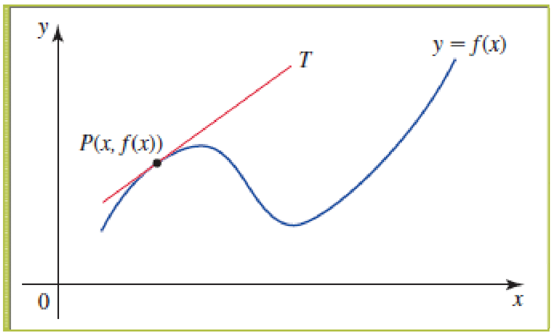
Tanulási cél: megismerni a differenciálhatóság fogalmát, begyakorolni az érintő $f(x)$ felírást és a linearizált használatát. Megismerkedni a deriválási szabályokkal és begyakorolni használatukat a derivált függvény meghatározására.

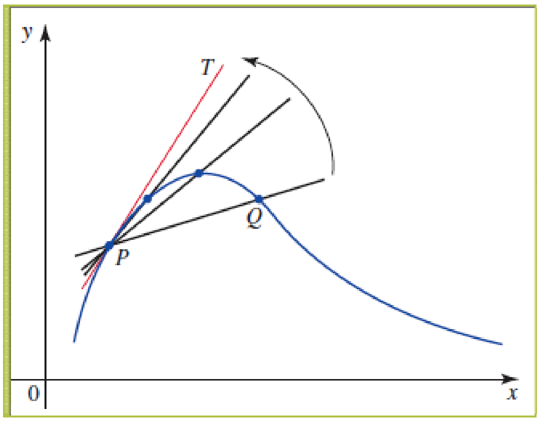
Elméleti összefoglaló

Azt szokták mondani, hogy semmi sem állandó csak a változás. Valóban, a minket körülvevő világban minden folyamatosan átalakul, minden sok minden mással kapcsolatban van, azoktól függ. Ezeknek a viszonyoknak a felderítése a természettudományok fő feladata. A különféle függések egyik matematikai modellje a **függvény** fogalma. A változások sok jellemzője közül az egyik nagyon fontos a változás "sebessége". A gyorsan változó folyamatok veszélyt hordozhatnak magukban azáltal, hogy nem adnak időt a reagálásra. A változások gyorsaságát a matematika a **derivált** fogalmával ragadja meg.

Az analízis fejlődése, amint az gyakran máskor is előfordult, szorosan kötődött problémák megoldásához. A mi esetünkben az egyik ilyen probléma az **érintő** meghatározása volt.

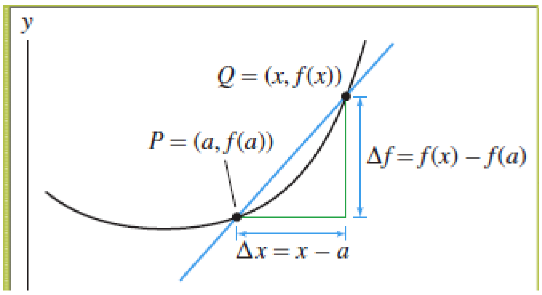


A fenti ábrán egy függvény grafikonját és annak a $P(x, f(x))$ pontban megrajzolt "érintőjét" látjuk. Érezzük, hogy az $f(x)$ függvény megadása és a P pont lerögzítése meghatározza az ábrán pirossal jelölt egyenest. Ennek az egyenesnek is $y = mx + b$ az egyenlete, csak az a kérdés, hogy az m meredekség és a b konstans hogyan függ az $f(x)$ függvénytől és a $P(x, f(x))$ ponttól.



Ez az ábra azt mutatja, hogy az érintő a szelők határhelyzetének tekinthető: a P és Q pontokon átmenő szelő egyre "közelebb" van az érintőhöz, ahogy a Q pont egyre közelebb kerül P-hez. Ezek motiválják a következő definíciókat.

Legyen $a, x \in D_f$ az f függvény értelmezési tartományának két különböző eleme, és tekintsük az f függvény grafikonján a $P(a, f(a))$ és a $Q(x, f(x))$ pontokat.



Definíció: Az $a \in D_f$ és $x \in D_f$ helyekhez tartozó **különbségi hányados** vagy **differencia hányados** a

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tört.

Definíció: Ha az $a \in D_f$ helyen **létezik** és **véges** az a és x helyekhez tartozó különbségi hányadosnak a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határértéke, akkor az f függvény **differenciálható** az $a \in D_f$ helyen. Ekkor a fenti határérték értékét $f'(a)$ jelöli, és ezt az $a \in D_f$ helyhez tartozó **differenciálhányadosnak** hívjuk, így tehát

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ha létezik $f'(a)$, akkor a fenti határérték létezése miatt, és azért, mert $f(a)$ is létezik, az a hely csak belső pontja lehet a D_f-nek.

Definíció: Azt az f' függvényt, amelyik az f függvény értelmezési tartományának azokban az a pontjaiban van értelmezve, ahol az f függvény differenciálható, és minden ilyen helyen az értéke az a-beli $f'(a)$ differenciálhányados, az f függvény **derivált függvényének** hívjuk.

A derivált függvény értelmezési tartomány tehát részhalmaza az eredeti függvény értelmezési tartományának.

A differenciálhányados segítségével az érintő problémája már megoldható.

Definíció: Ha f differenciálható az $f'(x) = \cos x$ helyen, akkor az f grafikonjához a $P(a, f(a))$ pontban húzható érintő **meredeksége** $f'(a)$, és az **érintő egyenes egyenlete**

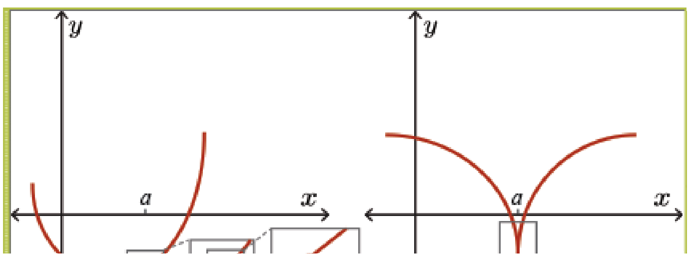
$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = \underbrace{f'(a)}_{m} \cdot x + \underbrace{f(a) - a \cdot f'(a)}_{b}.$$

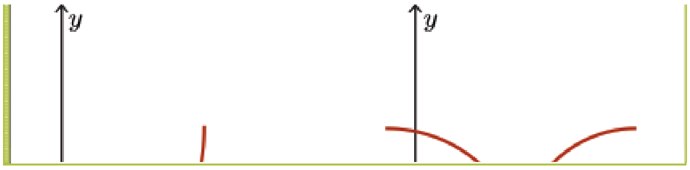
Ebből látható, hogy $f'(a) = 0$ esetén az érintő vízszintes, $f'(a) > 0$ esetén az érintő emelkedő egyenes, vagyis az a hely közelében a függvény növekszik, és $f'(a) < 0$ esetén pedig érintő süllyedő egyenes vagyis az a hely közelében a függvény csökken.

Az érintő egyenes tekinthető egy lineáris $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ függvény grafikonjának. Ezt a g függvényt hívjuk az f **függvény a-beli linearizáltjának.** Elég egy pillantást vetni egy függvényt és annak egy érintőjét mutató ábrára, hogy világos legyen: a linearizált jól közelíti az érintési pontban a függvényt. Sőt, bármilyen bonyolult is az f függvény, egy nagyon egyszerű lineáris függvény szolgáltatja ezt a jó közelítést. Ez lehetőséget ad függvényértékek közelítő meghatározására.

Tétel: Ha az f függvény differenciálható a-ban, akkor folytonos is a-ban.

