Tanulási cél: Az eddig megismert valós számkör bővítése

A komplex számok fogalma, algebrai alakja

Általános iskolában már tanultunk a természetes ($\mathbb{N}$), az egész ($\mathbb{Z}$) és racionális ($\mathbb{Q}$) számokról. A középiskolában elmélyítettük a velük kapcsolatos ismereteinket és új felfedezéseket is tettünk. Megismertük az irracionális ($\mathbb{Q}$ *) számokat és így, többszöri számkör bővítés eredményeként, eljutottunk a valós számok ($\mathbb{R}$) köréhez.

Eddigi tanulmányaink során azt is láttuk, hogy a valós számok halmazán nem végezhető el minden, a gyakorlatban felmerülő művelet, hiszen pl. a valós együtthatós másodfokú algebrai egyenlet sem oldható meg a valós számok halmazán, ha a diszkriminánsa negatív. Ezért célszerű lenne az R halmazt úgy bővíteni, hogy ebben az új halmazban (minden eddigi művelet változatlan megtartása mellett) tudjunk a negatív valós számokból is négyzetgyököt vonni.

Ennek érdekében bevezetünk egy elképzelt új számot, amelyet *i*-vel jelölünk, képzetes egységnek nevezünk és az $i = \sqrt{-1}$ értékkel definiálunk.

Definíció: A $z = a + bi$ alakú számokat, ahol $a,\ b \in \mathbb{R}$ a komplex számok algebrai alakjának nevezzük.

Elnevezések és jelölések: a a komplex szám valós része $\mathrm{Re}(z)$, b a komplex szám képzetes része $\mathrm{Im}(z)$.

Például a $4 - 5i$ komplex szám valós része 4, a képzetes része pedig -5.

A "képzetes" elnevezés az "immaginárius" szóból ered, ezért is jelöljük "i"-vel a komplex számok nem valós, "képzetes" részét. (Az "i"-t az "immaginárius" rövidítésére használták.) A "komplex" elnevezés pedig arra utal, hogy ezek a számok összetettek, több (kettő) részből állnak.

Megjegyzés: minden valós szám olyan komplex szám, amelynek képzetes része 0.
Azaz komplex szám a $4 = 4 + 0i$ vagy a $0 = 0 + 0i$ is.

Definíció: Két komplex szám *egyenlő*, ha valós részeik és képzetes részeik is egyenlők.

Műveletek algebrai alakban (összeadás, kivonás, szorzás, osztás)

Definíció: Legyen $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$. Ekkor

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Definíció: Egy $z = a + bi$ alakú komplex szám *konjugáltján* a $\overline{z} = a - bi$ komplex számot értjük. (A képzetes rész előjelét az ellenkezőjére változtatjuk.)

Például ha $z_1 = 7 + 2i$, akkor $\overline{z_1} = 7 - 2i$, ha $z_2 = -1 + 25i$, akkor $\overline{z_2} = -1 - 25i$, és ha $z_3 = 13 - \pi i$, akkor $\overline{z_3} = 13 + \pi i$.

Definíció: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \dfrac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$

Ezt a bonyolult végeredményt nem kell megtanulni, csak azt érdemes megjegyezni, hogy az osztás végrehajtásának első lépése a **nevező konjugáltjával való bővítés.**

Néhány műveleti tulajdonság:

- az összeadás és a szorzás kommutatív, azaz bármely két komplex szám esetén: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ továbbá $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- az összeadás és a szorzás asszociatív, azaz bármely három komplex szám esetén: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3$ továbbá $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

- a szorzás disztributív az összeadásra nézve, azaz: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

Megjegyzés: A műveletek elvégzése során az algebrában megtanult szabályokat és azonosságokat alkalmazzuk úgy, hogy kihasználjuk az $i=\sqrt{-1}$ összefüggésből adódó $i^2=-1$ lehetséges helyettesítést. Itt érdemes megfigyelni azt, hogy i hatványai négyes periódussal rendelkeznek, azaz

$$i=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=i\cdot i^2=-i,\quad i^4=\left(i^2\right)^2=(-1)^2=1,$$
$$i^5=i\cdot i^4=i,\quad i^6=i^2\cdot i^4=-1\quad \ldots$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Legyen $z_1=2-5i$ és $z_2=-1+2i$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét:

a) z_1+z_2
b) z_1-z_2
c) z_1z_2
d) $4z_1-3z_2$
e) $(2z_1-3i)(1-z_2)$
f) $\mathrm{Re}(i\cdot z_1)$
g) $z_1^2-2z_2$
h) $\mathrm{Im}\left(z_2^2+2i^{10}\right)$

Megoldás:

a) Célszerű először zárójellel ellátva behelyettesíteni a kívánt értékeket a kifejezésbe, majd a komplex számokkal, mint kéttagú algebrai kifejezéseket kezelve elvégezni az algebrai átalakításokat.

$z_1+z_2=(2-5i)+(-1+2i)=2-5i-1+2i=1-3i$

b) $z_1-z_2=(2-5i)-(-1+2i)=2-5i+1-2i=3-7i$

c) A zárójel felbontásánál minden tagot minden taggal megszorzunk, majd kihasználjuk az $i^2=-1$ összefüggést.

$z_1\cdot z_2=(2-5i)\cdot(-1+2i)=-2+4i+5i-10i^2=-2+9i-10\cdot(-1)=8+9i$

d) $4z_1-3z_2=4(2-5i)-3(-1+2i)=8-20i+3-6i=11-26i$

e) $(2z_1-3i)(1-z_2)=[2(2-5i)-3i]\cdot[1-(-1+2i)]=$

Először a szögletes zárójeleken belül elvégezzük a műveleteket, majd a két zárójelet összeszorozzuk, minden tagot minden taggal.

