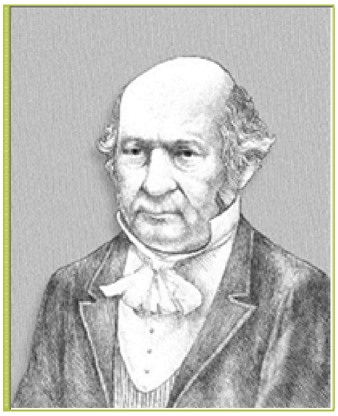
Tanulási cél: a vektorok fogalmának és a velük végezhető alapvető műveletek megismerése, ezek gyakorlati használhatóságának ismertetése.

Térbeli vektorok definíciója, műveletek és ezek geometriai jelentései

W. R. Hamilton (1805-1865) ír matematikus, csillagász és fizikus volt az, aki először használta a vektor kifejezést. A vektor elnevezés a csillagászatból került át a matematikába. Ott az ellipszis fókuszában álló Napból a bolygókhoz húzott irányított szakasz elnevezésére szolgált (vectus = húzni, vonni).

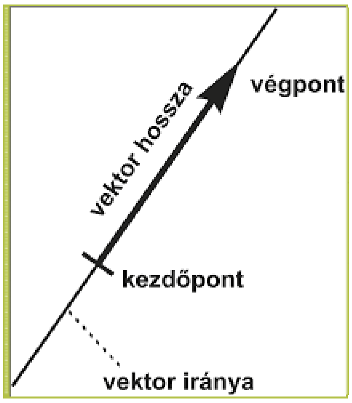


Vannak olyan mennyiségek, amelyeket a nagyságukkal egyszerűen meg tudunk határozni. Ilyenek például a tömeg, az idő, a hosszúság. Ezek megadásához elegendő egy szám és egy alkalmasan választott mértékegység. Ugyanakkor például az erő, az elmozdulás vagy a sebesség megadásához több információra is szükség van. Például ha egy test elmozdulását szeretnénk leírni, akkor meg kell mondanunk, hogy milyen irányban és mekkora távolságra mozdul el. Hasonlóan, egy test sebességének megadásához tudnunk kell, hogy milyen irányban és mekkora sebességgel halad.

Definíció: A térbeli irányított szakaszokat **vektor**oknak nevezzük. Egy vektort három adat határoz meg egyértelműen, a nagysága (hossza), az állása (melyik egyenessel párhuzamos), és az irányítása (az egyenesen merre mutat).

Definíció: Két vektor egyenlő, ha mindhárom jellemzőjük azonos, azaz ha van olyan párhuzamos eltolás, amellyel fedésbe hozhatók.

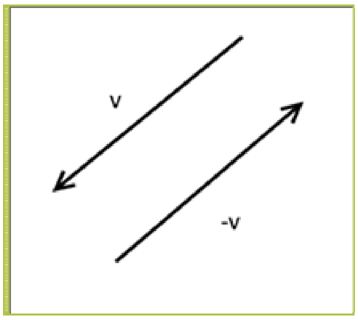
Jelölések: Ha egy $\mathbf{v}$ vektor az A kezdőpontból a B végpontba mutat, akkor a következő jelöléseket használhatjuk: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \underline{v}$.



Definíció: A $\mathbf{v}$ vektor hosszán a vektort szemléltető szakasz hosszát értjük. Jele: $\|\mathbf{v}\|$. Ha ez az érték 1, akkor a vektort **egységvektor**nak nevezzük.

Definíció: Azt a vektort, amelynek hossza 0, **nullvektor**nak nevezzük. A nullvektor iránya tetszőleges, azaz minden vektorral párhuzamos és minden vektorra merőleges. Jele: $\mathbf{0}$.

Definíció: A $\mathbf{v}$ **ellentett**jének nevezzük és $-\mathbf{v}$-vel jelöljük a $\mathbf{v}$-vel egyenlő hosszúságú, azonos állású, de ellentétes irányítottságú vektort.

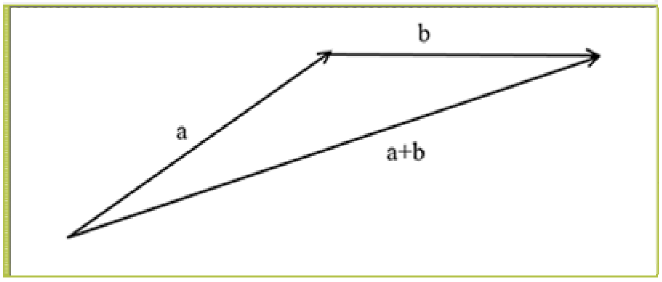


Műveletek vektorokkal

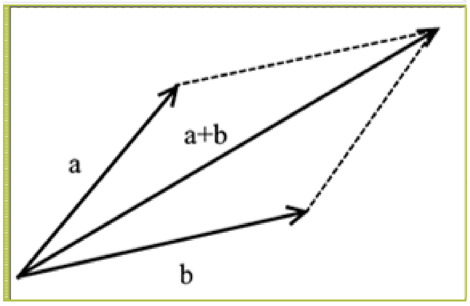
Összeadás

Definíció: Adott két vektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat toljuk el önmagukkal párhuzamosan úgy, hogy a $\mathbf{b}$ vektor kezdőpontja az $\mathbf{a}$ vektor végpontjába kerüljön. Ekkor az $\mathbf{a}$ vektor kezdőpontjából a $\mathbf{b}$ vektor végpontjába mutató vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegének (eredőjének) nevezzük. Jele: $\mathbf{a}+\mathbf{b}$

Háromszög módszer



Paralelogramma szabály

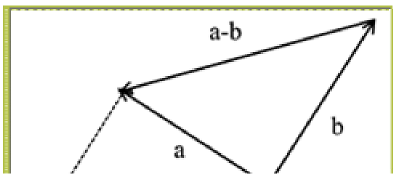


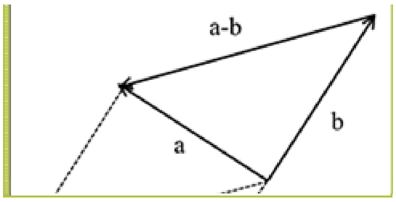
Tétel: A vektorok összeadása kommutatív $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ és asszociatív: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ művelet.