Sőt, ennél több is igaz. Az a pontbeli differenciálhatóság azt jelenti, hogy a függvény grafikonja sima az a pont környékén, nincs szakadása és nincs töréspontja. Ha közelről nézzük a grafikont, akkor az egyenesnek tűnik. Az alábbi ábrasor ezt szemlélteti egy a pontban differenciálható, és egy az a pontban nem differenciálható függvény esetén:





Az analízisben a fő célunk, hogy egy függvényről a hozzárendelési utasítás ismeretében minél több információt megismerjünk. Ki fog derülni, hogy ebben a fő segédeszköz a derivált függvény. Az f' derivált függvény vizsgálatával az eredeti f függvény számos, minket érdeklő tulajdonsága felderíthető. (Például a növekedés vagy fogyás, maximális vagy minimális értéket, a grafikon görbülésének jellege stb.)

Tehát mindenek előtt arra van szükség, hogy minél több függvény derivált függvényét egyszerűen és gyorsan elő tudjuk állítani.

Az analízisben olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek az elemi függvényekből épülnek fel a különböző műveletek segítségével. Ebből is látható, hogy a későbbiekben az elemi függvények deriváltjainak alapvető jelentőségük lesz. A következő táblázatban megadjuk az elemi függvények deriváltjait.

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, n pozitív egész $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^{-n}$, n pozitív egész $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -nx^{-n-1}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$, $f(-2) = 1$ páros pozitív egész $D_f = [0,\infty)$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $D_{f'} = (0,\infty)$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$, n páratlan pozitív egész $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0,\infty)$
$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, irracionális $D_f = (0,\infty)$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $D_{f'} = (0,\infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0,\infty)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $D_{f'} = (0,\infty)$
$f(x) = e^x$, $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$, $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$ $D_f = (0,\infty)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ $D_{f'} = (0,\infty)$
$f(x) = a^x$, $a > 0$ $D_f = (0,\infty)$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$ $D_f = (0,\infty)$
$f(x) = \log_a x$, $a > 0$ $D_f = (0,\infty)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $D_f = (0,\infty)$
$f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$, $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$, $D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = -\sin x$, $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{tg} x$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \mathrm{ctg} x$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$f(x) = \arcsin x$ $D_f = [-1, 1]$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_{f'} = (-1, 1)$
$f(x) = \arccos x$ $D_f = [-1, 1]$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D_{f'} = (-1, 1)$
$f(x) = \mathrm{arctg}x$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{arcctg}x$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{sh}x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \mathrm{ch}x$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{ch}x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $D_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \mathrm{sh}x$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{th}x := \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{cth}x := \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \mathrm{arsh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \mathrm{arch}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $D_f = [1,\infty)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $D_{f'} = (1,\infty)$
$f(x) = \mathrm{arth}x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $D_f = (-1, 1)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $D_{f'} = (-1, 1)$
$f(x) = \mathrm{arcth}x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $D_f = (-\infty, -1) \cup (1,\infty)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $D_f = (-\infty, -1) \cup (1,\infty)$

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvénynek az $a = 1$ és az $x \in \mathbb{R}$ helyekhez tartozó különbségi hányadosát.

Megoldás: Mivel az f függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, létezik a fenti különbségi hányados, és:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1.$$

A különbségi hányadosnak általában kiszámoljuk a határértékét, így azt célszerű a legegyszerűbb formában felírni.

2. feladat: Számoljuk ki az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $a = 4$ helyhez tartozó differenciálhányadosát.

Megoldás: Tudjuk, hogy $D_f = [0,\infty)$, aminek a 4 belső pontja, és

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{4},$$

így tehát $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

3. feladat: Hol veszi fel a nulla értéket az $f(x) = x - x^2$ függvény deriváltja.

Megoldás: Először elkészítjük a derivált függvényt. Legyen $a \in D_f$ tetszőleges valós szám. Mivel $D_f = \mathbb{R}$ ez egyben belső pontja is D_f-nek. Ekkor

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x-x^2-\left(a-a^2\right)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)-\left(x^2-a^2\right)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)-(x+a)(x-a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a}(1-(x+a)) = 1-2a\,.$$

Mivel ez tetszőleges a számra igaz, azt kaptuk, hogy $f'(x) = 1-2x$, és a derivált függvény is az egész valós számok halmazán van értelmezve.

$f'(x) = 0$, ha $x = \frac{1}{2}$, tehát a derivált függvény egyedül az $\frac{1}{2}$ helyen veszi fel a nulla értéket.

4. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk értelmezési tartománya $D_f = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, aminek minden pontja belső pont. Legyen $a \in D_f$ tetszőleges, ekkor

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{ax(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{-1}{ax} = -\frac{1}{a^2}\,.$$

Ebből az következik, hogy $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, és $D_{f'} = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, ugyan az, mint a D_f.

5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ derivált függvényét.

Megoldás: Most a $D_f = [0,\infty)$, aminek a 0 nem belső pontja, itt tehát f biztosan nem deriválható. Ha azonban $0 \neq a \in D_f$, azaz a pozitív szám, akkor

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,.$$

Tehát $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ és $D_{f'} = (0,\infty)$.

Az előző két feladatban szereplő függvények elemi függvények. Az elemi függvények deriváltjait tartalmazó táblázatban lévő deriváltak közül néhányat hasonlóan lehetne levezetni. A többséghez azonban további nevezetes határértékek tételek és egyéb tételek is szükségesek lennének.

6. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának érintőjét az $a = 3$ helyen.

Megoldás: Határozzuk meg a függvény értékét az $a = 3$ helyen: $f(a) = f(3) = 9$. Az érintési pont koordinátái tehát $(3, 9)$.

Meghatározzuk $f'(a) = f'(3)$ értékét: az $a = 3$ belső pontja a $D_f = \mathbb{R}$-nek, és

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a) = 2a.$$

A differenciálhányados értéke az $a = 3$ helyen, azaz a keresett érintő meredeksége:

$m = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

Helyettesítsünk ezután az érintőt megadó $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ képletbe.

$y = 6(x-3)+9$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy az érintő egyenlete: $y = 6x - 9$.

7. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2 - 2x - 2$ függvény $a = 2$-beli érintőjének egyenletét.

Megoldás: Helyettesítsük a függvénybe a megadott $a = 2$ értéket: $f(a) = f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 2$. Az érintő tehát a $(2, -2)$ pontban érinti a függvény grafikonját.

A meredekség meghatározásához szükségünk van a derivált függvényre. (Valójában most is elég lenne $f'(2)$ értéke, de azt kiszámolni nem sokkal egyszerűbb, mint meghatározni a derivált függvényt, és venni annak 2-ben a helyettesítési értékét.) Az $a = 2$ belső pontja a $D_f = \mathbb{R}$-nek, és

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^2-2x-2-\left(a^2-2a-2\right)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{\left(x^2-a^2\right)-(2x-2a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)-2(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}((x+a)-2) = 2a-2.$$

A derivált függvény tehát $f'(x) = 2x - 2$.

Helyettesítsünk ebbe $a = 2$-t, így megkapjuk a meredekséget:

$m = f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$

Részeredményeinket írjuk be az érintő $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ képletébe:

$y = 2(x-2) + (-2)$.

Végezzük el a műveleteket, és így megkapjuk az érintő egyenletének alábbi alakját:

$y = 2x - 6$.

8. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $m = 2$ meredekségű érintőjének egyenletét.

Megoldás: Most az érintőt nem azzal határozzuk meg, hogy melyik pontban érinti a grafikont, hanem azzal, hogy mennyi a meredeksége. Mivel az érintő felírásához szükség van az érintési pont két koordinátájára, először ezeket kell meghatározni.