$=[4-10i-3i]\cdot[1+1-2i]=[4-13i]\cdot[2-2i]=8-8i-26i+26i^2=-18-34i$

f) Ebben a feladatban először el kell végezni a zárójelben szereplő műveletet, majd kiolvasni az eredmény valós részét.

$\mathrm{Re}(i\cdot z_1)=\mathrm{Re}[i(2-5i)]=\mathrm{Re}\left[2i-5i^2\right]=\mathrm{Re}[5+2i]=5$

g) $z_1^2-2z_2=(2-5i)^2-2(-1+2i)=4-20i+25i^2+2-4i=-19-24i$

h) $\mathrm{Im}\left(z_2^2+2i^{10}\right)=\mathrm{Im}\left[(-1+2i)^2+2\left(i^2\right)^5\right]=\mathrm{Im}\left[1-4i+4i^2+2\cdot(-1)^5\right]=$

$\mathrm{Im}(1-4i-4-2)=\mathrm{Im}(-5-4i)=-4.$

2. feladat: Legyen $z_1=3+2i$ és $z_2=-2+6i$. Határozza meg az alábbi kifejezések értékét:

a) $\overline{z_1} + \overline{3z_2}$
b) $\overline{(2z_1)}^2$
c) $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$
d) $\dfrac{i}{\overline{z_1}}$
e) $1 - \dfrac{3}{z_2}$

Megoldás:

a) $\overline{z_1} + \overline{3z_2} = \overline{3+2i} + \overline{3(-2+6i)} = 3-2i-6-18i = -3-20i$

b) $\overline{(2z_1)}^2 = \overline{(2(3+2i))^2} = \overline{4\left(9+12i+4i^2\right)} = \overline{4(5+12i)} = \overline{20+48i} = 20-48i$

c) $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2} = \dfrac{3+2i}{-2+6i} = \dfrac{3+2i}{-2+6i} \cdot \dfrac{-2-6i}{-2-6i} = \dfrac{-6-18i-4i-12i^2}{(-2)^2-(6i)^2} = \dfrac{6-22i}{4-36i^2} = \dfrac{6-22i}{40} = \dfrac{6}{40} - \dfrac{22}{40}i$

d) $\dfrac{i}{\overline{z_1}} = \dfrac{i}{\overline{3+2i}} = \dfrac{i}{3-2i} \cdot \dfrac{3+2i}{3+2i} = \dfrac{3i+2i^2}{(3)^2-(2i)^2} = \dfrac{-2+3i}{9-4i^2} = \dfrac{-2+3i}{13} = \dfrac{-2}{13} + \dfrac{3}{13}i$

e) $1 - \dfrac{3}{z_2} = 1 - \dfrac{3}{-2+6i} = \dfrac{-2+6i-3}{-2+6i} = \dfrac{-5+6i}{-2+6i} \cdot \dfrac{-2-6i}{-2-6i} =$

$\dfrac{10+30i-12i-36i^2}{(-2)^2-(6i)^2} = \dfrac{46+18i}{4-36i^2} = \dfrac{46+18i}{40}.$

3. feladat: Oldja meg a következő egyenleteket a komplex számok körében:

a) $3-4iz = z+5i$
b) $(1+i+iz+z)\cdot\left(1+\dfrac{i}{z}\right) = 0$
c) $z^2+2z+10=0$

Megoldás:

a) Ebben az egyenletben az ismeretlen első hatványon szerepel, ezért ez egy elsőfokú egyenlet. Első lépésben az egyenletet rendezni kell. Egyik oldalra kerülnek az ismeretlent tartalmazó tagok, míg a másik oldalra a többiek. Ezt követően a *z* kiemelése után egy osztással lépünk tovább.

$3-4iz = z+5i \quad \to \quad 3-5i = z+4iz \quad \to \quad 3-5i = z(1+6i)$

$z = \dfrac{3-5i}{1+4i} = \dfrac{3-5i}{1+4i} \cdot \dfrac{1-4i}{1-4i} = \dfrac{3-12i-5i+20i^2}{1+16} = \dfrac{-17-17i}{17} = -1-i.$

b) Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Eszerint két egyenletet kapunk:

$(1+i+iz+z) = 0$ vagy $\left(1+\dfrac{i}{z}\right) = 0.$

Oldjuk meg az első egyenletet:

$1+i+iz+z=0 \quad \to iz+z == -1-i \quad \to \quad z(1+i) = -1-i$

$z = \dfrac{-1-i}{1+i} = \dfrac{-1-i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{-1+i-i+i^2}{1-(i)^2} = \dfrac{-2}{2} = -1.$

Oldjuk meg a másik egyenletet is.

$1+\dfrac{i}{z} = 0 \quad \to \quad \dfrac{i}{z} = -1 \quad \to \quad z = -i.$

Tehát az egyenletnek két megoldása van: $z_1 = -1$ és $z_2 = -i$.

c) Használjuk a gyökképletet:

$$z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot 10}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2}=$$

$$\frac{-2\pm\sqrt{36i^2}}{2}=\frac{-2\pm 6i}{2}=\begin{cases}-1+3i\\-1-3i\end{cases}.$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Mivel egyenlő $\mathrm{Re}((-1+3i)-2(3+4i))$?

- 5
- -5
- -7
- 11

mehet

2. kérdés: Legyen $z_1=-1-5i$ és $z_2=3-i$. Mivel egyenlő $(1-2z_1)\cdot\left(\overline{2z_2+3z_1}\right)$?

- $-161+81i$
- $-179-13i$
- $179-21i$
- $-179+21i$

mehet

3. kérdés: $(-4-3i)^2-(\overline{1+i})=$

- $6-23i$
- $6+25i$
- $24-i$
- $-8-23i$

mehet

4. kérdés: Mivel egyenlő $\mathrm{Im}\left(\frac{1+5i}{2+2i}\right)$?

