

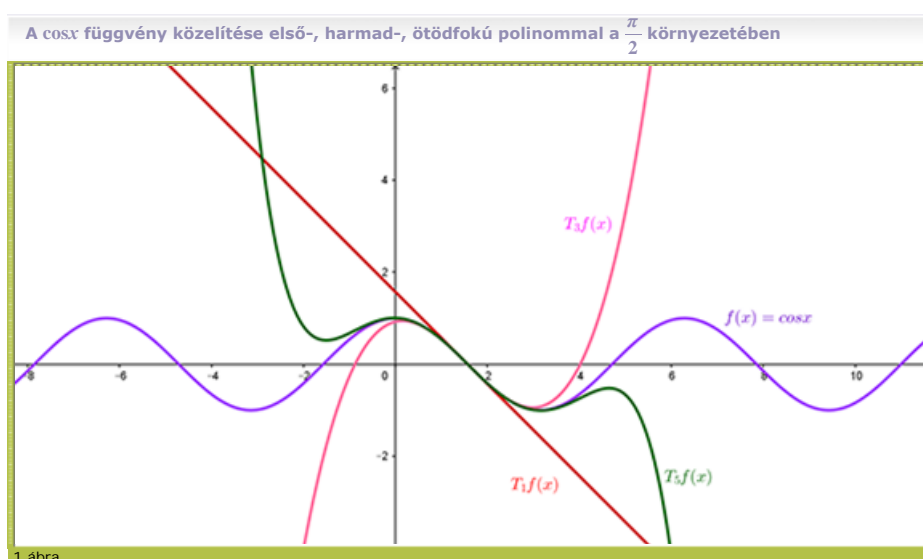
Tanulási cél: Megismerni a Taylor- és Maclaurin polinom fogalmát, és ezek alkalmazását közelítő értékek kiszámolására, valamint egy újabb, hatékony határértékszámítási módszer, a L'Hospital-szabály megismerése, és alkalmazásának elsajátítása egyszerűbb esetekben.

Elméleti összefoglaló

Sokszor találkozunk a gyakorlatban olyan bonyolult függvényekkel, melyekkel a számolás nehézkes. Ilyenkor érdemes a bonyolult függvényt egyszerűbbel közelíteni, amely valamilyen értelemben jól közelíti az eredetit. Célszerűnek tűnik a hatványfüggvényekkel való közelítés, mivel azokkal könnyű dolgozni.

Egy függvény lineáris közelítésére egy adott pont környezetében már láttunk példát egy függvény adott pontjába húzott érintő egyenesre kapcsán.

A lineáris közelítésnél (érintő egyenesnél) jobb közelítést nyerhetünk egy adott pont környezetében magasabbfokú polinomokkal. Erre mutat példát a következő ábra, melyen a $\cos x$ függvényt közelítettük első-, harmad-, ötödfokú polinommal a $\frac{\pi}{2}$ környezetében.



Definíció: Legyen az f olyan függvény, mely értelmezett az $a \in \mathbb{R}$ rögzített hely egy környezetében, s ott n -szer folytonosan differenciálható. Ekkor a

$$T_n f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$$

polinomot az f függvény a helyen vett n -edfokú **Taylor-polinomjának** nevezzük.

(A nulladik derivált magát a függvényt jelenti, azaz $f^{(0)}(a) = f(a)$, és $0! = 1$.)

Észrevehetjük, hogy az elsőfokú Taylor-polinom pontosan az f függvény a helyen vett érintő egyenesének egyenletét adja: $T_1 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$. (Az érintő egyenes egyenletét lásd Matematika 1. tárgy Differenciálszámítás bevezetése című leckében.)

A Taylor-polinom közelíti az eredeti függvényt. Minél közelebb van x az a -hoz, és minél magasabb a polinom rendje, a közelítés általában annál jobb.

Ha $a = 0$, azaz a függvényt $a = 0$ környezetében közelítjük, akkor **Maclaurin-polinomról** beszélünk.

$$\begin{aligned} M_n f(x) &= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot (x-0) + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot (x-0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot (x-0)^n = \\ &= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n \end{aligned}$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Írjuk fel az $f(x) = e^{-2x}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: A megoldásban induljunk el a Maclaurin-polinom definíciójából, miszerint egy függvény n -edfokú Maclaurin-polinomjának nevezzük, a 0 helyen vett n -edfokú Taylor-polinomot, mely az alábbi módon írható fel.

$$M_n f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot x^n$$

Mivel feladatunkban másodfokú polinomot kell felírunk, így $n = 2$, s így a polinomban csupán három tag fog szerepelni.

$$M_2 f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!} f''(0) \cdot x^2$$

Természetesen a konkrét Maclaurin-polinom felírásához meg kell határoznunk a képletben szereplő $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

Elsőként helyettesítsük a függvénybe a 0-t.

$$f(0) = e^{-2 \cdot 0} = e^0 = 1$$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját, és határozzuk meg a derivált helyettesítési értékét is a 0 helyen.

$$f'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}$$

A deriválás során ne feledkezzünk el arról, hogy összetett függvényt deriválunk, így a külső függvény deriválása után szoroznunk kell még a belső függvény deriváltjával is.