Tudjuk, hogy a derivált függvény $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Azt az $a > 0$ számot keressük, amelyre a meredekség, azaz $f'(a)$ éppen 2. Ehhez megoldjuk az

$\frac{1}{2\sqrt{a}} = 2$

egyenletet a-ra: a fenti képletből $\sqrt{a} = \frac{1}{4}$, amiből $a = \frac{1}{16}$. Tehát valójában az $a = \frac{1}{16}$-beli érintőről van szó. Mivel $f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}$, az érintési pont két koordinátája $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$. Az érintő $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ képletébe helyettesítve

$y = 2\left(x - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4}$,

rendezve

$y = 2x + \frac{1}{8}$.

9. feladat: Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek az $y = 4x - 9$ egyenesre merőleges érintőjének egyenletét.

Megoldás: Az érintőt ismét nem az érintési pont első koordinátájával adtuk meg. Azt kell először meghatározni. Ismét az érintő meredekségéről van információnk, hiszen, ha a keresett érintő merőleges a megadott $m^* = 4$ meredekségű egyenesre, akkor a meredeksége . Ehhez arra kell emlékezni, hogy a síkon két egyenes akkor merőleges egymásra, ha a meredekségeik szorzata -1. Így tehát azt az $a \neq 0$ számot keressük, amelyre $f'(a) = -\frac{1}{4}$. Tudjuk, hogy $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, így az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4},$$

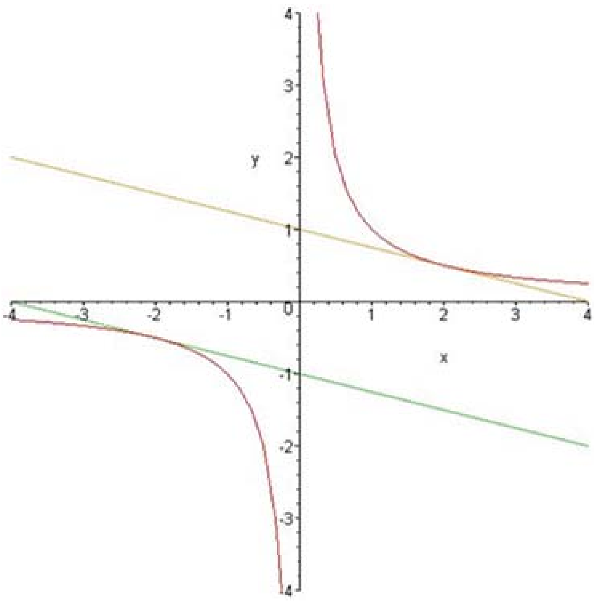
amiből $a^2 = 4$, azaz $a = \pm 2$, két megoldást kaptunk, tehát két ilyen érintő is van.

Ha az érintési pont első koordinátája $a = 2$, akkor az érintési pont második koordinátája $f(2) = \frac{1}{2}$, és ennek az első érintőnek az egyenlete

$$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{x}{4} + 1.$$

Ha az érintési pont első koordinátája $a = -2$, akkor az érintési pont második koordinátája $f(-2) = -\frac{1}{2}$, és ennek a második érintőnek az egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4}(x-(-2)) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$y = -\frac{x}{4} - 1.$$



A fenti ábrán a függvényünket és a két érintőjét láthatjuk.

10. feladat: Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvénynek azt az érintőjét, amelyik átmegy a $Q(-1,-3)$ ponton.

Megoldás: Ismét az érintési pont meghatározásával kell kezdenünk. Tudjuk, hogy az érintő egyenlete

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

szerkezetű, ha figyelembe vesszük f képletét is, akkor, mivel $f'(x) = 2x$,

$$y = 2a(x-a) + a^2.$$

Azt az a számot, vagy azokat az a számokat keressük, amelyekre ez az egyenes átmegy a Q ponton. Elvégezve az $x = -1$, $y = -3$ helyettesítést és rendezve

$$-3 = 2a(-1-a) + a^2$$
$$-3 = -2a - a^2$$
$$a^2 + 2a - 3 = 0.$$

Megoldva a kapott másodfokú egyenlete a-ra két értéket kapunk: $a = 1$ vagy $a = -3$.

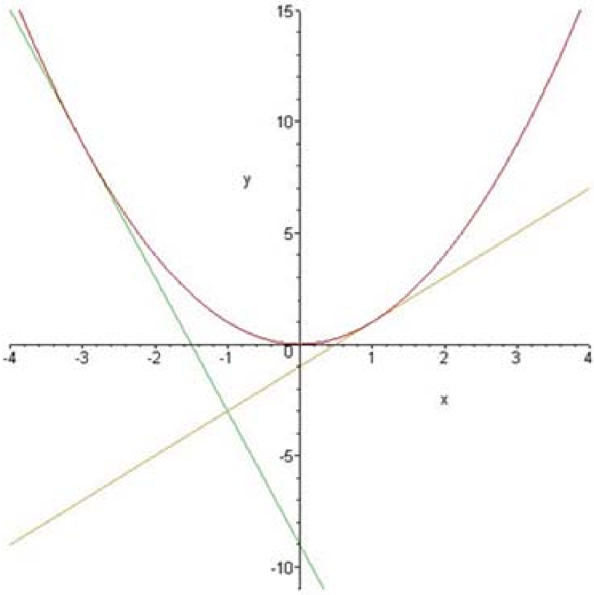
Az $a = 1$-beli érintő egyenlete az $y = 2a(x-a) + a^2$ képletből

$$y = 2(x-1) + 1$$
$$y = 2x - 1.$$

Ugyanígy az $a = -3$-beli érintő egyenlete

$$y = -6(x-(-3)) + 9 = -6(x+3) + 9$$
$$y = -6x - 9.$$

A függvényünket és a két érintőjét mutatja az alábbi ábra.



11. feladat: Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény alkalmas linearizáltját felhasználva számoljuk ki közelítően $\sqrt[3]{8.12}$ értékét.

Megoldás: A linearizált az érintési pont közelében közelít jól. A 8 közel van 8.12-höz, ezért az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény $a = 8$-beli linearizáltját fogjuk használni $\sqrt[3]{8.12}$ közelítő értékének kiszámolására.

Szükségünk van az érintési pont második koordinátájára is: $f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$, az érintési pont tehát $(8, 2)$. Mivel $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$, azt kapjuk, hogy a meredekség $f'(a) = f'(8) = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$. Így az $a = 8$-beli linearizált

$$g(x) = \frac{1}{12}(x-8) + 2 = \frac{x}{12} + \frac{4}{3}$$

Ennek a függvénynek a 8.12 helyen vett értékével közelíthető $\sqrt[3]{8.12}$. Azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt[3]{8.12} \approx g(8.12) = \frac{8.12}{12} + \frac{4}{3} = 2.01$$

Ha ezek után számológéppel is kiszámoljuk $\sqrt[3]{8.12}$-t, akkor a 2.009950413 értéket kapjuk. Látható, hogy a linearizált felhasználásával kapott közelítésünk meglehetősen pontos.

12. feladat: Alkalmas linearizáltat felhasználva számoljuk ki közelítően $\sin(33\,°)$ értékét.

Megoldás: Az analízisben a trigonometrikus függvények argumentumát radiánban kell megadni. Ezért először a $33\,°$-ot átszámoljuk radiánra az $x_{rad} = \frac{\pi}{180} x_{fok}$ képletet használva. De mivel a $33\,°$ radiánban megadott értékéhez közeli a érték is kell, hogy fel tudjuk írni az ottani linearizáltat, az átírást a következőképp csináljuk:

$$33\,° = 30\,° + 3\,° = \frac{\pi}{180}(30+3) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60} = \frac{11\pi}{60} = 0.576,$$

(a radián mértékegységet nem írjuk ki). Innen már látjuk, hogy, mivel $\frac{\pi}{60}$ kicsi, az $f(x) = \sin x$ függvény $a = \frac{\pi}{6}$-beli linearizáltját használhatjuk a közelítéshez. Mivel $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ és $f'(x) = \cos x$, a meredekség $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ezután már felírhatjuk a linearizált képletét:

$$g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12}.$$

Ezután a keresett közelítő érték:

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \approx g\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{11\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12} = 0.5453449841.$$

Ha számológéppel számoljuk $\sin(33\,°)$-ot, akkor a 0.544639035 értéket kapjuk. Látható, hogy a közelítésünk most is elég pontos.