- 0
- 1
- $\frac{4}{3}$
- $-\frac{4}{3}$

mehet

5. kérdés: $3-3i^9+2i^{2019}=$

- (selected) $3-5i$
- $3+i$
- $2i$
- $-2i$

mehet

6. kérdés: Mivel egyenlő $1-\frac{3-4i}{i}$?

- $-5-3i$
- (selected) $5+3i$
- $3-3i$
- $-3+3i$

mehet

7. kérdés: Oldja meg a $2+iz=3z-i$ egyenletet a komplex számok halmazán!

- $\frac{5}{8}+\frac{5}{8}i$
- $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$
- $\frac{5}{8}-\frac{5}{8}i$
- (selected) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

mehet

8. kérdés: Oldja meg a $z^2-4z+13=0$ egyenletet a komplex számok halmazán!

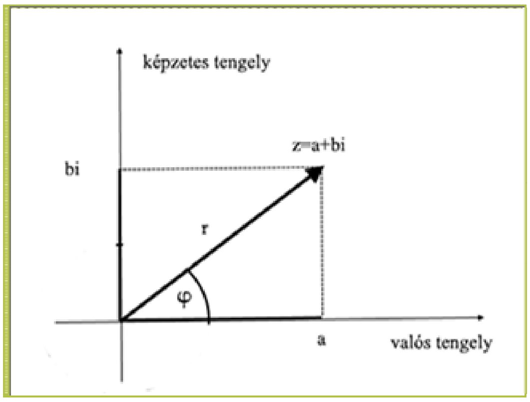
- (selected) $2\pm 3i$
- $2\pm 6i$
- $4\pm 3i$
- $4\pm 6i$

mehet

Komplex számok ábrázolása, trigonometrikus alak

A valós számokat számegyenesen ábrázoljuk. Egy egyenes a komplex számok ábrázolására nem elegendő, mivel ezek a számok valós és képzetes részből állnak. Éppen ezért ki kell lépnünk az egyenesből a síkba. Ezt a síkot komplex számsíknak nevezzük. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert és a vízszintes tengelyen a komplex szám valós, a függőleges tengelyen pedig képzetes részét jelöljük. A valós tengelyen az egység az 1 valós szám, míg a képzetes tengelyen az i komplex szám az egység.

Ekkor a $z = a + bi$ alakú komplex számot szokás az (a, b) pontba mutató helyvektorral szemléltetni. Ekkor a komplex számok és a koordináta rendszer pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk.



A $z = a + bi$ alakban megadott komplex számot a valós és képzetes része egyértelműen meghatározza. A komplex számot ábrázoló vektort azonban nem kell feltétlenül ezzel a két adattal megadni. Ugyanezt a vektort megadhatjuk úgy is, ha megadjuk a vektor hosszát és a vektor valós tengely pozitív felével bezárt hajlásszögét. Ezt a két új adatot polárkoordinátáknak hívják. A vektor hosszát a komplex szám abszolút értékének is nevezzük, jele: r, amely Pitagorasz tétel segítségével:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

A komplex szám hajlásszöge az a szög, amellyel a valós tengely pozitív felét az óramutató járásával ellenkező irányba el kell forgatni úgy, hogy az a komplex számot szemléltető vektor irányával essen egybe. Ennek megfelelően $0° \leq \phi < 360°$.

A ϕ hajlásszög meghatározásánál minden esetben fontos a vektor felrajzolása, mivel a koordináta sík különböző negyedeiben más-más módon történik. Első lépésben egy β segédszöget számolunk a

$$tg\beta = \left|\frac{b}{a}\right|, \text{ ha } a \neq 0$$

segítségével, majd a tényleges hajlásszög meghatározása következik a következő módon:

I. síknegyedben $\phi = \beta$,
II. síknegyedben: $\phi = 180° - \beta$,
III. síknegyedben: $\phi = 180° + \beta$,
IV. síknegyedben $\phi = 360° - \beta$.

A most bevezetett polárkoordináták segítségével lehetőségünk van a komplex számokat más alakban is felírni.

Definíció: A $z = a + bi$ nullától különböző algebrai alakban felírt komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),$$

ahol r a vektor hossza, ϕ pedig a hajlásszöge.

Átváltás algebrai alakból trigonometrikus alakba

A trigonometrikus alakban megadott komplex szám algebrai alakjának meghatározása a szögfüggvények értékének behelyettesítésével és egyszerűbb alakra hozással történik.

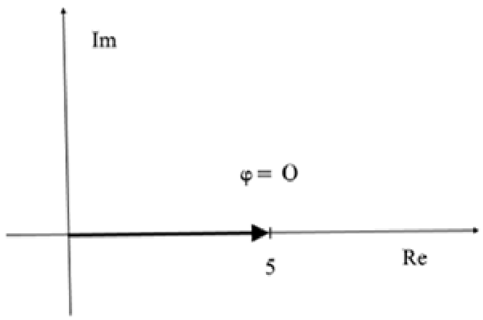
Kidolgozott feladatok

4. feladat: Írja fel a következő komplex számokat trigonometrikus alakban:

a) $z = 5$
b) $z = -3i$
c) $z = 2 + 4i$
d) $z = -4 + 2i$
e) $z = -3 - 5i$
f) $z = 5 - 4i$

Megoldás:

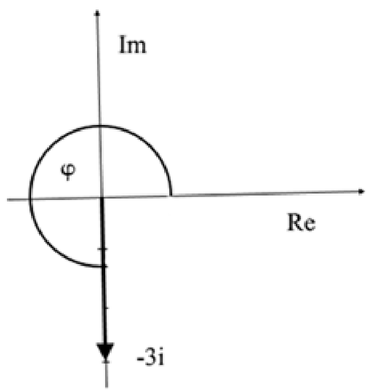
a) Először ábrázoljuk a komplex számot.



A vektor speciális elhelyezkedése miatt az ábráról leolvasható, hogy a vektor hossza 5, hajlásszöge $0\,°$. Így semmiféle mellékszámolásra itt nincs szükség.

