i \sin 240°)$.

Ezután foglalkozzunk z_4-gyel.

$r = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$



2. ábra. z_3 és z_4

$\operatorname{tg}\delta = \left|\dfrac{-5}{3}\right| = \dfrac{5}{3}$

Ebből visszakeresve $\delta \cong 59.04°$.

Most sem kaptunk pontos értéket δ-ra, így z_4-nek is csak közelítő trigonometrikus alakját tudjuk majd felírni.

Ábrázoljuk a z_4 komplex számot.

Az ábráról leolvasható, hogy ez a szám a negyedik síknegyedbe esik, ahol a $\varphi + \delta = 360°$ összefüggés teljesül.

Ebből $\varphi \cong 360° - 59.04° = 300.96°$.

Ezek alapján z_4 trigonometrikus alakja a következő:

$z_4 = \sqrt{34}(\cos 300.96° + i \sin 300.96°)$.

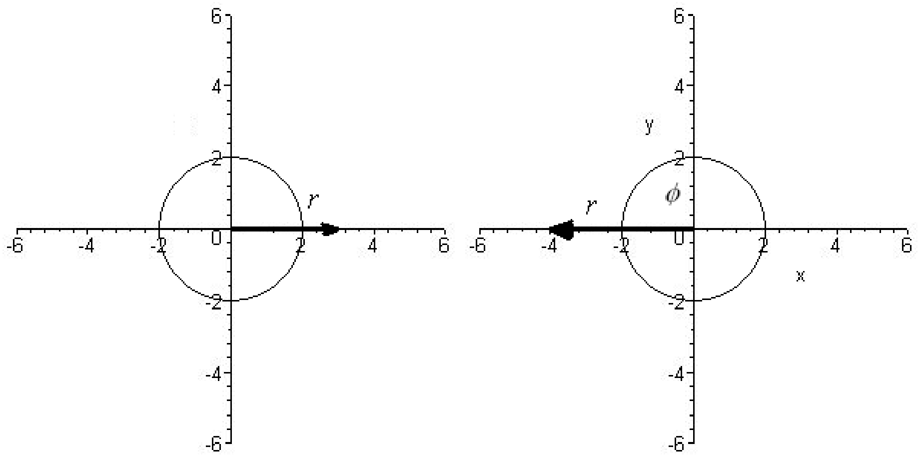
Térjünk át ezek után z_5 trigonometrikus alakjának meghatározására.

A komplex szám abszolút értékét meghatározhatjuk úgy is, mint a korábbiakban. Kapjuk $r = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$. Ezt azonban most egyszerűbben is megkaphattuk volna, ha ábrázoljuk z_5-öt.

Mivel z_5 valós szám, így az ábráról is leolvasható a számot szemléltető vektor hossza, hiszen tengellyel párhuzamos vektorról van szó. Ebből is látható, hogy $r = 3$.

Sőt az ábráról leolvasható a komplex szám argumentuma is, hiszen a számot szemléltető vektor az x tengely pozitív irányába mutat, ezért $\varphi = 0°$. Persze használhattuk volna a $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$ összefüggést is, mint a korábbiakban, de az ábráról leolvasva φ-t, sokkal gyorsabban érünk célba.

Ezek után z_5 trigonometrikus alakja a következő:



3. ábra. z_5 és z_6

$z_5 = 3(\cos 0° + i \sin 0°)$.

Következzen z_6.

Most is valós számról van szó, így célszerű úgy eljárnunk, mint z_5 esetében. Készítsünk ábrát, s arról olvassuk le az abszolút értéket, valamint az argumentumot. A komplex számot szemléltető vektor hossza nyilván 4, azaz $r = 4$. A vektor a valós tengely pozitív irányával 180°-os szöget zár be, tehát $\varphi = 180°$.

Ebből z_6 trigonometrikus alakja a következő:

$z_6 = 4(\cos 180° + i \sin 180°)$.

Térjünk át z_7-re.

Most nem valós számról van szó, de mégis eljárhatunk úgy, mint z_5 és z_6 esetében, mert ez a komplex szám egy tiszta képzetes szám. Ha ábrát készítünk róla, akkor az ábráról le tudunk olvasni mindent. Sőt most φ-t nem is tudjuk a $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{b}{a}$ összefüggésből meghatározni, hiszen $a = 0$.