13. feladat: Hol metszi az $f(x) = x^2 - 8x + 19$ függvény $a = 5$-beli érintője az x tengelyt?

Megoldás: Először felírjuk az érintő egyenletét. Mivel $f(a) = f(5) = 4$, az érintési pont az $(5, 4)$ koordinátájú pont. Szükségünk van $f'(5)$ értékére. Mivel f nem elemi függvény még nem ismerjük a deriváltját. Később a derivált függvény egy adott helyen vett értékét mindig úgy fogjuk kiszámolni, hogy meghatározzuk a derivált függvényt, és vesszük annak a szóban forgó helyettesítési értékét. Ehhez azonban a deriválási szabályok ismeretére van szükség, ami a következő fejezet témája. Ezért most a definíciót használva számoljuk ki $f'(5)$ értékét:

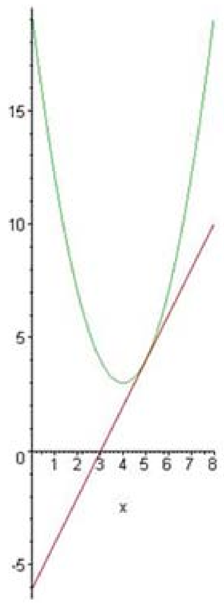
$$f'(5) = \lim_{x\to5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} =$$
$$= \lim_{x\to5} \frac{x^2 - 8x + 19 - 4}{x - 5} = \lim_{x\to5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x - 5} =$$
$$= \lim_{x\to5} \frac{(x-3)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to5}(x-3) = 2,$$

így az érintő meredeksége $m = f'(a) = f'(5) = 2$.

Ezek felhasználásával az érintő egyenlete:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) =$$
$$= 2(x-5) + 4 = 2x - 6.$$

Az $y = 2x - 6$ egyenes ott metszi az x tengelyt, ahol az $y = 0$. A $2x - 6 = 0$ egyenletből $x = 3$. Tehát az $f(x) = x^2 - 8x + 19$ függvény $a = 5$-beli érintője az $(3, 0)$ koordinátájú pontban metszi az x tengelyt. Az alábbi ábrán a függvényünket és az érintőjét láthatjuk.



14. feladat: Hol metszi az $f(x) = \sqrt{x+3}$ függvény $a = -2$-beli érintője az x és az y tengelyt?

Megoldás: Úgy, mint az előző feladatban, az érintő egyenletének felírásával kezdünk. Mivel $f(-2) = 1$, az érintési pont $(-2, 1)$. Ezen kívül az érintő felírásához $f'(-2)$ értékére van szükségünk, amit most is a definíció alapján határozunk meg. (f összetett függvény, deriválásával a következő fejezetben foglalkozunk.)

$$f'(-2) = \lim_{x\to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x-(-2)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(\sqrt{x+3}-1)(\sqrt{x+3}+1)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)} =$$

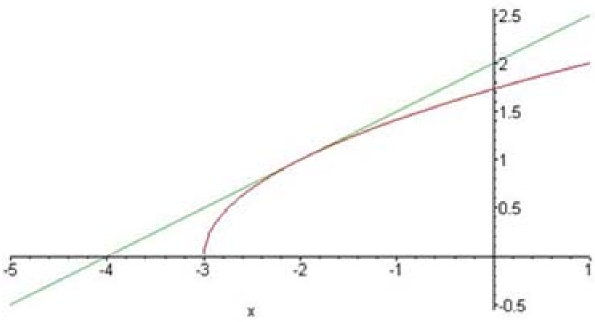
$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)}{(x+2)(\sqrt{x+3}+1)} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Az érintő meredeksége tehát $m = f'(a) = f'(-2) = \frac{1}{2}$. Ezeket felhasználva az érintő egyenlete

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) =$$

$$= \frac{1}{2}(x-(-2)) + 1 = \frac{x}{2} + 2.$$

Az $y = 0$ egyenletből, azaz az $\frac{x}{2} + 2 = 0$ egyenletből $x = -4$, vagyis az érintő az x tengelyt a $(-4, 0)$ koordinátájú pontban metszi. Az y tengellyel való metszéspontot megkapjuk, ha az érintő $y = \frac{x}{2} + 2$ képletében az x helyére nullát írunk, így $y = 2$ adódik, tehát az érintő az y tengelyt a $(0, 2)$ koordinátájú pontban metszi. A függvényünket és az érintőjét mutatja az alábbi ábra.



Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{3}{x}$ függvény $x_0 = 2$-beli érintőjének egyenlete?

- $y = -\frac{3}{2}x + 3$
- $y = \frac{3}{4}x + 3$
- $f(x) = \frac{x}{e^x + x}$
- $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

mehet

2. kérdés: Mi az $f(x) = e^x + x$ függvény $x_0 = 0$-beli érintőjének egyenlete?

- $y = 2x + 1$
- $y = x + 2$
- $y = 2x - 1$
- $y = ex - 1$

mehet

3. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény $m = -2$ meredekségű érintőjének egyenlete?

- $y = -x + 2$
- $y = -x + 2$
- $y = -2x + 3$

○ $y = -2x + 4$

mehet

4. kérdés: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény $x_0 = 4$-beli linearizáltját, és ezt felhasználva adjuk meg $\frac{1}{\sqrt{5}}$ közelítő értékét.

○ A linearizált $y = -\frac{1}{4}x + \frac{55}{32}$, s ebből $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.46875$.

○ A linearizált $y = -\frac{1}{4}x + \frac{27}{16}$, s ebből $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4375$.

○ A linearizált $y = -\frac{1}{16}x + \frac{25}{32}$, s ebből $\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.46875$.

◉ A linearizált $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$, s ebből $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

mehet

5. kérdés: Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$ függvény $x_0 = e$-beli linearizáltját, és ezt felhasználva adjuk meg $\ln 3$ közelítő értékét 4 tizedesre kerekítve.

○ A linearizált $y = \frac{x}{2e} + \frac{1}{2}$, s ebből $\ln 3 \approx 1.0518$.

◉ A linearizált $y = \frac{x}{e}$, s ebből $\ln 3 \approx 1.1036$.

○ A linearizált $y = \frac{2x}{e} - 1$, s ebből $\ln 3 \approx 1.2073$.

○ A linearizált $y = \frac{x}{4e} + \frac{3}{4}$, s ebből $\ln 3 \approx 1.0259$.

mehet

Elméleti összefoglaló

Amikor meghatározzuk egy függvény derivált függvényét úgy is gondolhatunk erre a folyamatra, mint egy új függvényműveletre, amelyik az eredeti $f(x)$ függvényből elkészíti az $f'(x)$ derivált függvényt. És sokszor hasznos így, függvényműveletként gondolni a deriválásra. Persze ekkor rögtön adódik a kérdés, hogy ennek az új függvényműveletnek mi a kapcsolata a korábban megismert függvényműveletekkel. Ezeket a kapcsolatokat megfogalmazó tételeket hívjuk **deriválási szabályoknak.** Ebben a leckében megismerkedünk a deriválási szabályokkal, és begyakoroljuk a derivált függvény ezeken alapuló meghatározását. Ez sokkal gyorsabb és egyszerűbb, mint a definíció alkalmazása, és nagyon fontos lesz a későbbiek során.