$z = 5 = 5(\cos 0\,° + i\sin 0\,°)$.

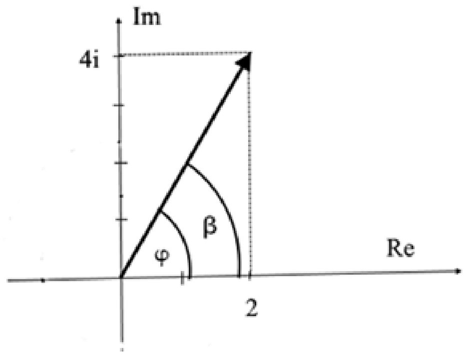
b) Most is az ábrával kell kezdeni.



Az ábráról leolvasható, hogy a vektor hossza 3, hajlásszöge pedig $270\,°$.

$z = -3i = 3(\cos 270\,° + i\sin 270\,°)$.

c) A valós és képzetes rész is pozitív, ezért egy első negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



Számítsuk ki a vektor hosszát:

$r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

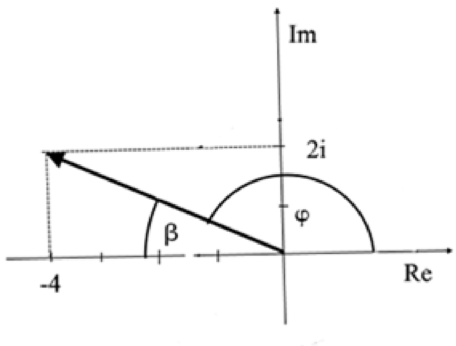
Másrészt:

$tg\beta = \frac{4}{2} \quad \to \quad \phi = \beta = 63,43\,°$

Így a keresett trigonometrikus alak:

$z = 2 + 4i = \sqrt{20}\,(\cos 63,43\,° + i\sin 63,43\,°).$

d) A valós negatív, a képzetes rész pozitív, ezért egy második negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



A szükséges számolások:

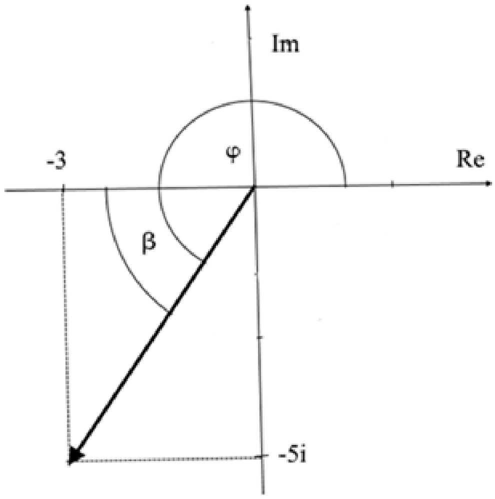
$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$tg\beta = \frac{2}{4} \quad \to \quad \phi = 180\,° - \beta = 180\,° - 26,57\,° = 153,43\,°$

A keresett trigonometrikus alak:

$z = -4 + 2i = \sqrt{20}\,(\cos 153,43\,° + i\sin 143,43\,°).$

e) A valós és képzetes rész is negatív, ezért egy harmadik negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



A szükséges számolások:

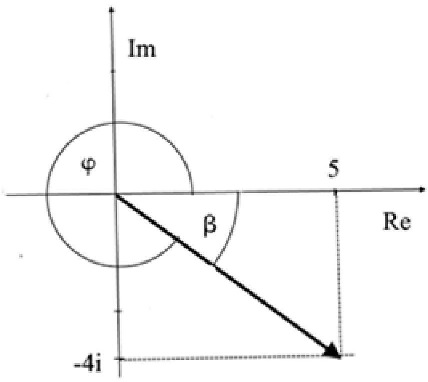
$r = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

$tg\beta = \dfrac{5}{3} \quad \rightarrow \quad \phi = 180° + \beta = 180° + 59,04° = 139,04°$

A keresett trigonometrikus alak:

$z = -3 - 5i = \sqrt{34}(\cos 139,04° + i\sin 139,04°).$

f) A valós pozitív, a képzetes rész negatív, ezért egy negyedik negyedbe eső komplex számot fogunk átírni trigonometrikus alakba.



A szükséges számolások:

$r = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

$tg\beta = \dfrac{4}{5} \quad \rightarrow \quad \phi = 360° - \beta = 360° - 38,66° = 321,34°$

A keresett trigonometrikus alak:

$z = 5 - 4i = \sqrt{41}(\cos 321,34° + i\sin 321,34°).$

5. feladat: Írja fel a következő komplex számokat algebrai alakban:

a) $z = 3(\cos 60° + i\sin 60°)$
b) $z = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$

c) $z = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 210° + i\sin 210°)$

d) $z = 5(\cos 123° + i\sin 123°)$.

Megoldás:

a) $z = 3(\cos 60° + i\sin 60°) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

b) $z = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 1 - i$

c) $z = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 210° + i\sin 210°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{-1}{2}\right)\right) = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

d) $z = 5(\cos 123° + i\sin 123°) = 5(-0,5446 + i \cdot 0,8387) = -2,723 + 4,1935i$.

6. feladat: Legyen $z = \frac{6}{\sqrt{2}}(\cos 315° + i\sin 315°)$. Határozza meg $\mathrm{Im}(z)$ és $\mathrm{Re}(z)$ értékeket!

Megoldás: A trigonometrikus alakból át kell térni az algebrai alakra, hogy válaszolni tudjunk.

$$z = \frac{6}{\sqrt{2}}(\cos 315° + i\sin 315°) = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 3 - 3i \rightarrow \mathrm{Re}(z) = 3,\ \mathrm{Im}(z) = -3.$$

Ellenőrző kérdések

9. kérdés: Mennyi az $5 - 4i$ komplex szám abszolút értéke?