A komplex számot szemléltető vektor most az y tengellyel párhuzamos, és függőlegesen felfelé mutat. Hossza nyilván 5, azaz $r = 5$, s a valós tengely pozitív irányával pedig 90°-ot zár be, tehát $\varphi = 90°$.

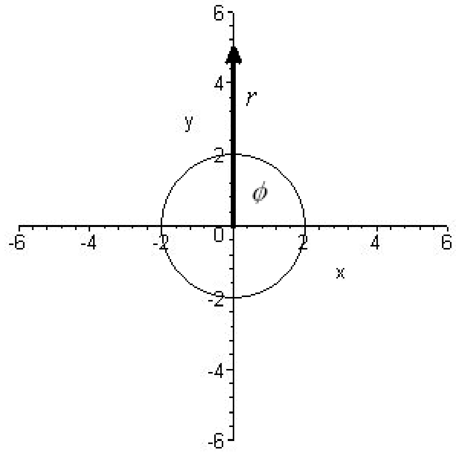
Ebből z_7 trigonometrikus alakja a következő:

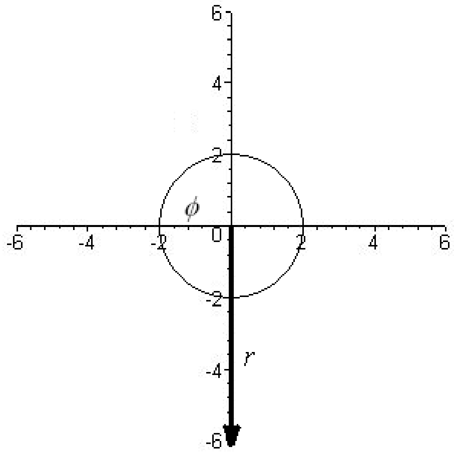
$z_7 = 5(\cos 90° + i \sin 90°)$.

Végül foglalkozzunk z_8-cal.

Ismét elég ábrát készítenünk, és arról leolvasni az adatokat.

A komplex számot szemléltető vektor most is az y tengellyel párhuzamos, de most függőlegesen lefelé mutat. Hossza nyilván 6, azaz $r = 6$, s a





4. ábra. z_7 és z_8

valós tengely pozitív irányával pedig 270°-ot zár be, tehát $\varphi = 270°$.

Ebből z_8 trigonometrikus alakja a következő:

$z_8 = 6(\cos 270° + i \sin 270°)$.

Megjegyzés: Amint látható, általánosságban a komplex számok trigonometrikus alakjának meghatározásához az $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $a \neq 0$ esetén a $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ összefüggéseket használjuk. Azonban ha a komplex szám valós, vagy tiszta képzetes, akkor egyszerűen ábráról leolvashatunk mindent, ugyanis ilyenkor a komplex számot szemléltető vektor valamelyik tengelyre esik. Mivel tiszta képzetes számok esetén $a = 0$, ezért ilyenkor a $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ összefüggésből φ nem határozható meg. Ekkor csak az ábráról tudjuk leolvasni φ-t.

2. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi trigonometrikus alakban megadott komplex számok algebrai alakját!

   $z_1 = 7(\cos 135° + i \sin 135°)$, $\quad z_2 = 7(\cos 256° + i \sin 256°)$,

   $z_3 = 8(\cos 180° + i \sin 180°)$, $\quad z_4 = 2(\cos 90° + i \sin 90°)$,

   Megoldás: Az előző feladatban algebrai alakban megadott komplex számok trigonometrikus alakjának meghatározása volt a feladat, most fordított a kérdés. Ilyenkor egyszerűbb helyzetben vagyunk, mint az előbb. Csak annyit kell tennünk, hogy meghatározzuk $\cos \varphi$ és $\sin \varphi$ értékét, majd utána felbontjuk a zárójelet. Hajtsuk ezt végre először z_1 esetében.

   $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

   Írjuk be ezeket az értékeket a trigonometrikus alakba.

$z_1 = 7(\cos 135° + i \sin 135°) = 7\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

A zárójel felbontása után megkapjuk az algebrai alakot.

$z_1 = -\frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2}i$

Járjunk el ugyanígy z_2 esetében is.

$\cos 256° \cong -0.2419$ és $\sin 256° \cong -0.9703$

A szögfüggvények értékét most csak közelítőleg tudtuk meghatározni, mert φ nem nevezetes szög volt. Így nyilván csak közelítőleg fogjuk megkapni a komplex szám algebrai alakját is.