Hajtsuk végre a 0 behelyettesítést.

$$f'(0) = -2e^{-2 \cdot 0} = -2e^0 = -2$$

Állítsuk elő a második deriváltat.

$$f''(x) = -2e^{-2x} \cdot (-2) = 4e^{-2x}$$

Helyettesítsük ebbe is a 0-t.

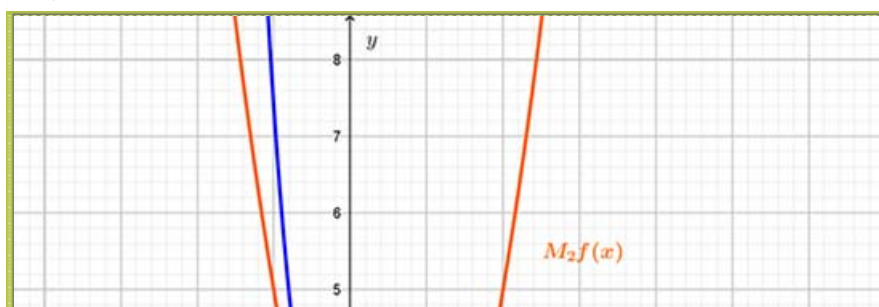
$$f''(0) = 4e^{-2 \cdot 0} = 4e^0 = 4$$

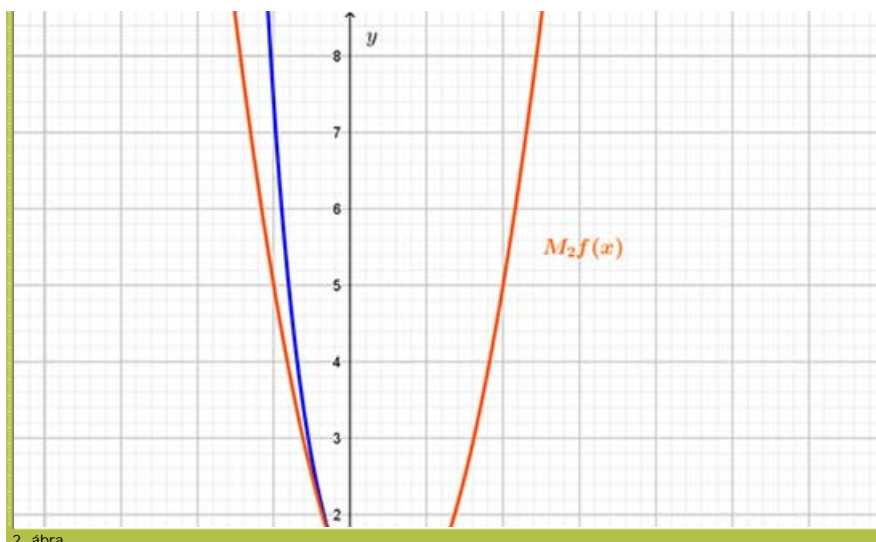
Utolsó lépésként helyettesítsük be a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után határozzuk meg a faktoriálisok értékét, és egy-egy tagban szorozva a konstansokat, hozzuk egyszerűbb alakra a polinomot.

$$\begin{aligned} M_2 f(x) &= 1 + \frac{1}{1!} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 4 \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1} \cdot (-2) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x^2 = \\ &= 1 - 2x + 2x^2 \end{aligned}$$

Az alábbi ábra jól szemlélteti, hogy milyen módon közelíti az eredeti függvényt a számolt másodfokú Maclaurin polinom.

Az $f(x) = e^{-2x}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinommal való közelítése





2. ábra

2. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: Itt is elindulhatunk a másodfokú Maclaurin-polinom definíciójából.

$$M_2f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2$$

Most is elő kell állítanunk az $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket.

Helyettesítsük be elsőként a függvénybe a 0-t.

$$f(0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$$

Ezután állítsuk elő a függvény deriváltját. A deriválás előtt célszerű átalakítani a függvényt. A gyök helyett írjunk törtkitevős hatványt.

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{3}}$$

Ebből az alakból már egyszerű a deriválás.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$$

Helyettesítsük be a deriváltba a 0-t.

$$f'(0) = \frac{1}{3}(0+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Állítsuk elő a második deriváltat is.

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(x+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}}$$

Határozzuk meg a második derivált 0 helyen vett helyettesítési értékét.