- 9
- 3
- $\sqrt{41}$
- 1

mehet

10. kérdés: Mekkora a $-2 - 3i$ hajlásszöge?

- $236,31°$
- $326,31°$
- $146,31°$
- $213,63°$

mehet

11. kérdés: $\sqrt{3} - i$ trigonometrikus alakja:

- $2(\cos 320° + i\sin 320°)$
- $2(\cos 300° + i\sin 300°)$
- $2(\cos 330° + i\sin 330°)$

- [ ] $2(\cos 210° + i\sin 210°)$

mehet

12. kérdés: $\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$ **algebrai alakja:**

- [x] $-1+i$
- [ ] $1-i$
- [ ] $-1-i$
- [ ] $1+i$

mehet

13. kérdés: Határozza meg a $\sqrt{3}(\cos 240° + i\sin 240°)$ **komplex szám képzetes részét!**

- [x] $-1,5$
- [ ] $1,5$
- [ ] $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- [ ] $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

mehet

Műveletek trigonometrikus alakban

Trigonometrikus alakban adott komplex számok esetében elvégezhető műveletek: *szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás.*

Ha trigonometrikus alakban adott komplex számokat összeadni illetve kivonni kell, akkor először a számokat algebrai alakba váltjuk át, majd abban az alakban végezzük el a kívánt műveletet.

Szorzás, osztás, hatványozás

Tétel: Legyen $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1-\phi_2) + i\sin(\phi_1-\phi_2)),$$

$$z_1^n = r_1^n(\cos(n\phi_1) + i\sin(n\phi_1)).$$

A műveletek elvégzése során ügyelni kell arra, hogy az eredmény hajlásszöge itt is a $0°$ és $360°$ tartományba essen. Ha a képletek alkalmazása során forgásszöget vagy negatív szöget kapnánk, akkor a megfelelő korrekciót el kell végezni.

Kidolgozott feladatok

7. feladat: Legyen $z_1 = 2(\cos 135° + i\sin 135°)$, $z_2 = 5(\cos 210° + i\sin 210°)$ és

$z_3 = 3(\cos 322° + i\sin 322°)$. Adja meg a következő kifejezések értékét trigonometrikus alakban:

HAHÓ, HAHÓÓÓ!!! Hiányoznak a kifejezések!!!

Megoldás:

a) $z_1 z_2 = 2(\cos 135° + i\sin 135°) \cdot 5(\cos 210° + i\sin 210°) = 10(\cos 345° + i\sin 345°)$

b) $z_3 z_2 = 3(\cos 322° + i\sin 322°) \cdot 5(\cos 210° + i\sin 210°) = 15(\cos 532° + i\sin 532°) =$

$15(\cos 172° + i\sin 172°)$

A megoldásnál felhasználva, hogy $532° - 360° = 172°$.

c) $\frac{z_3}{z_1} = \frac{3(\cos 322° + i\sin 322°)}{2(\cos 135° + i\sin 135°)} = \frac{3}{2}(\cos 187° + i\sin 187°)$

d) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{5(\cos 210° + i\sin 210°)}{3(\cos 322° + i\sin 322°)} = \frac{5}{3}(\cos((-112°)) + i\sin(-112°)) = \frac{5}{3}(\cos 248° + i\sin 248°)$

A megoldásnál felhasználva, hogy $-112° + 360° = 248°$.

e) $z_1^3 = 2^3(\cos 405° + i\sin 405°) = 8(\cos 45° + i\sin 45°)$

f) $z_3^4 = 3^4(\cos 1288° + i\sin 1288°) = 81(\cos 208° + i\sin 208°)$

g) $\frac{z_3}{z_1 z_2^2} = \frac{3(\cos 322° + i\sin 322°)}{2(\cos 135° + i\sin 135°) \cdot 5^2(\cos 420° + i\sin 420°)} =$

$\frac{3(\cos 322° + i\sin 322°)}{2(\cos 135° + i\sin 135°) \cdot 5^2(\cos 60° + i\sin 60°)} =$

$\frac{3(\cos 322° + i\sin 322°)}{50(\cos 195° + i\sin 195°)} = \frac{3}{50}(\cos 127° + i\sin 127°)$

8. feladat: Írja fel a következő számot trigonometrikus alakban: $(-3 + 4i) \cdot 2(\cos 110° + i\sin 110°)$.

Megoldás: A szorzat első tényezője algebrai alakban van adva. Ahhoz, hogy a szorzást el tudjuk végezni, ezt át kell írnunk trigonometrikus alakba.

$tg\beta = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \beta = 53,13° \quad \rightarrow \quad \alpha = 126,87°$

$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

Tehát

$-3 + 4i = 5(\cos 126,87° + i\sin 126,87°)$.

Így már el lehet végezni a szorzást, az eredmény:

$5(\cos 126,87° + i\sin 126,87°) \cdot 2(\cos 110° + i\sin 110°) = 10(\cos 236,87° + i\sin 236,87°)$.

9. feladat: Írja fel a következő számot trigonometrikus alakban: $\frac{3i}{2(\cos 120° + i\sin 120°)}$.

Megoldás:

$\frac{3i}{2(\cos 120° + i\sin 120°)} = \frac{3(\cos 90° + i\sin 90°)}{2(\cos 120° + i\sin 120°)} =$

$\frac{3(\cos 90° + i\sin 90°)}{2(\cos 120° + i\sin 120°)} = \frac{3}{2}(\cos(-30°) + i\sin(-30°)) = \frac{3}{2}(\cos 330° + i\sin 330°)$.

10. feladat: Írja fel a következő számot trigonometrikus alakban: $(3-3i)^4$.