$z_2 = 7(\cos 256° + i \sin 256°) \cong 7(-0.2419 + i(-0.9703))$

$z_2 \cong -1.693 - 6.792i$

Következzen z_3.

$\cos 180° = -1$ és $\sin 180° = 0$

Ezeket felhasználva:

$z_3 = 8(\cos 180° + i \sin 180°) = 8(-1 + i \cdot 0) = -8$

Amint látható, ez a komplex szám egyben negatív valós szám is.

Végül jöjjön z_4.

$\cos 90° = 0$ és $\sin 90° = 1$

Ezekből z_4 algebrai alakja:

$z_4 = 2(\cos 90° + i \sin 90°) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$

Amint az algebrai alakból látható, most egy tiszta képzetes számról van szó.

3. **Feladat:** Határozzuk meg a $z = -4(\sin 150° - i \cos 240°)$ komplex szám trigonometrikus alakját.

   Megoldás: A feladat talán kicsit furcsának tűnik, mert z olyan alakban van felírva, melyben szerepel sin és cos, így nagyon hasonlít egy trigonometrikus alakhoz. A valóságban azonban ez nem trigonometrikus alak. Több okból sem. Például egy trigonometrikus alakban nem állhat negatív szorzó a zárójel előtt, hiszen ott a komplex szám abszolút értékének kell állni, ami nem negatív. Ezen kívül az is látható, hogy nem ugyanazon szögnek szerepel a sin-a és cos-a. Továbbá a sin-t és cos-t felcserélték, valamint az i előtt negatív előjel áll. Ha ezeknek csak egyike is előfordul, akkor nem trigonometrikus alakban felírt komplex számról van szó. Ilyenkor először a komplex szám algebrai alakját állítjuk elő, majd abból térünk át trigonometrikus alakra.

Az algebrai alakot ugyanúgy kapjuk, mint ahogyan az előző feladatban trigonometrikus alakról áttértünk algebrai alakra. Határozzuk meg tehát a szereplő szögfüggvények értékét.

$\cos 240^\circ = -0.5$ és $\sin 150^\circ = 0.5$

Helyettesítsük be ezeket.

$z = -4(\sin 150^\circ - i\cos 240^\circ) = -4(0.5 - i(-0.5)) = -2 - 2i$

Ezután az első feladatban leírtak szerint áttérünk trigonometrikus alakra.

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\operatorname{tg}\delta = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$

Visszakeresve kapjuk: $\delta = 45^\circ$.

Ha ábrázoljuk a komplex számot, akkor az láthatóan a harmadik síknegyedben helyezkedik el, s itt a $\varphi = 180^\circ + \delta$ összefüggés teljesül. (Az ábra elkészítését már az olvasóra bízzuk.) Jelen esetben $\varphi = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

Ezután már felírhatjuk a szám trigonometrikus alakját.

$z = 2\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

4. **Feladat:** legyen $z_1 = -3+3i$ és $z_2 = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$ Határozzuk meg $z_1 \cdot z_2$ trigonometrikus alakját!

   Megoldás: Egy szorzatot kell meghatároznunk, de az egyik tényező algebrai alakban, a másik pedig trigonometrikus alakban van. A művelet elvégzéséhez azonos alakba kell írnunk a komplex számokat. Mivel trigonometrikus alakban kérik az eredményt, ezért célszerűbb az algebrai alakban adott számot átírni trigonometrikus alakra, s úgy elvégezni a szorzást, mert így rögtön trigonometrikus alakban fogjuk megkapni az eredményt. Első lépésként tehát írjuk át z_1-et trigonometrikus alakra.

   $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

   $\operatorname{tg}\delta = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{3}{-3}\right| = 1$

   Visszakeresve kapjuk: $\delta = 45^\circ$.

   Ha ábrázoljuk a komplex számot, akkor az láthatóan a második síknegyedben helyezkedik el, s itt a $\varphi = 180^\circ - \delta$ összefüggés teljesül. Most azt kapjuk: $\varphi = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

   Ezután már felírhatjuk a szám trigonometrikus alakját.