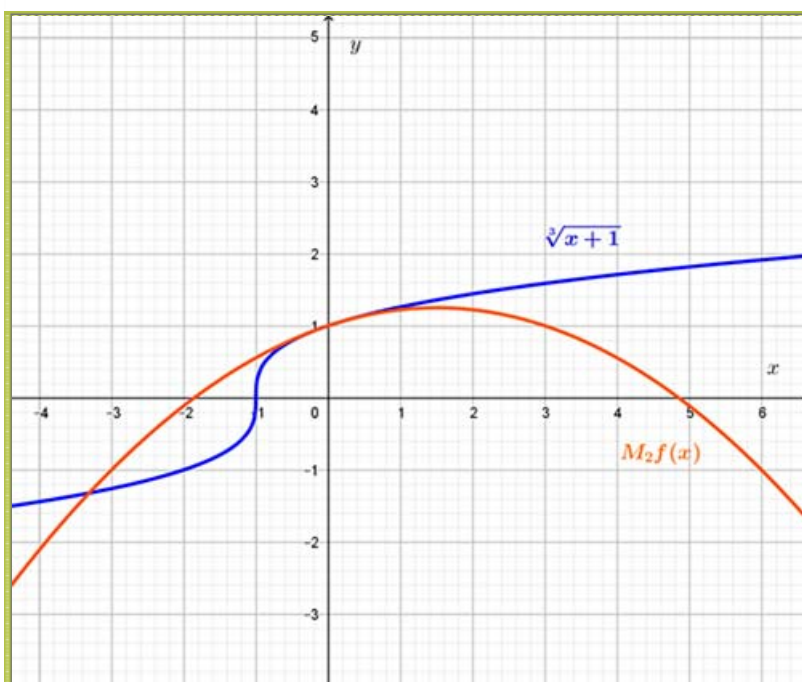
$$f''(0) = -\frac{2}{9}(0+1)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}$$

Végül a meghatározott $f(0)$, $f'(0)$ és $f''(0)$ értékeket helyettesítsük be a másodfokú Maclaurin-polinom képletébe. A behelyettesítés után hozzuk egyszerűbb alakra a polinomban az együtthatókat.

$$\begin{aligned} M_2f(x) &= 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot x^2 = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot x^2 = \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 \end{aligned}$$

A másodfokú Maclaurin polinommal való közelítést szemlélteti a következő ábra.

Az $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ függvény másodfokú Maclaurin-polinommal való közelítése



3. ábra

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás: Induljunk ki a Maclaurin-polinom definíciójából.

$$M_3f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0) \cdot x^3$$

Állítsuk elő a szükséges deriváltakat, és határozzuk meg a függvény, valamint a deriváltak értékét a nulla helyen. A deriválások egyszerűbbek ha a függvényt átalakítjuk, mert akkor tört helyett összetett függvényünk lesz.

$$f(x) = \frac{1}{3-2x} = (3-2x)^{-1} \Rightarrow f(0) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = (-1) \cdot (3-2x)^{-2} \cdot (-2) = 2 \cdot (3-2x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 3^{-2} = \frac{2}{9}$$

$$f''(x) = (-4) \cdot (3-2x)^{-3} \cdot (-2) = 8 \cdot (3-2x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 8 \cdot 3^{-3} = \frac{8}{27}$$

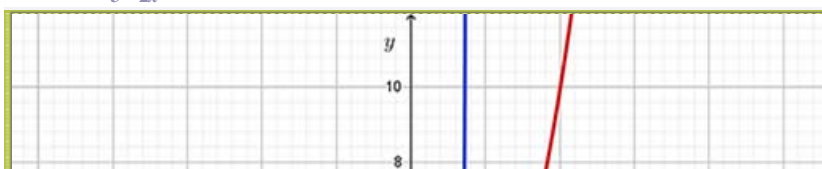
$$f'''(x) = (-24) \cdot (3-2x)^{-4} \cdot (-2) = 48 \cdot (3-2x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 48 \cdot 3^{-4} = \frac{48}{81}$$

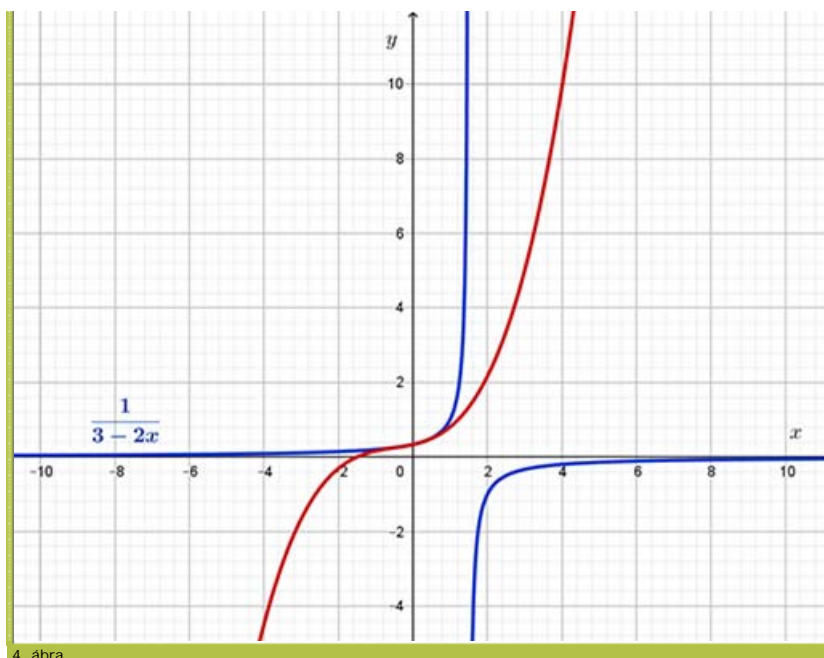
A kapott értékeket helyettesítsük be a polinomba.

$$M_3f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{2}{9}x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{8}{27}x^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{48}{81}x^3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}x + \frac{4}{27}x^2 + \frac{8}{81}x^3$$

A közelítést a következő ábra szemlélteti.