Tétel: Legyen c tetszőleges konstans, az f függvény pedig differenciálható az x helyen, ekkor a $c \cdot f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Úgy szoktunk hivatkozni erre a tételre, hogy a konstans szorzó deriváláskor kiemelhető.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f+g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ennek a tételnek a tömör megfogalmazása az, hogy összeg tagonként deriválható. A tétel nem csak két függvény, hanem tetszőleges számú, véges sok függvény összegének deriválásakor is érvényben marad: ha az $f_1, f_2, \ldots f_n$ függvények mindegyike differenciálható az x helyen, akkor az $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\right)' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

Ezekből a tételekből könnyen következik, hogy f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f - g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Sőt, a legáltalánosabban ezek a tételek így fogalmazhatók meg egy tételben: ha az $f_1, f_2, \ldots f_n$ függvények mindegyike differenciálható az x helyen, $c_1, c_2, \ldots c_n$ pedig tetszőleges konstansok, akkor $c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2 + \ldots + c_n \cdot f_n$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + \ldots + c_n \cdot f_n(x)\right)' = c_1 \cdot f_1'(x) + c_2 \cdot f_2'(x) + \ldots + c_n \cdot f_n'(x).$$

Ezek a tételek együtt azt jelentik, hogy **a deriválás lineáris művelet.**

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, ekkor a az $f \cdot g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Ez a tétel is általánosítható, például három tényező esetén így néz ki:

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x).$$

Figyeljük meg, hogy mivel az összeadás és a szorzás kommutatív művelet, az eddigi képletek nem változnak, ha azokban a függvényeket tetszőleges sorrendben írjuk.

Az osztás nem kommutatív művelet, ezért a törtfüggvény deriválására vonatkozó képlet nem is szimmetrikus a számlálóban és a nevezőben.

Tétel: Legyen az f és a g függvény differenciálható az x helyen, és $g(x) \neq 0$, Ekkor a az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

A legfontosabb deriválási szabály az összetett függvény deriválási szabálya, ezt használjuk a leggyakrabban.

Tétel: Legyen az f függvény differenciálható az x helyen, a g függvény differenciálható az $f(x)$ helyen. Ekkor a $g \circ f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Természetesen ez is általánosítható többtényezős kompozíciókra. Három tényező esetén a tétel a következő: ha az f függvény differenciálható az x helyen, a g függvény differenciálható az $f(x)$ helyen, a $f(1) = 1$ függvény pedig differenciálható a $g(f(x))$ helyen, akkor a $h \circ g \circ f$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(h(g(f(x))))' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ezt, és az előző tételt is, **láncszabálynak** hívják.

A függvény inverzének a képzése is tekinthető függvényműveletnek, így persze van az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel is. A gyakorlatban azonban ezt ritkán alkalmazzuk, helyette elkészítjük az inverz függvényt, és alkalmazzuk a korábbi deriválási szabályokat.

Egy f függvény f' deriváltja maga is egy függvény. Tekinthetjük ennek a deriváltját, amit f'' fog jelölni, és ezt f **második deriváltjának** hívjuk. Ennek deriváltja f harmadik deriváltja, és így tovább. Ezeknek a magasabb rendű deriváltaknak fontos szerepe van a felsőbb matematikában.

Kidolgozott feladatok

A következő feladatokban csak a derivált függvény képletének az előállításával foglalkozunk, és nem vizsgáljuk annak értelmezési tartományát. Fel fogjuk használni az elemi függvények korábban már megismert deriváltjait.

15. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 5x^4$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Az f függvény egy konstans és egy hatványfüggvény szorzata, ezért a konstans szorzó a deriválás művelete élé kiemelhető:

$$f'(x) = \left(5x^4\right)' = 5\left(x^4\right)' = 5\left(4x^3\right) = 20x^3.$$

16. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2 + \ln x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Az f függvény kéttagú összeg, amit tagonként deriválhatunk, így:

$$f'(x) = \left(x^2 + \ln x\right)' = \left(x^2\right)' + (\ln x)' = 2x + \frac{1}{x}.$$

17. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sin x - \cos x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $f'(x) = (\sin x)' - (\cos x)' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x.$

18. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 2e^x + \frac{3}{x}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Felhasználjuk, hogy a deriválás lineáris, a gyököt és a törtet pedig felírjuk hatványként, így minden derivált könnyen felismerhető elemi függvény deriváltja lesz:

$$f'(x) = \left(x^3 - 3\sqrt{x} + 2e^x + \frac{3}{x}\right)' = \left(x^3\right)' - 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + 2(e^x)' + 3\left(x^{-1}\right)' =$$

$$= 3x^2 - 3\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) + 2e^x + 3\left(-x^{-2}\right) =$$

$$= 3x^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + 2e^x - \frac{3}{x^2}.$$

Deriváláskor gyakori, hogy a törteket és a gyököket hatványokként kezeljük.

19. feladat: Határozzuk meg az $f(t) = (2t-1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Végezzük el a négyzetre emelést. Ekkor kapjuk, hogy $f(t) = 4t^2 - 41 + 1$. Ezt felhasználva

$$f'(t) = \left(4t^2 - 4t + 1\right)' = 4\left(t^2\right) - 4(t)' + (1)' = 8t - 4.$$

Később ezt a függvény a szorzatfüggvény és az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva is deriválni fogjuk.

20. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2^x - \ln 2 - \sqrt[4]{x^3}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Persze majd tagonként fogunk deriválni, de először a negyedik gyököt hatványként írjuk fel. Azután vegyük figyelembe, hogy $\ln 2$ konstans, így a deriváltja 0, és nem $\frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \left(2^x - \ln 2 - \sqrt[4]{x^3}\right)' = (2^x)' - (\ln 2)' - \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' =$$
$$= 2^x \ln 2 - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}},$$

felhasználva az a^x és az x^α elemi függvények deriváltjait.

Ellenőrző kérdések

6. kérdés: Mi az $f(x) = 3x^4$ függvény derivált függvénye?

- $3x^3$.
- $12x^4$.
- $12x^3$.
- $34x^3$.

mehet

7. kérdés: Mi az függvény derivált függvénye?

- $\ln t - \frac{1}{\sin^2 t}$.
- $-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sin^2 t}$.
- $-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2 t}$.
- $\frac{1}{t^2} - \mathrm{tg}\, t$.

mehet

8. kérdés: Mi az $f(x) = e^{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ függvény derivált függvénye?

- $e^{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.
- $e^{x+1} - 4\sqrt{x}$.
- $ee^x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.
- $ee^x + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

mehet

9. kérdés: Mi az $f(x) = x^3 - 2 \cdot 3^x - 4x^{2.1}$ függvény derivált függvénye?

- $3x^2 - 2x \cdot 3^{x-1} - 8.2x^{1.1}$.
- $3x^2 - 2 \cdot 3^{x-1} \ln 3 - 8.2x^{1.1}$.

- $3x^2 - 2\cdot 3^{x-1}\ln 3 - 8.2x^{1.1}$.
- $3x^2 - 2\cdot 3^{x}\ln 3 - 8.2x^{1.1}$.

mehet

10. kérdés: Mi az $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - x^{-2}$ függvény derivált függvénye?

- $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{2}{x^3}$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \dfrac{2}{x^3}$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \dfrac{2}{x^3}$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{3}{x^2}$.

mehet

Kidolgozott feladatok

21. feladat: Határozzuk meg az $f(t) = (2t-1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk így is írható: $f(t) = (2t-1)(2t-1)$. Így, a szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

$$f'(t) = (2t-1)'(2t-1) + (2t-1)(2t-1)' = 2(2t-1) + (2t-1)2 = \\ = 8t - 4.$$

22. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \left(x^2 + x\right)\left(1 - 2x^2\right)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Mivel a függvényünk szorzatfüggvény, alkalmazhatjuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát:

$$f'(x) = \left(x^2 + x\right)'\left(1 - 2x^2\right) + \left(x^2 + x\right)\left(1 - 2x^2\right)' = \\ = (2x+1)\left(1 - 2x^2\right) + \left(x^2 + x\right)(-4x) = \\ = 1 + 2x - 6x^2 - 8x^3,$$

De eljárhatunk úgy is, hogy először elvégezzük a függvényünket definiáló képletben a szorzást: $f(x) = x + x^2 - 2x^3 - 2x^4$. Ezután deriválás szempontjából már egyszerűbb a helyzet.

$$f'(x) = \left(x + x^2 - 2x^3 - 2x^4\right)' = (x)' + \left(x^2\right)' - 2\left(x^3\right)' - 2\left(x^4\right)' = \\ = 1 + 2x - 6x^2 - 8x^3.$$

Természetesen ugyanaz a végeredmény, mint az előbb. Látjuk, hogy gyakran elő fog fordulni, hogy egy deriválás több úton is elvégezhető.