   $z_1 = 3\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$

   Most végezzük el a szorzást. Trigonometrikus alakú komplex számok szorzása esetén a szorzat abszolút értéke a számok abszolút értékének szorzatával egyenlő, s a szorzat argumentuma pedig a tényezők argumentumának összegével. Ez képletben az alábbi alakban írható. Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

ekkor $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Jelen esetben ez a következőt jelenti:

$z_1 \cdot z_2 = (3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})(\cos(135° + 315°) + i\sin(135° + 315°)) = 6(\cos 450° + i\sin 450°)$

Trigonometrikus alakban azonban az argumentum a $[0°, 360°)$ intervallumba kell, hogy essen, ezért ezen még alakítanunk kell. Ha az argumentumhoz hozzáadjuk, vagy kivonjuk $360°$ valamilyen egész számú többszörösét, akkor a komplex szám nem változik. Most például az argumentumból $360°$-ot ki kell vonnunk, így kapunk majd egy $[0°, 360°)$ intervallumba eső szöget.

$z_1 \cdot z_2 = 4(\cos(450° - 360°) + i(\sin 450° - 360°)) = 4(\cos 90° + i\sin 90°)$

5. **Feladat:** Határozzuk meg $(1+i)^7$ trigonometrikus alakját!

   Megoldás: Egy komplex számot kell hatványoznunk elég nagy kitevőre. Ha ezt algebrai alakban szeretnénk elvégezni, akkor nagyon sok szorzást kellene végrehajtani. Sokkal célszerűbb a komplex számot átírni trigonometrikus alakra, és ott elvégezni a hatványozást. Így ráadásul rögtön trigonometrikus alakban fogjuk megkapni az eredményt.

   Írjuk tehát át $1 + i$-t trigonometrikus alakra.

   $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

   $\operatorname{tg}\delta = \left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$

   Visszakeresve kapjuk: $\delta = 45°$.

   Ha ábrázoljuk a komplex számot, akkor az láthatóan az első síknegyedben helyezkedik el, s itt $\varphi = \delta$. Jelen esetben tehát $\varphi = 45°$.

   Ebből következően: $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$.

   Most következik a hatványozás. Trigonomtrikus alakú komplex szám hatványozása esetén a hatvány abszolút értéke egyenlő lesz az abszolút érték megfelelő hatványával, s a hatvány argumentumát pedig az eredeti argumentum és a kitevő szorzataként kapjuk. Képletben ez a következő módon írható. Ha $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, akkor

   $z^n = r^n(\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi))$.

   A konkrét esetben ez a következőt jelenti.

   $(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7(\cos(7\cdot 45°) + i\sin(7\cdot 45°)) = 8\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$

6. **Feladat:** Adjuk meg $\sqrt[3]{\dfrac{81(\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ)}{3(\cos 190^\circ + i \sin 190^\circ)}}$ értékeit trigonometrikus alakban!

Megoldás: Elsőként a gyökjel alatti osztást kell elvégeznünk. Trigonometrikus alakú komplex számok osztása esetén a hányados abszolút értéke, az abszolút értékek hányadosával egyenlő, s a hányados argumentuma pedig az argumentumok különbségével. Képletben ezt a következő módon írhatjuk.

Legyen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$,

ekkor $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Jelen esetben ez a következőt jelenti:

$$\frac{81(\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ)}{3(\cos 190^\circ + i \sin 190^\circ)} = \left(\frac{81}{3}\right)(\cos(310^\circ - 190^\circ) + i \sin(310^\circ - 190^\circ)) =$$
$$= 27(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

Ezután hajtsuk végre a gyökvonást. Komplex számból n-edik gyököt vonva az eredmény abszolút értéke az eredeti abszolút érték n-edik gyöke lesz, az eredmény argumentuma pedig az eredeti argumentum osztva a gyökkitevővel. Azonban a gyökvonásnak mindig annyi eredménye van, ahányadik gyököt vonunk, ezért ezen argumentumhoz hozáadható $\dfrac{k \cdot 360^\circ}{n}$, ahol k a $0, 1, 2 \cdots n-1$ értékeket veheti fel. Képletben ez a következő módon írható. Legyen $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, ekkor

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + i \sin\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2 \cdots n-1$.

Jelen feladatban ez a következőt jelenti.

$$\sqrt[3]{27(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} =$$
$$= \sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin\frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}\right), \text{ ahol } k = 0, 1, 2.$$

Elvégezve a műveleteket a következőt kapjuk:

$$\sqrt[3]{27(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} = 3\left(\cos(40^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(40^\circ + k \cdot 120^\circ)\right),$$

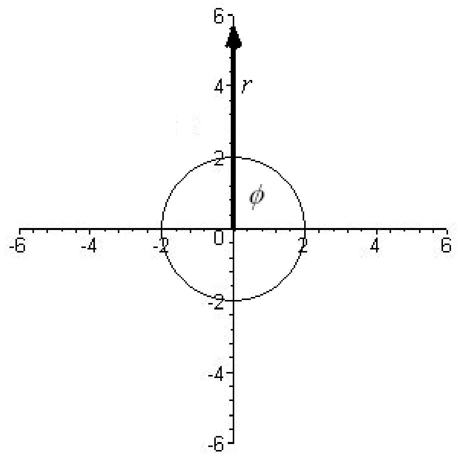
ahol $k = 0, 1, 2$.