Az $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinommal való közelítése





4. ábra

4. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \sin 2x$ függvény $a = \frac{\pi}{4}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: A definícióból indulunk el, mely szerint az $f(x)$ függvény a helyen vett n -edfokú Taylor-polinomja a következő:

$$T_n f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n.$$

Mivel másodfokú polinom a kérdés, így $n = 2$.

$$T_2 f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (x-a)^2$$

Annyiban változik tehát csak a dolgunk az előzőekhez képest, hogy nem a 0 helyen kell meghatározunk a függvény, valamint első és második deriváltjának értékét, hanem az $a = \frac{\pi}{4}$ helyen.

Helyettesítsünk először a függvénybe.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Állítsuk elő a függvény deriváltját. Figyeljünk oda, mert összetett függvényről van szó, ne felejtünk el szorozni a belső függvény deriváltjával.

$$f'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$$

Helyettesítsünk most a deriváltba is.

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Ezután deriváljunk még egyszer.

$$f''(x) = 2(-\sin 2x) \cdot 2 = -4 \sin 2x$$

A második deriváltba is helyettesítsük be az $a = \frac{\pi}{4}$ értéket.

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin \frac{\pi}{2} = -4$$

Az előzőekben meghatározott $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket írjuk be a Taylor-polinom képletébe, s egyben helyettesítsünk a helyére is.

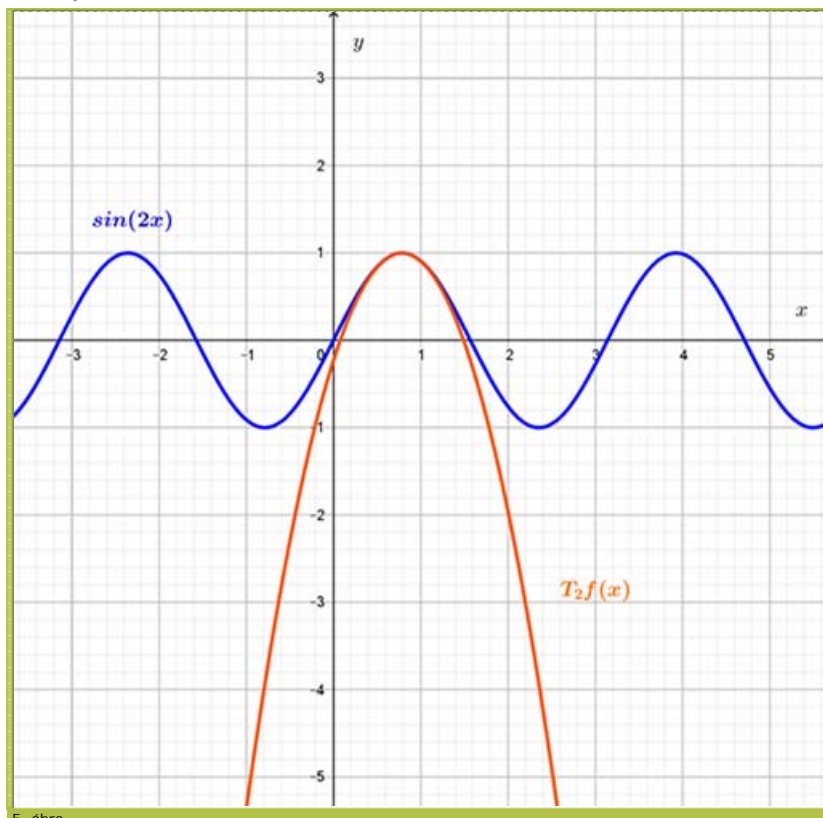
$$T_2f(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2!} \cdot (-4) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

Végül hozzuk egyszerűbb alakra a polinom együtthatóit.

$$T_2f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-4) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

A szemléltetést a következő ábra segíti.

Az $f(x) = \sin 2x$ függvény másodfokú Taylor-polinommal való közelítése az $a = \frac{\pi}{4}$ környezetében



5. ábra

5. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \ln 3x$ függvény $a = \frac{1}{3}$ helyen vett másodfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: Most is a másodfokú Taylor-polinom definícióját használjuk fel.

$$T_2f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2!}f''(a) \cdot (x - a)^2$$

Határozzuk meg a polinomban szereplő, egyelőre ismeretlen $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ értékeket.

Helyettesítsük elsőként a függvénybe az $a = \frac{1}{3}$ -ot.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = \ln 1 = 0$$

Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$$

Helyettesítsünk be a deriváltba is a helyére $\frac{1}{3}$ -ot.

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Állítsuk elő a második deriváltat.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Helyettesítsük a második deriváltba is az $a = \frac{1}{3}$ -ot.

$$f''(x) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -9$$

Majd a Taylor-polinom képletében helyettesítsünk a , $f(a)$, $f'(a)$ és $f''(a)$ helyére.