Megoldás: Negyedik hatványra trigonometrikus alakban célszerű emelni. Ehhez az algebrai alakban adott komplex számot át kell váltani trigonometrikus alakba.

$$tg\beta = \frac{3}{3} \quad \rightarrow \quad \beta = 45° \quad \rightarrow \quad \alpha = 315°$$

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

$$(3-3i)^4 = (\sqrt{18}(\cos 315° + i\sin 315°))^4 = \sqrt{18}^4(\cos 1260° + i\sin 1260°) =$$

$$324(\cos 180° + i\sin 180°).$$

Gyökvonás

Tétel: A z komplex számnak pontosan n darab n-edik gyöke van. Ha z trigonometrikus alakja $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, akkor n-edik gyökei az

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + k\cdot 360°}{n} + i\sin\frac{\phi + k\cdot 360°}{n}\right)$$

komplex számok, ahol $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Megjegyzés: A nemnegatív valós számok halmazán a gyökvonás egyértelmű művelet, azaz egy nemnegatív valós számnak mindig pontosan egy darab n-edik gyöke van. Ettől eltérően a komplex számok körében a gyökvonás többértékű művelet.

Ha a z komplex szám n-edik gyökeit ábrázoljuk a koordináta rendszerben, akkor ($n \geq 3$ esetén) a megfelelő gyökök egy szabályos n-szög csúcsaiba mutató helyvektorok.

Kidolgozott feladatok

11. feladat: Legyen $z = 32(\cos 150° + i\sin 150°)$. Határozzuk meg $\sqrt[5]{z}$ értékeit!

Megoldás:

$$z_k = \sqrt[5]{32}\left(\cos\frac{150° + k\cdot 360°}{5} + i\sin\frac{150° + k\cdot 360°}{5}\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Azaz:

$$\begin{array}{ll} k=0 & z_0 = 2(\cos 30° + i\sin 30°) \\ k=1 & z_1 = 2(\cos 102° + i\sin 102°) \\ k=2 & z_2 = 2(\cos 174° + i\sin 174°) \\ k=3 & z_3 = 2(\cos 246° + i\sin 246°) \\ k=4 & z_4 = 2(\cos 318° + i\sin 318°) \end{array}.$$

12. feladat: Számítsuk ki $\sqrt[4]{-81}$ értékeit!

Megoldás: Az algebrai alakban adott komplex számot át kell váltani trigonometrikus alakba.

$$-81 = 81(\cos 180° + i\sin 180°).$$

Ekkor már alkalmazható a gyökvonás képlete:

$$z_k = \sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{180° + k\cdot 360°}{4} + i\sin\frac{180° + k\cdot 360°}{4}\right),$$ ahol $k = 0, 1, 2, 3$.

Azaz:

$$\begin{array}{ll} k=0 & z_0 = 3(\cos 45° + i\sin 45°) \\ k=1 & z_1 = 3(\cos 135° + i\sin 135°) \\ k=2 & z_2 = 3(\cos 225° + i\sin 225°) \\ k=3 & z_3 = 3(\cos 315° + i\sin 315°) \end{array}.$$

13. feladat: Számítsuk ki $\sqrt[3]{-3-3i}$ értékeit!

Megoldás: A gyök alatt szereplő komplex számot át kell írni trigonometrikus alakba.

$$tg\beta = \frac{3}{3} \quad \to \quad \beta = 45° \quad \to \quad \alpha = 225°$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}.$$

Alkalmazva a gyökvonás képletét:

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{18}}\left(\cos\frac{225° + k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{225° + k\cdot 360°}{3}\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2.$

Azaz:

$$\begin{array}{ll} k=0 & z_0 = \sqrt[6]{18}(\cos 75° + i\sin 75°) \\ k=1 & z_1 = \sqrt[6]{18}(\cos 195° + i\sin 195°) \\ k=2 & z_2 = \sqrt[6]{18}(\cos 315° + i\sin 315°) \end{array}.$$

14. feladat: Adja meg $\sqrt{\frac{1-i}{2(\cos 200° + i\sin 200°)}}$ értékeit!

Megoldás:

$$\sqrt{\frac{1-i}{2(\cos 200° + i\sin 200°)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)}{2(\cos 200° + i\sin 200°)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 115° + i\sin 115°)}$$

Alkalmazva a gyökvonás képletét:

$$z_k = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{115° + k\cdot 360}{2} + i\sin\frac{115° + k\cdot 360}{2}\right),$$

ahol $k = 0, 1.$

Azaz:

$$\begin{array}{ll} k=0 & z_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos 57,5° + i\sin 57,5°) \\ k=1 & z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\cos 237,5° + i\sin 237,5°) \end{array}.$$

Ellenőrző kérdések

14. kérdés: Határozza meg $\frac{1}{2(\cos 105° + i\sin 105°)}$ trigonometrikus alakját!

- [x] $\frac{1}{2}(\cos 255° + i\sin 255°)$
- [ ] $\frac{1}{2}(\cos 345° + i\sin 345°)$

- $\frac{1}{2}(\cos 75° + i \sin 75°)$
- $\frac{1}{2}(\cos 165° + i \sin 165°)$

mehet

15. kérdés: Legyen $z = -2 + 2i$. Mekkora z^3 hajlásszöge?

- 135°
- 45°
- 315°
- 225°

mehet

16. kérdés: Legyen $z_1 = 3 + 4i$ és $z_2 = 3(\cos 100° + i \sin 100°)$. Határozza meg a $z_1^4 z_2$ értékét!

- $60(\cos 312,52° + i \sin 312,52°)$
- $15(\cos 153,13° + i \sin 153,13°)$
- $1875(\cos 153,13° + i \sin 153,13°)$
- $1875(\cos 312,52° + i \sin 312,52°)$

mehet

17. kérdés: Határozza meg $-4 + 5i$ köbgyökei közül a legnagyobb szögűnek a hajlásszögét!

- 282,87°
- 231,3°
- 287,11°
- 321,3°

mehet

18. kérdés: Határozza meg a $-5i$ negyedik gyökei közül a legkisebb szögűnek a hajlásszögét!