Célszerű külön is felírni a három gyököt.

$k = 0$ esetén $3\left(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ\right)$

$k = 1$ esetén $3\left(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ\right)$

$k = 2$ esetén $3\left(\cos 280^\circ + i \sin 280^\circ\right)$



5. ábra. $z_1 + z_2$

2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Tekintsük a következő komplex számokat: $z_1 = 4(\cos 45° + i \sin 45°)$, $z_2 = 4(\cos 135° + i \sin 135°), z_3 = 2(\cos 110° + i \sin 110°)$ Határozzuk meg $\dfrac{z_1 + z_2}{z_3}$ trigonometrikus alakját!

   Megoldás: A meghatározandó tört számlálójában két komplex szám összege áll. Ezek a számok trigonometrikus alakban vannak megadva, azonban az összeadást csak algebrai alakban tudjuk elvégezni. Ezért először meg kell határoznunk z_1 és z_2 algebrai alakját.

   $z_1 = 4(\cos 45° + i \sin 45°) = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

   $z_2 = 4(\cos 135° + i \sin 135°) = 4\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

   Ezután már elvégezhető az összeadás.

   $z_1 + z_2 = (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i) + (-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i) = 4\sqrt{2}i$

   Hátra van még egy osztás. A számláló algebrai alakban van, a nevező pedig trigonometrikus alakban. Közös alakra kell őket hozni. Mivel az eredményt trigonometrikus alakban kérik, ezért célszerű a számlálót átírni trigonometrikus alakra. A számláló tiszta képzetes szám, így elegendő ábrázolni, és az ábráról leolvasni az adatokat.

   Nyilvánvaló, hogy $r = 4\sqrt{2}$ és $\varphi = 90°$.

   Ebből a számláló trigonometrikus alakja:

   $z_1 + z_2 = 4\sqrt{2}(\cos 90° + i \sin 90°)$.

   Most végezzük el az osztást.

$$\frac{z_1+z_2}{z_3} = \frac{4\sqrt{2}(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)}{2(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{2}(\cos(90^\circ - 110^\circ) + i\sin(90^\circ - 110^\circ)) = 2\sqrt{2}(\cos(-20^\circ) + i\sin(-20^\circ))$$

Mivel negatív szöget kaptunk, azért az argumentumhoz adjunk hozzá 360°-ot.

$$\frac{z_1+z_2}{z_3} = 2\sqrt{2}(\cos 340^\circ + i\sin 340^\circ)$$

2. **Feladat:** Oldjuk meg a $z^6 + z^3 - 20 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

   Megoldás: Ha bevezetjük az $u = z^3$ új ismeretlent, akkor a hatodfokú egyenletet visszavezethetjük másodfokú egyenletre.

   Kapjuk: $u^2 + u - 20 = 0$.

   Határozzuk meg ennek megoldásait a megoldóképlettel.

$$u_{1,2} = \frac{-1+\sqrt{1^2 - 4\cdot(-20)}}{2} = \frac{-1+\sqrt{81}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+9}{2} = 4 \\ \dfrac{-1-9}{2} = -5 \end{cases}$$

   Ahhoz, hogy az eredeti ismeretlent kapjuk meg, ezen u értékekből még köbgyököt kell vonnunk, hiszen ha $u = z^3$, akkor $z = \sqrt[3]{u}$.

   A gyökvonást azonban trigonometrikus alakban tudjuk végrehajtani, ezért a másodfokú egyenlet gyökeit írjuk át trigonometrikus alakra. Mindkét gyök valós, így elég ábrázolni őket, s az ábráról leolvasni az abszolút értéküket és az argumentumukat.

   $u_1 = 4$ esetén $r = 4$ és $\varphi = 0^\circ$, így trigonometrikus alakja

   $u_1 = 4(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$.

   $u_2 = -5$ esetén $r = 5$ és $\varphi = 180^\circ$, így trigonometrikus alakja

   $u_2 = 5(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)$.