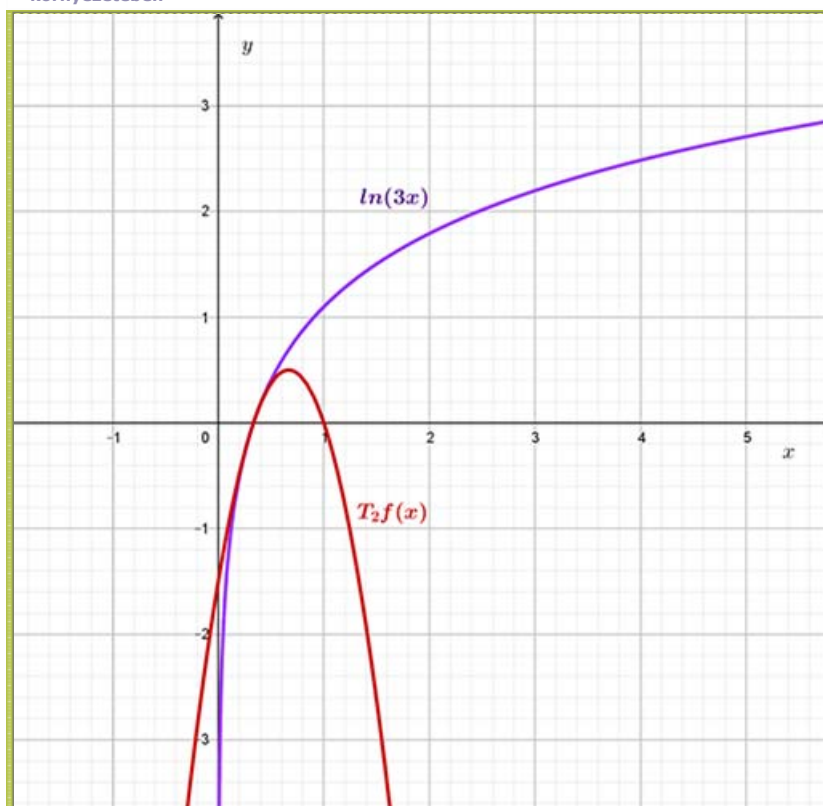
$$T_2f(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2!} \cdot (-9) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Végül írjuk egyszerűbb alakban a polinom együtthatóit.

$$T_2f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$$

Jelen esetben a Taylor-polinommal való közelítést a következő ábra szemlélteti.

Az $f(x) = \ln 3x$ függvény másodfokú Taylor-polinommal való közelítése az $a = \frac{1}{3}$ környezetében



6. ábra

6. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 20$ függvény $a = 3$ hely körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

Megoldás: Induljunk ki a Taylor-polinom definíciójából, eszerint

$$T_3f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!}f''(a) \cdot (x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a) \cdot (x-a)^3$$

Ebben a sorban kell most a helyére 3-at helyettesítenünk.

$$T_3f(x) = f(3) + \frac{1}{1!}f'(3) \cdot (x-3) + \frac{1}{2!}f''(3) \cdot (x-3)^2 + \frac{1}{3!}f'''(3) \cdot (x-3)^3$$

Ehhez először az $f(3)$, $f'(3)$, $f''(3)$, $f'''(3)$ értékeket kell meghatározunk és behelyettesítenünk.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 20 \Rightarrow f(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 + 20 = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 1 \Rightarrow f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 1 = -2$$

$$f''(x) = 6x - 10 \Rightarrow f''(3) = 6 \cdot 3 - 10 = 8$$

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(3) = 6$$

Tehát

$$T_3f(x) = 5 + \frac{1}{1!}(-2)(x-3) + \frac{1}{2!}8(x-3)^2 + \frac{1}{3!}6(x-3)^3 = 5 - 2(x-3) + 4(x-3)^2 + (x-3)^3$$

Ha elvégeznénk a hatványozásokat és összevonnánk az azonos fokszámú tagokat, természetesen visszakapnánk az eredeti polinomot, ezzel tudnánk ellenőrizni a megoldást.

7. feladat: Melyik az a harmadfokú polinom, melyre a következők igazak: $p(0) = 3$, $p''(0) = -1$, $p'''(0) = -6$, $p''''(0) = 12$?

Megoldás: Mivel a függvény és deriváltjainak értéke a nulla helyen adott és a polinom harmadfokú, ezért a harmadfokú Maclaurin-polinom felírásából indulunk ki.

$$p(x) = p(0) + \frac{1}{1!}p'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}p''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{3!}p'''(0) \cdot x^3.$$

Nincs más dolgunk, mint a függvény és a derivált megadott értékeit behelyettesíteni.

$$p(x) = 3 + \frac{1}{1!}(-1)x + \frac{1}{2!}(-6)x^2 + \frac{1}{3!}12x^3 = 3 - x - 3x^2 + 2x^3$$

Ha a tagokat a szokott sorrendben írjuk, akkor $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3$.

8. feladat: Hogyan határozhatjuk meg $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ közelítő értékét, ha csak négy alapműveletes számológépünk van?

Megoldás: Mivel $\frac{1}{\sqrt[10]{e}} = e^{-0.1}$, ezért a feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adjuk meg közelítőleg az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = -0.1$ helyen vett helyettesítési értékét. Mivel a -0.1 "közel van" a nullához, ezért az $f(x)$ függvény egy tetszőleges fokszámú Maclaurin-polinomjának segítségével határozhatjuk meg a közelítő értéket. Vegyük ezen függvény másodfokú Maclaurin-polinomját, melybe majd x helyére a megadott x_0 értéket kell behelyettesítenünk.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$$

Ebből

$$M_2f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2$$

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 = 1 - 0.1 + 0.005 = 0.905.$$

Minél minél magasabbfokú polinomot veszünk figyelembe, a közelítő érték annál pontosabb lesz.