- 90°
- 45°
- 76,5°
- 67,5°

mehet

19. kérdés: Mennyi a $-8i$ köbgyökeinek szorzata?

- $8i$
- $-8i$
- 8
- -8

mehet

Az algebra alaptétele, egyenletek

Ebben a szakaszban polinomiális egyenleteket oldunk meg a komplex számok halmazán. A megoldás során szem előtt tartjuk az algebra alaptételét.

Tétel: Minden

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

alakú egyenletnek, ahol $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_0 \in C,\quad a_n \neq 0$ és $n \in Z^+$ pontosan n darab gyöke van a komplex számok körében.

Kidolgozott feladatok

15. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$2i + 3iz = 4 - 5z$$

Megoldás: Ez egy elsőfokú egyenlet, amit rendezéssel oldunk meg.

$$2i + 3iz = 4 - 5z \quad \to \quad z(5+3i) = 4 - 2i$$

$$z = \frac{4-2i}{5+3i} = \frac{4-2i}{5+3i} \cdot \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{20 - 12i - 10i + 6i^2}{25 - 9i^2} = \frac{14-22i}{34} = \frac{14}{34} - \frac{22}{34}i.$$

16. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet és ábrázolja a kapott gyököket:

$$z^3 - 1 = 0.$$

Megoldás:

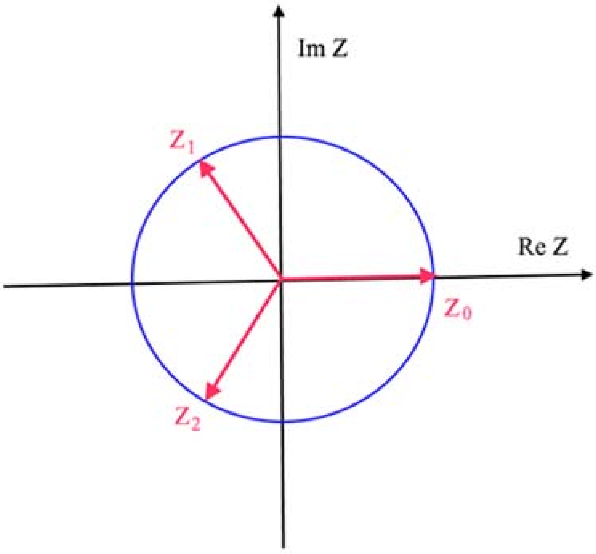
$$z^3 = 1 \quad \to \quad z = \sqrt[3]{1} \quad \to \quad z = \sqrt[3]{1(\cos 0° + i\sin 0°)}$$

$$z_k = 1\left(\cos\frac{0° + k\cdot 360°}{3} + i\sin\frac{0° + k\cdot 360°}{3}\right),$$ ahol $k = 0, 1, 2.$

$$k = 0 \quad z_0 = 1(\cos 0° + i\sin 0°) = 1 + 0i$$

$$k = 1 \quad z_1 = 1(\cos 120° + i\sin 120°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \quad z_2 = 1(\cos 240° + i\sin 240°) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



17. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^2 + 4z + 5 = 0$$

Megoldás: Ez egy másodfokú egyenlet. Használjuk a gyökképletet:

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -1 + i \\ -1 - i \end{cases}$$

Összetett feladatok

18. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^2 + 19 + 4i = (4 + 2i)z$$

Megoldás: Az egyenletet nullára rendezzük, majd használjuk a gyökképletet:

$$z^2 - (4 + 2i)z + 19 + 4i = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{(4 + 2i) \pm \sqrt{(-4 - 2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (19 + 4i)}}{2} =$$

$$= \frac{4 + 2i \pm \sqrt{16 + 16i + 4i^2 - 76 - 16i}}{2} = \frac{4 + 2i \pm \sqrt{-64}}{2} =$$

$$\frac{4 + 2i \pm 8i}{2} = \begin{cases} 2 + 5i \\ 2 - 3i \end{cases}.$$

19. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$z^6 + 8\sqrt{3}\, z^3 = 64\, i^{2010}$$

Megoldás: Ez egy másodfokú egyenletre visszavezethető egyenlet, ha a $z^3 = x$ helyettesítést elvégezzük. A rendezésnél használjuk ki az $i^{2010} = \left(i^2\right)^{1005} = (-1)^{1005} = -1$ összefüggést.

$$z^6 + 8\sqrt{3}\, z^3 = 64\, i^{2010} \quad \rightarrow \quad x^2 + 8\sqrt{3}x + 64 = 0$$

Használjuk a gyökképletet x meghatározására:

$$x_{1,2}=\frac{-8\sqrt{3}\pm\sqrt{(8\sqrt{3})^2-4\cdot 1\cdot 64}}{2}=\frac{-8\sqrt{3}\pm\sqrt{-64}}{2}=$$

$$=\frac{-8\sqrt{3}\pm\sqrt{64i^2}}{2}=\frac{-8\sqrt{3}\pm 8i}{2}=\begin{cases}-4\sqrt{3}+4i\\ -4\sqrt{3}-4i\end{cases}.$$

Elvégezzük a visszahelyettesítést.