   A gyökvonások végrehajtása után 6 megoldást fogunk kapni.

   Egyrészt

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{u_1} = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + i\sin\frac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right),$$

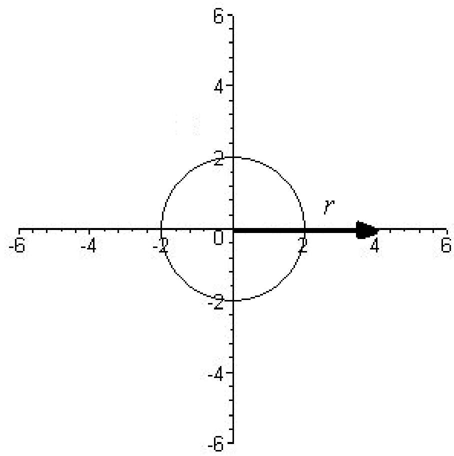
   ahol $k = 0, 1, 2$ értékeket vehet fel.

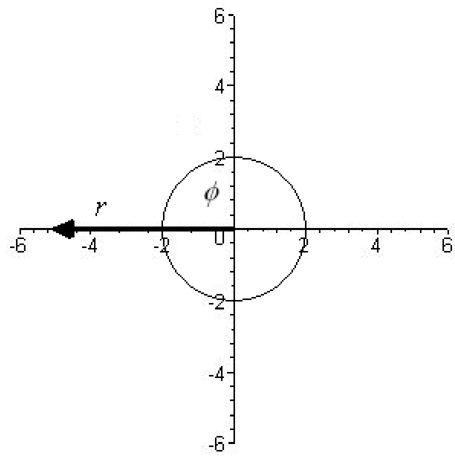
   Másrészt

$$z_{4,5,6} = \sqrt[3]{u_2} = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + i\sin\frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right),$$

   ahol $k = 0, 1, 2$ értékeket vehet fel.

   Felírhatjuk külön-külön is a gyököket.





6. ábra. u_1 és u_2

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{4}\,(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)\\
z_2 &= \sqrt[3]{4}\,(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)\\
z_3 &= \sqrt[3]{4}\,(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)\\
z_4 &= \sqrt[3]{5}\,(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)\\
z_5 &= \sqrt[3]{5}\,(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)\\
z_6 &= \sqrt[3]{5}\,(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)
\end{aligned}
$$

3. **Feladat:** Oldjuk meg a $z^4 + iz^2 + 12 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

   Megoldás: Vezessük be az $t = z^2$ új ismeretlent, ezzel a negyedfokú egyenletet visszavezethetjük másodfokú egyenletre.

   Kapjuk: $t^2 + it + 12 = 0$.

   Határozzuk meg ennek megoldásait a megoldóképlettel.

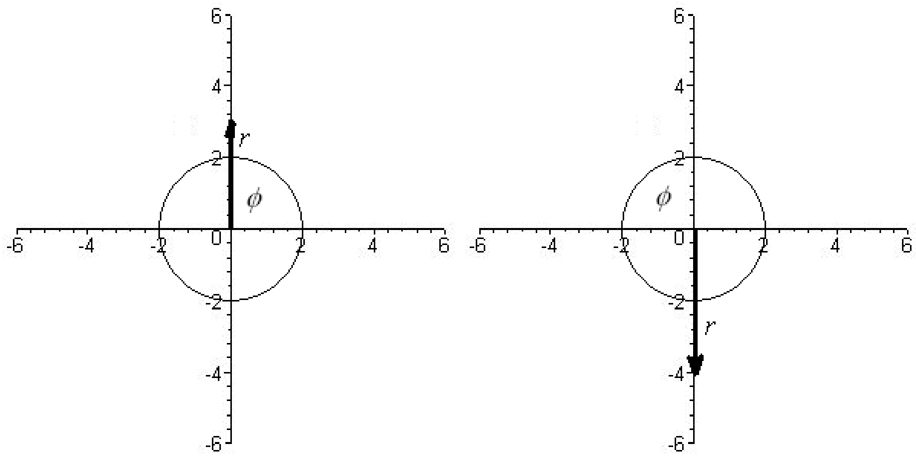
$$
t_{1,2} = \frac{-i + \sqrt{i^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-i + \sqrt{(-49)}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-i + 7i}{2} = 3i \\ \dfrac{-i - 7i}{2} = -4i \end{cases}
$$

   Az eredeti ismeretlen meghatározásához ezen t értékekből még négyzetgyököt kell vonnunk, hiszen ha $t = z^2$, akkor $z = \sqrt{t}$.