Ha például a harmadfokú Maclaurin-polinomba helyettesítünk, akkor

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 + \frac{1}{3!}(-0.1)^3 = 1 - 0.1 + 0.005 - 0.00016 = 0.9049$$

Ha a negyedfokú polinomba, akkor

$$e^{-0.1} \approx 1 + \frac{1}{1!}(-0.1) + \frac{1}{2!}(-0.1)^2 + \frac{1}{3!}(-0.1)^3 + \frac{1}{4!}(-0.1)^4 =$$

$$= 1 - 0.1 + 0.005 - 0.00016 + 0.0000041\bar{6} = 0.9048375.$$

Ha nem csak négy alpműveletes számológépünk van, akkor egy lépésben kaphatunk közelítő értéket, s így $e^{-0.1} \approx 0.904837418$. Amint látható a negyedfokú polinomból kapott érték már 6 tizedesjegyre pontos. Ha ennél is pontosabb értékre van szükség, további tagokat figyelembe véve tetszőleges pontosság érhető el.

9. feladat: Adjunk közelítést $\cos 0.1$ -re, ha csak négy alpműveletes számológépünk van.

Megoldás: A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy adjuk meg közelítőleg az $f(x) = \cos x$ függvény $x_0 = 0.1$ helyen vett helyettesítési értékét. Mivel a 0.1 "közel van" a nullához, ezért az $f(x)$ függvény egy tetszőleges fokszámú Maclaurin-polinomjának segítségével határozhatjuk meg a közelítő értéket.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$$

Ebből

$$M_2 f(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\cos 0.1 \approx 1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.99500$$

Ha nem csak négy alpműveletes számológépünk van, akkor egy lépésben kaphatunk közelítő értéket, s így $\cos 0.1 \approx 0.995004$. Amint látható a másodfokú polinomból kapott érték már 5 tizedesjegyre pontos.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Melyik az $f(x) = \frac{1}{5-2x}$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomja?

☒ $\frac{1}{5} + \frac{2}{25}x + \frac{4}{125}x^2 + \frac{8}{625}x^3$

☐ $\frac{1}{5} - \frac{2}{25}x + \frac{4}{125}x^2 - \frac{8}{625}x^3$

☐ $\frac{1}{5} + \frac{2}{25}x + \frac{4}{125}x^2 + \frac{16}{625}x^3$


☐ $\frac{1}{5} - \frac{2}{25}x + \frac{4}{125}x^2 - \frac{16}{625}x^3$

mehet

 **2. kérdés: Melyik az $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja?**


- ☐ $1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4$
- ☐ $-1 + 2x^2 - \frac{1}{3}x^4$
- ☐ $1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$
- ☒ $-1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4$

mehet

 **3. kérdés: Az alábbiak közül melyik az $f(x) = \cos^2 x$ negyedfokú Maclaurin-polinomja?**


- ☐ $1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4$
- ☐ $1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4$
- ☐ $1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4$
- ☒ $1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$

mehet

 **4. kérdés: Az alábbi függvények közül melyik az $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 2$ függvény $a = 2$ hely körüli harmadfokú Taylor-polinomja?**


- ☐ $f(x) = 4 - (x - 2) + 3(x - 2)^2 + 2(x - 2)^3$
- ☒ $f(x) = 4 - 3(x - 2) + (x - 2)^2 + 2(x - 2)^3$
- ☐ $f(x) = 2 - 3(x - 2) + 4(x - 2)^2 + 2(x - 2)^3$
- ☐ $f(x) = 2 - 4(x - 2) + 3(x - 2)^2 + 2(x - 2)^3$

mehet

 **5. kérdés: Melyik az a harmadfokú $p(x)$ polinom, melyre a következők igazak: $p(0) = 5$, $p'(0) = -3$, $p''(0) = 4$, $p'''(0) = 18$?**

- ☐ $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x + 18$
- ☐ $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 3$
- ☐ $p(x) = 18x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
- ☒ $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5$

mehet

 **6. kérdés: Ha \sqrt{e} közelítő értékét az $f(x) = e^x$ függvény harmadfokú Maclaurin-polinomjából számoljuk, akkor mit kapunk?**

☐ 1.64436

☒ 1.64583

☐ 1.64653

☐ 1.64816

mehet

7. kérdés: Ha $\sin 0.1$ értékét az $f(x) = \sin x$ harmadfokú Maclaurin-polinomjából számoljuk, akkor mit kapunk?

☐ 0.10016

☒ 0.09983

☐ 0.0017453283

☐ -0.10016

mehet

Elméleti összefoglaló

Korábban foglalkoztunk már határértékszámítási feladatokkal. Gyakran találkozhatunk olyan határértékszámítási problémákkal, melyek nem oldhatóak meg a korábban tanult módszerekkel, így például a $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékek, valamint az ezekre visszavezethetők. Ezen típusok meghatározására ad hatékonyt módszert a L'Hospital-szabály.