A továbbiakban az összegek deriváltját, ha a tagok már elemi függvények, a deriválások kijelölése nélkül, közvetlenül felírjuk.

23. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = (3x - \sqrt{x})(e^x + 1)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most nem célszerű elvégezni a beszorzást, mert a keletkezett szorzatok nem egyszerűsíthetők, és így kétszer is alkalmazni kéne a szorzatfüggvény deriválási szabályát.

$$f'(x) = (3x - \sqrt{x})'(e^x + 1) + (3x - \sqrt{x})(e^x + 1)' =$$
$$= \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(e^x + 1) + (3x - \sqrt{x})e^x .$$

Felmerül, hogy az utolsó képletben el kell-e végezni a beszorzásokat. Amikor csak az a feladat, hogy határozzuk meg egy függvény derivált függvényét, a deriválások elvégzése után nem fogjuk a lehetséges összevonásokat elvégezni. Ez így gyorsabb és egyszerűbb. Később, amikor a derivált függvénnyel további számításokat fogunk végezni, más lesz a helyzet.

24. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = (\mathrm{tg}x + \sin 30 - x)(\sqrt[3]{x} - 2^x)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Először is a $\sin 30$ egy konkrét szám, konstans, és a 30 radiánban értendő; az analízisben a trigonometrikus függvények argumentuma mindig radián van megadva. Így $\sin 30 \approx$ -0.9880316241, és nem 0.5, amennyi a 30 ° szinusza. Tehát $\sin 30$ deriváltja nulla, továbbá

$$f'(x) = (\mathrm{tg}x + \sin 30 - x)'(\sqrt[3]{x} - 2^x) + (\mathrm{tg}x + \sin 30 - x)(\sqrt[3]{x} - 2^x)' =$$
$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)(\sqrt[3]{x} - 2^x) + (\mathrm{tg}x + \sin 30 - x)\left(\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - 2^x \ln 2\right).$$

25. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{sh}x \cdot \lg x$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A függvényünk három tényezős szorzat, de már ismerjük egy ilyen függvény deriváltjára vonatkozó képletet, az alapján

$$f'(x) = (x^2 \cdot \mathrm{sh}x \cdot \lg x)' = \left(x^2\right)' \cdot \mathrm{sh}x \cdot \lg x + x^2 \cdot (\mathrm{sh}x)' \cdot \lg x + x^2 \cdot \mathrm{sh}x \cdot (\lg x)' =$$
$$= 2x \cdot \mathrm{sh}x \cdot \lg x + x^2 \cdot \mathrm{ch}x \cdot \lg x + x^2 \cdot \mathrm{sh}x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} .$$

26. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = (xe^x + 1)(x + \mathrm{arctg}x)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ebben a feladatban elkerülhetetlen a szorzatfüggvény deriválási szabályának többszöri alkalmazása. Figyeljük meg, ahogyan először csak kijelöljük a szükséges deriválásokat.

$$f'(x) = (xe^x + 1)'(x + \mathrm{arctg}x) + (xe^x + 1)(x + \mathrm{arctg}x)' =$$
$$= (xe^x)'(x + \mathrm{arctg}x) + (xe^x + 1)(x + \mathrm{arctg}x)' =$$
$$= ((x)'e^x + x(e^x)')(x + \mathrm{arctg}x) + (xe^x + 1)(x + \mathrm{arctg}x)' .$$

Ezután már könnyen elvégezhetjük a kijelölt deriválásokat, és azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = (e^x + xe^x)(x + \mathrm{arctg}x) + (xe^x + 1)\left(1 + \frac{1}{1 + x^2}\right).$$

Ellenőrző kérdések

11. kérdés: Mi az $f(x) = x(\sin x + 1)$ függvény derivált függvénye?

- $\sin x + x\cos x$.
- $\cos x + 1 + x\cos x$.
- $\sin x + x + x\cos x$
- $\sin x + 1 + x\cos x$.

mehet

12. kérdés: Mi az $f(x)=\left(x^2-2x\right)\left(1-3x^2\right)$ függvény derivált függvénye?

- ( ) $-12x^3+18x^2-2x-2.$
- (x) $-12x^3+18x^2+2x-2.$
- ( ) $-12x^3+18x^2+2x+2.$
- ( ) $-18x^3+12x^2+2x-2.$

mehet

13. kérdés: Mi az $f(x)=(\ln x-x)(x-\ln x)$ függvény derivált függvénye?

- (x) $2-\frac{2\ln x}{x}-2x+2\ln x.$
- ( ) $2-\frac{\ln x}{x}-2x+2\ln x.$
- ( ) $2-\frac{2\ln x}{x}-2x+\ln x.$
- ( ) $2-\frac{2\ln x}{x}-x+2\ln x.$

mehet

14. kérdés: Mi az $f(x)=(\sqrt{x}+2)\left(x^2-1\right)$ függvény derivált függvénye?

- (x) $\frac{5\sqrt{x^3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+4x.$
- ( ) $\frac{5\sqrt{x^3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}+4x.$
- ( ) $\frac{5\sqrt{x^3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x.$
- ( ) $\frac{5\sqrt{x^3}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-4x.$

mehet

15. kérdés: Mi az $f(x)=(2x+1)x^4\left(1-x^2\right)$ függvény derivált függvénye?

- [x] $4x^3+10x^4+6x^5-14x^6.$
- [x] $4x^3+10x^4-6x^5+14x^6.$
- [ ] $4x^3+10x^4-6x^5-14x^6.$
- [x] $4x^3-10x^4-6x^5-14x^6.$

mehet

16. kérdés: Mi az $f(x)=(3x-1)(x\ln x+2)$ függvény derivált függvénye?

- $6x\ln x - \ln x + 5 + 2x$
- $6x\ln x - \ln x + 5 + 3x.$
- $6x\ln x - \ln x - 5 + 3x.$
- $6\ln x - x\ln x + 5 + 3x.$

mehet

Kidolgozott feladatok

27. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{2x}{3x+1}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A törtfüggvény deriválási szabályát kell alkalmazni:

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{3x+1}\right)' = \frac{(2x)'(3x+1) - (2x)(3x+1)'}{(3x+1)^2} =$$
$$= \frac{2(3x+1) - (2x)3}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}.$$

Figyeljük meg, hogy a számlálóban elvégeztük az összevonásokat, de a nevezőben a négyzetre emelést nem, ezt máskor sem fogjuk elvégezni, csak ha egytagú a nevező, így jobban kezelhető a kapott formula.

28. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: A konstans számlálójú törteket, mint hamarosan látni fogjuk, gyakran célszerűbb összetett függvényként deriválni. De persze lehet törtként is, mint most is.

$$f'(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{x}+1}\right)' = \frac{(3)'(\sqrt{x}+1) - 3(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2} =$$
$$= \frac{0\cdot(\sqrt{x}+1) - 3\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{-3}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}.$$

Általában is

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

29. feladat: Számoljuk ki $f'(1)$ értékét, ha $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2}.$

Megoldás: Először meghatározzuk f derivált függvényét, majd vesszük annak a helyettesítési értékét az 1 helyen. Hogy ne kelljen kétszer alkalmazni a tört deriválási szabályt közös nevezőre hozzuk a függvényünk: $f(x) = \frac{x^2+(x+1)^2}{(x+1)x^2} = \frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$. Most már a derivált

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}\right)'=\frac{\left(2x^2+2x+1\right)'\left(x^3+x^2\right)-\left(2x^2+2x+1\right)\left(x^3+x^2\right)'}{\left(x^3+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(4x+2)\left(x^3+x^2\right)-\left(2x^2+2x+1\right)\left(3x^2+2x\right)}{\left(x^3+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^4+2x^3+4x^3+2x^2-\left(6x^4+6x^3+3x^2+4x^3+4x^2+2x\right)}{\left(x^3+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{-2x^4-4x^3-5x^2-2x}{x^4(x+1)^2}=\frac{-2x^3-4x^2-5x-2}{x^3(x+1)^2}.$$

Ebből pedig $f'(1)=-\frac{13}{4}$.

30. feladat: Számoljuk ki $g'(2)$ értékét ha $f(2)=-1$, $f'(2)=2$, és $g(x)=\frac{2x+1}{f(x)}$.

Megoldás: A g deriváltjával kezdünk:

$$g'(x)=\left(\frac{2x+1}{f(x)}\right)'=\frac{(2x+1)'f(x)-(2x+1)f'(x)}{f^2(x)}=\frac{2f(x)-(2x+1)f'(x)}{f^2(x)}$$

Ebből pedig a keresett helyettesítési érték

$$g'(2)==\frac{2f(x)-(2x+1)f'(x)}{f^2(x)}=\frac{2(-1)-5\cdot 2}{(-1)^2}=-12.$$

31. feladat: Legyen $h(x)=\frac{f(x)+1}{g(x)-1}$. Számoljuk ki $h'(1)$ értékét, ha $f(1)=1$, $f'(1)=2$ és $g(1)=-2$, $g'(1)=-1$.

Megoldás: Mivel $h'(x)=\left(\frac{f(x)+1}{g(x)-1}\right)'=\frac{f'(x)\cdot(g(x)-1)-(f(x)+1)\cdot g'(x)}{(g(x)-1)^2}$, azt kapjuk, hogy

$$h'(1)=\frac{2(-3)-2(-1)}{(-3)^2}=-\frac{4}{9}.$$

Ellenőrző kérdések

17. kérdés: Mi az $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ függvény derivált függvénye?

- $\frac{-2}{(x+1)^2}$
- $\frac{2}{x^2+1}$
- $\frac{2}{x^2-1}$
- $\frac{2}{(x+1)^2}$

mehet

18. kérdés: Mi az $f(x)=\frac{-2}{1-\sqrt{x}}$ függvény derivált függvénye?

- [x] $-\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$
- [ ] $-\dfrac{\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2}$
- [ ] $\dfrac{x}{(1-\sqrt{x})^2}$
- [ ] $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

mehet

19. kérdés: Mennyi $f'(0)$ értéke, ha $f(x) = \dfrac{x}{e^x + x}$?

- [ ] 0
- [x] 1
- [ ] -1
- [ ] 2

mehet

20. kérdés: Mennyi $g'(1)$értéke ha $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, és $g(x) = \dfrac{f(x)}{f(x)+x}$.

- [ ] $\dfrac{1}{2}$
- [x] $\dfrac{1}{4}$
- [ ] $-\dfrac{1}{4}$
- [ ] $\dfrac{3}{4}$

mehet

21. kérdés: Legyen $h(x) = \dfrac{f(x)+x}{g(x)+1}$. Számoljuk ki $h'(1)$ értékét, ha $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ és $g(1) = 2$, $g'(1) = 2$.

- [x] $\dfrac{5}{9}$
- [ ] $\dfrac{4}{9}$
- [ ] $-\dfrac{4}{9}$
- [ ] $-\dfrac{5}{9}$

mehet

Kidolgozott feladatok

32. feladat: Határozzuk meg az $h(t) = (2t-1)^2$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Vegyük észre, hogy $h(t)$ összetett függvény: $h(t) = g(f(t))$, ha $f(t) = 2t-1$ és $g(t) = t^2$. Ezzel a választással $f'(t) = 2$, $g'(t) = 2t$. Ezért az összetett függvény deriválási szabály alapján

$$h'(t) = (g(f(t)))' = g'(f(t)) \cdot f'(t) =$$
$$= 2 \cdot f(t) \cdot 2 = 2 \cdot (2t-1) \cdot 2 = 8t-4.$$

33. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $h(x)$ most is összetett függvény, hiszen $h(x) = g(f(x))$, ha $f(x) = 1-x^2$, és $g(x) = \sqrt{x}$. Tudjuk, hogy $f'(x) = -2x$és $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Így tehát

$$h'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

34. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \sin\left(x^2 - x\right)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: $h(x)$ ismét $h(x) = g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \sin x$ választással. Mivel $f'(x) = 2x-1$ és $g'(x) = \cos x$, azt kapjuk, hogy

$$h'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$
$$= \cos(f(x)) \cdot (2x-1) = \cos\left(x^2 - x\right) \cdot (2x-1).$$

35. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \ln(x + \sqrt{x})$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most $h(x) = g(f(x))$, ha $f(x) = x + \sqrt{x}$ és $g(x) = \ln x$. De mint tudjuk $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, továbbá $g'(x) = \frac{1}{x}$. Ezeket felhasználva

$$h'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$
$$= \frac{1}{f(x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

36. feladat: Határozzuk meg az $h(x) = \frac{1}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^2}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ahogy említettük, a konstans számlálójú törteket célszerűbb összetett függvényként deriválni. Ennek érdekében átírjuk a függvényünket

$$h(x) = \frac{1}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^2} = \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^{-2}$$

alakba. Innen leolvasható, hogy $h(x) = g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$, $g(x) = x^{-2}$ választással. Ekkor $f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^2}$, és $g'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$. Ezek alapján

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$
$$= -\frac{2}{(f(x))^3} \cdot \left(3x^2 + \frac{2}{x^2}\right) =$$
$$= -\frac{2}{\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^3} \cdot \left(3x^2 + \frac{2}{x^2}\right).$$

37. feladat: Legyen $h(x) = \left(x^2 - 2x\right)^{12}$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?

Megoldás: Az összetett függvény deriválási szabályát addig célszerű gyakorolni, hogy a kompozíció tényezőinek felírására már ne is legyen szükség. Most például a következőt kapjuk:

$$h'(x) = \left(\left(x^2 - 2x\right)^{12}\right)' = 12\left(x^2 - 2x\right)^{11} \cdot \left(x^2 - 2x\right)' =$$
$$= 12\left(x^2 - 2x\right)^{11} \cdot (2x - 2).$$

Most még kicsit átalakítjuk $h'(x)$ képletét, hogy a gyökeit könnyen leolvashassuk.

$$h'(x) = 12\left(x^2 - 2x\right)^{11} \cdot (2x - 2) =$$
$$12(x(x-2))^{11} \cdot 2 \cdot (x-1) =$$
$$= 24x^{11}(x-2)^{11}(x-1).$$

Mivel egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője az, azt kapjuk, hogy $h'(x) = 0$, ha $x = 0$, vagy $x = 2$, vagy $x = 1$. Mivel a h függvény mindenütt értelmezve van, mind a három szám megoldás. (A nulla és a kettő tizenegyszeres gyök, az egy egyszeres.)

38. feladat: Legyen $h(x) = \ln^2\left(x^2 - 1\right)$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?

Megoldás: Kezdjük a derivált függvénnyel. Mivel

$$h'(x) = 2\ln\left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 - 1\right)' =$$
$$= 2\ln\left(x^2 - 1\right) \cdot 2x = 4x\ln\left(x^2 - 1\right).$$

Tudjuk, hogy $\ln 1 = 0$, így ennek a szorzatnak három gyöke van: a $-\sqrt{2}$, a nulla és a $\sqrt{2}$. De azt is tudjuk, hogy a derivált függvény értelmezési tartománya, a definíció alapján, az eredeti függvény értelmezési tartományának részhalmaza. Akkor is, ha a derivált képletének lehetséges legbővebb értelmezési tartománya ennél bővebb.