   A gyökvonást trigonometrikus alakban tudjuk végrehajtani, ezért a másodfokú egyenlet gyökeit írjuk át trigonometrikus alakra. Mindkét gyök tiszta képzetes, így elég ábrázolni őket, s az ábráról leolvasni az abszolút értéküket és az argumentumukat.

   $t_1 = 3i$ esetén $r = 3$ és $\varphi = 90^\circ$, így trigonometrikus alakja

   $t_1 = 3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$.



7. ábra. t_1 és t_2

$t_2 = -4i$ esetén $r = 4$ és $\varphi = 270°$, így trigonometrikus alakja
$t_2 = 4(\cos 270° + i \sin 270°)$.

A gyökvonások végrehajtása után 4 megoldást fogunk kapni.

Egyrészt

$$z_{1,2} = \sqrt{t_1} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{90° + k\cdot 360°}{2} + i \sin\frac{90° + k\cdot 360°}{2}\right),$$

ahol $k = 0, 1$ értékeket vehet fel.

Másrészt

$$z_{3,4} = \sqrt{t_2} = \sqrt{4}\left(\cos\frac{270° + k\cdot 360°}{2} + i \sin\frac{270° + k\cdot 360°}{2}\right),$$

ahol $k = 0, 1$ értékeket vehet fel.

Írjuk fel külön-külön is gyököket.

$z_1 = \sqrt{3}\,(\cos 45° + i \sin 45°)$

$z_2 = \sqrt{3}\,(\cos 225° + i \sin 225°)$

$z_3 = 2\,(\cos 135° + i \sin 135°)$

$z_1 = 2\,(\cos 315° + i \sin 315°)$

4. **Feladat:** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

   $(1 - 2\sqrt{3}i)z^3 - 8 = 24\,(\cos 60° + i \sin 60°)$

   Megoldás: Az egyenletben csak egyetlen helyen fordul elő az ismeretlen, így egyszerűen csak rendezéssel ki kell fejeznünk. Első lépésként mindkét oldalhoz hozzá kellene adnunk 8-at. Mivel a jobb oldalon egy trigonometrikus alakú komplex szám áll így ezt csak akkor tudjuk majd elvégezni, ha a jobb oldalt átírjuk algebrai alakra.

$24\,(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 24\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12 + 12\sqrt{3}i$

Így az egyenlet a következő alakot ölti.

$(1 - 2\sqrt{3}i)z^3 - 8 = (12 + 12\sqrt{3}i)$

Ezután már elvégezhető az összeadás.

$(1 - 2\sqrt{3}i)z^3 = (12 + 12\sqrt{3}i) + 8 = 20 + 12\sqrt{3}i$

Következő lépésként osztani kell $1 - 2\sqrt{3}i$-vel az egyenlet mindkét oldalát. Ezt a műveletet rögtön végre is tudjuk hajtani, hiszen a jobb oldal is, és az osztó is algebrai alakban van.

$z^3 = \frac{20 + 12\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i} = \frac{(20 + 12\sqrt{3}i)(1 + 2\sqrt{3}i)}{(1 - 2\sqrt{3}i)(1 + 2\sqrt{3}i)} =$

$= \frac{20 + 40\sqrt{3}i + 12\sqrt{3}i + 72i^2}{1^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{20 + 40\sqrt{3}i + 12\sqrt{3}i - 72}{13} =$

$= \frac{-52 + 52\sqrt{3}i}{13} = -4 + 4\sqrt{3}i$

Az ismeretlen meghatározásához még köbgyököt kell vonnunk. Mivel a jobb oldal algebrai alakban van, ezért először ott át kell térnünk trigonometrikus alakra.

$r = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{64} = 8$

$\operatorname{tg}\delta = \left|\frac{4\sqrt{3}}{-4}\right| = \sqrt{3}$

Ebből visszakeresve $\delta = 60^\circ$.

Nem készítünk már ábrát a komplex számról, mert egyszerűen a valós és képzetes rész előjeléből látható, hogy ez a szám a második síknegyedbe esik. Itt a $\varphi = 180^\circ - \delta$ összefüggés teljesül. Jelen esetben $\varphi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ezek alapján a jobb oldal trigonometrikus alakja a következő:

$-4 + 4\sqrt{3}i = 8(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$.

Ezután már tudunk harmadik gyököt vonni, s ezzel megkapjuk az egyenlet megoldásait.