Ha

$$x_1=z^3=-4\sqrt{3}+4i=8(\cos 150°+i\sin 150°)$$

$z_k=2\left(\cos\dfrac{150°+k\cdot 360°}{3}+i\sin\dfrac{150°+k\cdot 360°}{3}\right)$ ahol $k=0,1,2.$

Ha

$$x_2=z^3=-4\sqrt{3}-4i=8(\cos 210°+i\sin 210°)$$

$z_l=2\left(\cos\dfrac{210°+l\cdot 360°}{3}+i\sin\dfrac{210°+l\cdot 360°}{3}\right)$, ahol $l=0,1,2.$

Tehát az egyenlet gyökei:

$$\begin{array}{ll} k=0 & z_0=2(\cos 50°+i\sin 50°)\\ k=1 & z_1=2(\cos 170°+i\sin 170°)\\ k=2 & z_2=2(\cos 290°+i\sin 290°)\\ l=0 & z_3=2(\cos 70°+i\sin 70°)\\ l=1 & z_4=2(\cos 190°+i\sin 190°)\\ l=2 & z_5=2(\cos 310°+i\sin 310°).\end{array}$$

20. feladat: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2-3i)z^4+8\sqrt{2}(\cos 225°+i\sin 225°)=-40+40i$$

Megoldás: Először a trigonometrikus alakban adott komplex számot át kell írni algebrai alakra, majd az egyenletet rendezzük.

$$(2-3i)z^4+8\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-40+40i$$

$$(2-3i)z^4-8-8i=-40+40i \quad\rightarrow (2-3i)z^4=-31+48i$$

$$z^4=\frac{-32+48i}{2-3i}=\frac{-16(2-3i)}{2-3i}=-16=16(\cos 180°+i\sin 180°)$$

Az egyenlet gyökei:

$$z_k=2\left(\cos\frac{180°+k\cdot 360°}{4}+i\sin\frac{180°+k\cdot 360°}{4}\right),$$

ahol $k=0,1,2,3.$

21. feladat: $\left(i-\dfrac{i-1}{z}\right)\cdot\left(z-i^{103}+3iz\right)=0$

Megoldás: Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla:

$i-\dfrac{i-1}{z}=0$ vagy $z-i^{103}+3iz=0.$

Az első egyenlet megoldása:

$$i-\frac{i-1}{z}=0 \quad \rightarrow \quad i=\frac{i-1}{z}$$

$$z=\frac{i-1}{i}=\frac{i-1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{-i^2+i}{-i^2}=\frac{1+i}{1}=1+i.$$

A második egyenlet megoldásánál használjuk ki, hogy $i^{103}=i^{102}\cdot i=\left(i^2\right)^{51}\cdot i=-i.$

$$z+i+3iz=0 \quad \rightarrow \quad z=\frac{-i}{1+3i}=\frac{-i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}=-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i.$$

Tehát az egyenlet megoldásai:

$z_1=1+i$ és $z_2=-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i.$

Ellenőrző kérdések

20. kérdés: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet: $z^2+2z+2i=-1-2iz$

- $z_1=-1 \quad z_2=-1-2i$
- $z_1=-1 \quad z_2=1+2i$
- $z_1=1 \quad z_2=-1-2i$
- $z_1=1 \quad z_2=1+2i$

mehet

21. kérdés: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet: $z^4+iz^2+12=0$

- $z_k=\sqrt{3}\left(\cos\frac{0°+k\cdot 360°}{2}+i\sin\frac{0°+k\cdot 360°}{2}\right) \quad k=0,1$
  $z_l=2\left(\cos\frac{180°+l\cdot 360°}{2}+i\sin\frac{180°+l\cdot 360°}{2}\right) \quad l=0,1$
- $z_k=\sqrt{3}\left(\cos\frac{180°+k\cdot 360°}{2}+i\sin\frac{180°+k\cdot 360°}{2}\right) \quad k=0,1$
  $z_l=2\left(\cos\frac{0°+l\cdot 360°}{2}+i\sin\frac{0°+l\cdot 360°}{2}\right) \quad l=0,1$
- $z_k=\sqrt{3}\left(\cos\frac{90°+k\cdot 360°}{2}+i\sin\frac{90°+k\cdot 360°}{2}\right) \quad k=0,1$
  $z_l=2\left(\cos\frac{270°+l\cdot 360°}{2}+i\sin\frac{270°+l\cdot 360°}{2}\right) \quad l=0,1$
- $z_k=\sqrt{3}\left(\cos\frac{270°+k\cdot 360°}{2}+i\sin\frac{270°+k\cdot 360°}{2}\right) \quad k=0,1$
  $z_l=2\left(\cos\frac{90°+l\cdot 360°}{2}+i\sin\frac{90°+l\cdot 360°}{2}\right) \quad l=0,1$

mehet

22. kérdés: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet: $(1-2\sqrt{3}i)\cdot z^3-8=24(\cos 60°+i\sin 60°)$

- $z = 2(\cos(30° + k \cdot 120°) + i\sin(30° + k \cdot 120°)) \quad k = 0, 1, 2$
- $z = 2(\cos(40° + k \cdot 120°) + i\sin(40° + k \cdot 120°)) \quad k = 0, 1, 2$
- $z = 2(\cos(60° + k \cdot 120°) + i\sin(60° + k \cdot 120°)) \quad k = 0, 1, 2$
- $z = 2(\cos(45° + k \cdot 120°) + i\sin(45° + k \cdot 120°)) \quad k = 0, 1, 2$

mehet

23. kérdés: Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenletet: $\left(z^2 - 4z + 5\right)\left(z^4 + 81i\right) = 0.$

- $z_1 = 2 + i \;\; z_2 = 2 - i$
  $z_k = 3(\cos(45° + k \cdot 90°) + i\sin(45° + k \cdot 90°)) \quad k = 0, 1, 2, 3$
- $z_1 = 2 + i \;\; z_2 = 2 - i$
  $z_k = 3(\cos(60° + k \cdot 90°) + i\sin(60° + k \cdot 90°)) \quad k = 0, 1, 2, 3$
- $z_1 = -2 + i \;\; z_2 = -2 - i$
  $z_k = 3(\cos(67,5° + k \cdot 90°) + i\sin(67,5° + k \cdot 90°)) \quad k = 0, 1, 2, 3$
- $z_1 = 2 + i \;\; z_2 = 2 - i$
  $z_k = 3(\cos(67,5° + k \cdot 90°) + i\sin(67,5° + k \cdot 90°)) \quad k = 0, 1, 2, 3$

mehet