Mivel a h függvény nincs értelmezve a nullában, ezért a feladat kérdésére az a válasz, hogy $h'(x) = 0$, ha $x = \pm\sqrt{2}$.

39. feladat: Határozzuk meg az $s(x) = \sqrt{\ln\left(1 - 2x^3\right)}$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Ez a függvény egy háromszorosan összetett függvény: $s(x) = h(g(f(x)))$, ha $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$, és $f(x) = 1 - x^3$. Ezeknek a deriváltja rendre:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ g'(x) = \frac{1}{x},\ f'(x) = -3x^2.$$

A láncszabály alapján $s'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Vegyük azt is figyelembe, hogy, leolvasva az s képletéről, $g(f(x)) = \ln\left(1 - x^3\right)$. Ezek alapján:

$$s'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{g(f(x))}} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln\left(1 - x^3\right)}} \cdot \frac{1}{1 - x^3} \cdot \left(-3x^2\right).$$

Figyeljük meg, hogy az utolsó képletben zárójelbe tettük a $-3x^2$ tényezőt. Ha ezt nem tettük volna, és a pontot sem írtuk volna ki, amit amúgy nem is kötelező, a képlet hibás lenne.

40. feladat: Határozzuk meg az $s(x) = \sin\left(\sqrt{e^x - x}\right)$ függvény derivált függvényét.

Megoldás: Most is egy háromszorosan összetett függvénnyel van dolgunk, persze újra a láncszabályt fogjuk alkalmazni. Mivel $(\sin x)' = \cos x$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, és végül $(e^x - x)' = e^x - 1$, kapjuk, hogy

$$s'(x) = \cos\left(\sqrt{e^x - x}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{e^x - x}}\right) \cdot (e^x - 1).$$

41. feladat: Legyen $f(x) = -2x^3 + x^2 - 6x - 3$. Határozzuk meg $f''(x)$-et.

Megoldás: Először meghatározzuk az $f'(x)$ derivált függvényt.

$$f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 6x - 3\right)' =$$
$$= -6x^2 + 2x - 6.$$

Ezt felhasználva

$$f''(x) = (f'(x))' =$$
$$= \left(-6x^2 + 2x - 6\right)' =$$
$$= -12x + 2.$$

42. feladat: Legyen $f(x) = x^2\cos(2x)$. Határozzuk meg $f''(x)$-et.

Megoldás: Most, a szorzat deriválási szabályát alkalmazva,

$$f'(x) = \left(x^2\cos(2x)\right)' =$$
$$= \left(x^2\right)'\cos(2x) + x^2(\cos(2x))' =$$
$$= 2x\cos(2x) + x^2(-\sin(2x) \cdot 2) =$$
$$= 2x\cos(2x) - 2x^2\sin(2x).$$

Ez alapján, még kétszer alkalmazva a szorzat deriválási szabályát, és elvégezve a lehetséges összevonásokat

$$f''(x) = \left(2x\cos(2x) - 2x^2\sin(2x)\right)' =$$
$$= (2x')\cos(2x) + 2x(\cos(2x))' - \left[\left(2x^2\right)'\sin(2x) + 2x^2(\sin(2x))'\right] =$$
$$= 2\cos(2x) + 2x(-\sin(2x) \cdot 2) - \left[4x\sin(2x) + 2x^2\cos(2x) \cdot 2\right] =$$
$$= 2\cos(2x) - 4x\sin(2x) - 4x\sin(2x) - 4x^2\cos(2x) =$$
$$= \left(2 - 4x^2\right)\cos(2x) - 8x\sin(2x).$$

Ellenőrző kérdések

22. kérdés: Mi az $h(x) = (1 - 3x)^3$ függvény derivált függvénye?

- $-9(1 - 3x)^2$
- $-9(1 - 3x)^3$
- $9(1 - 3x)^2$
- $-9(1 - 3x)$

mehet

23. kérdés: Mi az $h(x)=\sqrt{x^2-2x}$ függvény derivált függvénye?

- ( ) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$
- ( ) $\dfrac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$
- ( ) $\dfrac{x-1}{2\sqrt{x^2-2x}}$
- (•) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

mehet

24. kérdés: Mi az $h(x)=\cos(1-\sin x)$ függvény derivált függvénye?

- ( ) $(1-\cos x)\sin(x-\sin x)$
- ( ) $(1-\cos x)\sin(x+\sin x)$
- (•) $-(1-\cos x)\sin(x-\sin x)$
- ( ) $(1+\cos x)\sin(x-\sin x)$

mehet

25. kérdés: Mi az $h(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)$ függvény derivált függvénye?

- (•) $\dfrac{-\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}-x}$
- ( ) $\dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}-x}$
- ( ) $\dfrac{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{\frac{1}{x}-x}$
- ( ) $\dfrac{-\left(-\frac{1}{x^2}-1\right)}{\frac{1}{x}-x}$

mehet

26. kérdés: Mi az $h(x)=\dfrac{-1}{xe^x-x^2}$ függvény derivált függvénye?

- (•) $\dfrac{-e^x-xe^x+2x}{\left(xe^x-x^2\right)^2}$
- ( ) $-\dfrac{e^x-xe^x+2x}{\left(xe^x-x^2\right)^2}$

- $\dfrac{-e^x - xe^x - 2x}{\left(xe^x - x^2\right)^2}$
- $\dfrac{-xe^x + 2x}{\left(xe^x - x^2\right)^2}$

mehet

27. kérdés: Legyen $h(x) = \left(2x^3 + 3x^2\right)^3$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?

- $-1, 0, \dfrac{3}{2}$
- $-\dfrac{3}{2}, -1, 0$
- $0, 1, \dfrac{3}{2}$
- $-\dfrac{3}{2}, 0, 1$

mehet

28. kérdés: Legyen $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?

- $-1, 1$
- $-1, 0$
- $0, 1$
- $-1, 0, 1$

mehet

29. kérdés: Mi az $s(x) = \cos^2\left(x^2\right)$ függvény derivált függvénye?

- $-4\cos\left(x^2\right)\sin^2(x) \cdot x$
- $-4\cos^2(x)\sin\left(x^2\right) \cdot x$
- $-4\cos\left(x^2\right)\sin\left(x^2\right) \cdot x$
- $-2\cos\left(x^2\right)\sin\left(x^2\right) \cdot x$

mehet

30. kérdés: Mi az $s(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$ függvény derivált függvénye?

- $\dfrac{e^{\sqrt{x^2-1}}}{x\sqrt{x^2-1}}$

- $\dfrac{x^2 e^{\sqrt{x^2-1}}}{2\sqrt{x^2-1}}$
- $\dfrac{x e^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\dfrac{x e^{\sqrt{x^2-1}}}{2\sqrt{x^2-1}}$

mehet

31. kérdés: Legyen $f(x) = xe^{-x}$. Mi f második deriváltja?

- $(x^2 + 4x - 2)e^{-x}$
- $(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$
- $(x^2 - 4x - 2)e^{-x}$
- $(x^2 + 4x + 2)e^{-x}$

mehet

32. kérdés: Legyen $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt[4]{x^3}$. Mi f második deriváltja?

- $\frac{1}{16}(77x^2 - 3) \cdot x^{-\frac{5}{4}}$
- $16(77x^2 - 3) \cdot x^{-\frac{5}{4}}$
- $\frac{1}{16}(77x^2 + 3) \cdot x^{-\frac{5}{4}}$
- $\frac{1}{16}(77x^2 - 3) \cdot x^{\frac{5}{4}}$

mehet