$z = \sqrt[3]{8(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)} =$

$\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{120^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + i\sin\frac{120^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right)$, ahol $k = 0, 1, 2$.

Írjuk fel külön a három megoldást.

$z_1 = 2(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$

$z_2 = 2(\cos 160^\circ + i\sin 160^\circ)$

$z_3 = 2(\cos 280^\circ + i\sin 280^\circ)$

5. **Feladat:** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$\frac{z^5}{\sqrt{2}i} + 24 - 8i = (1 - i)^7$$

Megoldás: Az egyenletben csak egyetlen helyen fordul elő az ismeretlen, így egyszerűen csak rendezéssel ki kell fejeznünk. Első lépésként a jobb oldalon el kell végeznünk a hatványozást. A kitevő nagy, így algebrai alakban ez sok szorzást jelentene. Célszerűbb az $(1 - i)$-t átírni trigonometrikus alakra.

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \left| \frac{-1}{1} \right| = 1$$

Ebből visszakeresve $\delta = 45°$.

A valós és képzetes rész előjeléből látható, hogy ez a szám a negyedik síknegyedbe esik. Itt a $\varphi = 360° - \delta$ összefüggés teljesül. Jelen esetben $\varphi = 360° - 45° = 315°$.

Ezek alapján $1 - i$ trigonometrikus alakja a következő:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i \sin 315°).$$

Végezzük el ezután a hatványozást.

$$(1 - i)^7 = (\sqrt{2})^7(\cos(7 \cdot 315°) + i \sin(7 \cdot 315°)) =$$
$$= 8\sqrt{2}(\cos 2205° + i \sin 2205°)$$

Módosítanunk kell az argumentumon, mert nem esik a $[0°, 360°)$ intervallumba. Jelen eseteben $6 \cdot 360° = 2160°$-ot kell kivonnunk, s így $2205° - 2160° = 45°$-ot kapunk. Eszerint a hatvány trigonometrikus alakja az alábbi.

$$(1 - i)^7 = 8\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$$

A következő lépésben mindkét oldalból ki kell vonnunk $(24 - 8i)$-t. Ez azonban csak algebrai alakban végezhető el, ezért a jobb oldalt át kell írnunk algebrai alakra.

$$8\sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8 + 8i$$

Az egyenlet így a következő alakot ölti.

$$\frac{z^5}{\sqrt{2}i} + 24 - 8i = 8 + 8i$$

Immáron elvégezhető a kivonás.

$$\frac{z^5}{\sqrt{2}i} = -16 + 16i$$

Ezután szorozzuk mindkét oldalt $\sqrt{2}i$-vel.

$z^5 = (-16+16i)\sqrt{2}i = -16\sqrt{2}i + 16\sqrt{2}i^2 = -16\sqrt{2}i - 16\sqrt{2} =$

$z^5 = -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i$

Utolsó lépésként mindkét oldalból ötödik gyököt kell vonnunk. Ehhez a jobb oldalon át kell térnünk trigonometrikus alakra.

$r = \sqrt{(-16\sqrt{2})^2 + (-16\sqrt{2})^2} = \sqrt{1024} = 32$

$\operatorname{tg}\delta = \left|\frac{-16\sqrt{2}}{-16\sqrt{2}}\right| = 1$

Ebből visszakeresve $\delta = 45°$.

A valós és képzetes rész előjeléből látható, hogy ez a szám a harmadik síknegyedbe esik. Itt a $\varphi = 180° + \delta$ összefüggés teljesül. Jelen esetben $\varphi = 180° + 45° = 225°$.

Ezek alapján $-16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i$ trigonometrikus alakja a következő:

$-16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}i = 32(\cos 225° + i\sin 225°)$.

Végezzük el a gyökvonást.

$z = \sqrt[5]{32(\cos 225° + i\sin 225°)} =$

$= \sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{225° + k\cdot 360°}{5} + i\sin\frac{225° + k\cdot 360°}{5}\right)$, ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Írjuk fel külön az öt megoldást. A megoldások argumentuma most $\frac{360°}{5} = 72°$-onként növekszik.

$z_1 = 2(\cos 45° + i\sin 45°)$

$z_2 = 2(\cos 117° + i\sin 117°)$

$z_3 = 2(\cos 189° + i\sin 189°)$

$z_4 = 2(\cos 261° + i\sin 261°)$

$z_5 = 2(\cos 333° + i\sin 333°)$