Tegyük fel, hogy a

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ határérték } \frac{\infty}{\infty} \text{ vagy } \frac{0}{0} \text{ típusú,}$$

és c egy környezetében, esetleg c -től eltekintve, f is és g is differenciálható, továbbá $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$.

Ha a $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik és véges, akkor az is teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A c jelölhet egy véges értéket, valamint mindkét végtelent is.

A tétel rövid és pontatlan megfogalmazása: a tört limesze a deriváltak hányadosának a limeszével egyenlő.

Fontos, hogy csak határozatlan alakú határértékek kiszámolására próbáljuk a tételt alkalmazni, különben hibás eredményt ad.

Előfordulhat olyan eset, amikor a szabály egyszeri alkalmazása nem elegendő, mert a deriváltak hányadosa újra határozatlan alakot ad. Ekkor (ha a feltételek teljesülnek) újra alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt. Ilyenkor az újabb deriválás előtt célszerű a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezni.

A feladatmegoldások során először mindig megvizsgáljuk, hogy milyen típusú határértékről van szó.

A $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határozatlan esetekben közvetlenül alkalmazható a L'Hospital-szabály. Ezen túlmenően foglalkozunk " $0 \cdot \infty$ " típusú határértékekkel, melyekre bizonyos átalakítások után a szabály alkalmazható.

Ha az $f(x) \cdot g(x)$ szorzat, (a szóbanforgó helyen) " $0 \cdot \infty$ " típusú, akkor az

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

vagy az

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

formulák valamelyikét felhasználva, a kérdéses határérték átalakítható $\frac{\infty}{\infty}$, vagy $\frac{0}{0}$ típusúvá, aztán alkalmazható a L'Hospital-szabály.

Gyakran a kétféle átírási lehetőség közül csak az egyik használható. Azzal érdemes először próbálkozni, amelyik a deriválás szempontjából egyszerűbbnek tűnik.

Kidolgozott feladatok

10. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$ határértéket.

Megoldás: Most egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékkal van dolgunk, így a L'Hospital-szabályt közvetlenül tudjuk alkalmazni. Ennek érdekében külön deriváljuk a számlálót és külön deriváljuk a nevezőt, s ennek a hányadosnak vesszük az eredeti helyen vett határértékét. Ez most

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x})'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}.$$

Ebben a formájában ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, látszólag nem jutottunk előre. De az utóbbi határérték átalakítható (megszüntetjük az emeletes törtet), és ezután könnyen kiszámolható a határérték:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty.$$

A deriváltak hányadosának plusz végtelen a limesze, így tételünk értelmében ennyi az eredeti limesz is, azaz

11. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$ határértéket.

Megoldás: Egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértéket kell kiszámolni. Tekintjük a deriváltak hányadosának a határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{2x})'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x}.$$

Ez is egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték. Kiszámolásához a L'Hospital-szabályt újra alkalmazzuk.

A deriváltak hányadosának határértéke most

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{2x})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (2e^{2x}) = \infty.$$

A tételünk értelmében ekkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x} = \infty$$

is teljesül, majd még egyszer alkalmazva a tételt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \infty$$

is fennáll. Tehát ebben az esetben kétszer alkalmaztuk egymás után a L'Hospital-szabályt.

12. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + e^x}$ határértéket.

Megoldás: A limesz $\frac{\infty}{\infty}$ típusú. Tekintjük a deriváltak hányadosának limeszét:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3)'}{(x^2 + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2x + e^x}.$$

Ez még mindig $\frac{\infty}{\infty}$ típusú. Nézzük tehát a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2)'}{(2x + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2 + e^x}$$

határértéket, de ez még mindig $\frac{\infty}{\infty}$ típusú. Végül, még egyszer képezve a deriváltak hányadosának határértékét, kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x)'}{(2 + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0,$$

ezért sorban minden limesz nullával egyenlő, így az eredeti is, azaz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + e^x} = 0.$$

Tehát ebben az esetben háromszor alkalmaztuk egymás után a L'Hospital-szabályt.

13. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Tehát tekintjük a deriváltak hányadosának limeszét, ami

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

Ennyi tehát az eredeti limesz is:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1.$$

14. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{1 - e^{2x}}$ határértéket.

Megoldás A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Vesszük a deriváltak hányadosának limeszét:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(xe^x)'}{(1 - e^{2x})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x}{-2e^{2x}} = \frac{1+0}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Tehát az eredeti határértékre is fennáll, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{1 - e^{2x}} = -\frac{1}{2}.$$

15. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 3x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. Most a deriváltak hányadosának limesze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x \cdot \cos x}{3\sin 3x},$$

ami a 0-t való behelyettesítést követően újra $\frac{0}{0}$ típusú. Ebből kapjuk a deriváltak hányadosát képezve a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{9\cos 3x} = \frac{2-0}{9} = \frac{2}{9}$$

eredményt, s így ennyi az eredeti limesz is,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 3x} = \frac{2}{9}.$$

Akár eszünkbe juthatott volna az első deriválás után egy trigonometrikus azonosság is, mely alapján

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x \cos x}{3\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3\sin 3x}.$$

Ez persze így is egy $\frac{0}{0}$ típusú limesz, de ha most vesszük a deriváltak hányadosának limeszét, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos 2x}{9\cos 3x} = \frac{2}{9},$$

és ismét hivatkozhatunk arra, hogy a tételünk alapján az eredeti határérték is ennyi. Ezen az úton a deriválás némileg egyszerűbb volt.

Az ilyenféle átalakítások gyakran jelentős egyszerűsödést tudnak eredményezni.

16. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x}$ határértéket.

Megoldás: A 0-t behelyettesítve kapjuk, hogy a határérték $\frac{0}{0}$ típusú. A deriváltak hányadosának limesze így:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x - 1} = \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 0}}{\cos 0 - 1}.$$

Ez továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú, de átalakítható a következő módon:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x (\cos x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + 1)(\cos x - 1)}{\cos^2 x (\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x} = \frac{1 + 1}{1} = 2.$$

A tétel alapján az eredeti limesz is ennyi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{\sin x - x} = 2.$$

Ha a fenti átalakítási lehetőséget nem vesszük észre, akkor ismét a L'Hospital-szabály alkalmazásával próbálkozhatnánk, ekkor azt kapnánk, hogy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right)''}{(\cos x - 1)''} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos^3 x} = 2.$$

Most tehát így is célhoz értünk. Néha azonban az egyszerűsítések elvégzése nélkül nem számítható ki a limesz.

17. feladat: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = ?$

Megoldás: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = \frac{\ln(1 + 0)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$

Tehát újra egy $\frac{0}{0}$ típusú limesszel van dolgunk. Most a deriváltak hányadosának limesze:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{e}{x}} \left(-\frac{e}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right) \left(-\frac{3}{x^2}\right)}.$$

Ez továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú. Vegyük észre azonban, hogy a problémát okozó $-\frac{1}{x^2}$ tényezővel egyszerűsíthetünk. Ekkor kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{e}{x}} \left(-\frac{e}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right) \left(-\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{e}{x}} (e)}{\cos\left(\frac{3}{x}\right) (3)} = \frac{e}{3}.$$

Persze az eredeti limesz is ezzel egyenlő:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{x}\right)} = \frac{e}{3}.$$

Ha most a deriváltak hányadosában nem egyszerűsítünk a $-\frac{1}{x^2}$ tényezővel, hanem ismét tekintenénk a deriváltak hányadosának limeszét, akkor az továbbra is $\frac{0}{0}$ típusú maradna, és ez történne akárhányszor vennénk, az egyébként egyre bonyolultabb deriváltak hányadosának limeszét. Ezért, ha lehet, akkor mindig egyszerűsítsünk!

18. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-2x})$ határértéket.

Megoldás: Ez a határérték egy $0 \cdot \infty$ típusú szorzat. A negatív kitevőjű hatvány miatt kínálkozik a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-2x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}}$$

tört alakú átfírás.

Így egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú tört határértékének a kiszámítására vezettük vissza a feladatot, melyre már alkalmazható a L'Hospital szabály. Véve a deriváltak hányadosának határértékét, arra jutunk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0.$$

Tehát az eredeti limesz is ennyi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (xe^{-2x}) = 0.$$

19. feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x)$ határértéket.

Megoldás: A feladat egyoldali határértékszámítással kapcsolatos ismeretekre épül (lásd Matematika 1. tárgy 8. Határérték című lecke).

Az egyoldali határértékeket megvizsgálva kapjuk, hogy a szorzatunk limesze $0 \cdot \infty$ típusú. Mivel $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$ elemi alapfüggvény, a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

átírást választjuk.

Így egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték kiszámítása a feladatunk, melyre alkalmazható a L'Hospital szabály. Tekintsük a deriváltak hányadosának határértékét:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin^2 x}{x} \right).$$

Ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték. Alkalmazhatjuk ismét a L'Hospital-szabályt, és egy lépésben célhoz jutunk, de talán még egyszerűbb, ha felhasználjuk a nevezetes $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket. Ekkor

Ezzel egyenlő az eredeti limesz is:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x \cdot \ln x) = 0.$$

Ellenőrző kérdések



8. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} =$

☐ 1.

☐ ∞ .

☒ 0.

☐ $\frac{1}{2}$.

megyet



9. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}} =$



0.



6.

 ∞ . $\frac{3}{2}$.

mehet



10. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x^2} =$

 ∞ .

0.

 $\frac{1}{2}$.

1.

mehet



11. kérdés: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$



0.

 $-\frac{1}{2}$.

-1.

 $\frac{1}{2}$.

mehet



12. kérdés: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2x}}{x^2 + 3x} =$



0.

 $\frac{2}{3}$. $-\frac{2}{3}$.

1.5.

mehet



13. kérdés: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(5x - 4)}{\ln(3 - 2x)} =$

☒ $-\frac{5}{2}$.

☐ $\frac{5}{2}$.

☐ 1.

☐ -1.

mehet

 14. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 e^{-x}) =$

☐ ∞ .

☐ 1.

☒ 0.

☐ 2.

mehet

 15. kérdés: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right) =$

☐ 0.

☐ $-\pi$.

☐ ∞ .

☒ π .

mehet