Alkalmazás: A testek mozgásának vizsgálatakor (dinamikai és kinematikai feladatokban) a következő modellt használjuk: a testet a tömegközéppontjával helyettesítjük, és vizsgáljuk az erre ható erők eredőjét. A tömegpont nyugalomban van, ha a rá ható erők eredője zérus (Newton I. törvénye miatt; összegük nullvektor).

Különbség

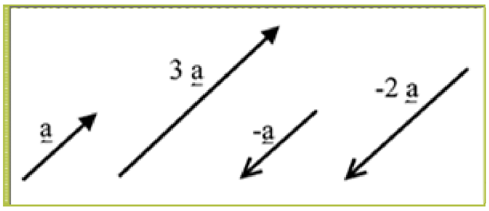
Definíció: $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok különbségén értjük és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$-vel jelöljük azt vektort, amelyet $\mathbf{b}$-hez adva $\mathbf{a}$-t kapunk. (Toljuk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat közös kezdőpontba. Ekkor a $\mathbf{b}$ vektor végpontjából az $\mathbf{a}$ vektor végpontjába mutató vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok különbségének nevezzük és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$-vel jelöljük.)





Vektorok szorzása valós számmal (skalárral)

Definíció: Az $\mathbf{a}$ nem nullvektor és a $\lambda \neq 0$valós szám szorzatán értjük és $\lambda\mathbf{a}$-val jelöljük azt az $\mathbf{a}$ vektorral azonos állású vektort, amelynek hossza $|\lambda|$ $\mathbf{a}$, irányítása $\lambda > 0$esetében azonos, $\lambda < 0$ esetén pedig ellentétes az $\mathbf{a}$ vektor irányításával.



A skalárral való szorzásra teljesülnek a következők:

$(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu) \cdot \mathbf{a}$ (asszociativitás)

$\lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}$ (disztributivitás)

$(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (disztributivitás)

Definíció: Legyenek $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ tetszőleges vektorok, λ_1, λ_2, $\ldots$ λ_n pedig tetszőleges valós számok. Ekkor a $\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_n\mathbf{v_n}$vektort a $\mathbf{v}_i$ vektorok λ_i együtthatókkal képzett lineáris kombinációjának nevezzük.

Megjegyzés: a fenti együtthatók között szerepelhetnek negatív, pozitív vagy akár nulla értékűek is.

Vektorok felbonthatósága

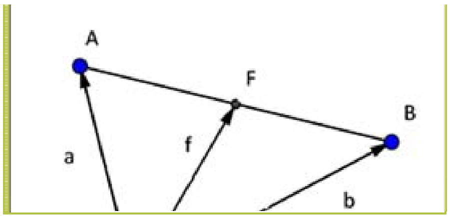
Tétel: (síkban) Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nullvektoroktól különböző nem párhuzamos vektorok, akkor az általuk meghatározott sík bármely $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előállítható az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$ alakban**,** ahol $\lambda_1$és $\lambda_2$egyértelműen meghatározott valós számok. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felbontható $\mathbf{a}$-val és $\mathbf{b}$-vel párhuzamos összetevőkre. Ebben az esetben szokás az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokat bázisvektoroknak nevezni.

Tétel: (térben) Legyen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ három nullvektortól különböző nem egysíkú vektor. Ekkor minden térbeli vektor egyértelműen előáll az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbf{v}$ vektorhoz egyértelműen van olyan λ_1, λ_2, $\lambda_3$valós számhármas, melyre $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c}$. Ilyenkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokat bázisnak és ezeket az együtthatókat a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$; $\mathbf{c}$ bázishoz tartozó koordinátáinak nevezzük.

Megjegyzés: Ez a tétel azt jelenti, hogy ha rögzítünk három nem egysíkú vektort a térben, tehát megadunk egy bázist, akkor minden vektort egyértelműen tudunk számhármassal jellemezni ebben a bázisban. A három, nem egysíkú, nullvektortól különböző vektor bármilyen lehet, tehát tetszőleges számú bázist megadhatunk. Természetesen más bázishoz, más koordináták tartoznak ugyanazon $\mathbf{v}$ vektor esetén. A továbbiakban majd egy kitüntetett bázist fogunk használni, mégpedig az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységnyi hosszúságú, egymásra páronként merőleges vektorokat, amelyek ebben a sorrendben **jobbsodrású rendszert** alkotnak.

Definíció: Az origóból a tér egy tetszőleges pontjába mutató vektort a pont **helyvektor**ának nevezzük.

Tétel: Legyen A és B két különböző térbeli pont, jelölje F az AB szakasz felezőpontját, a megfelelő pontokba mutató helyvektorok pedig legyenek rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{f}$. Ekkor a felezőpontba mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe, azaz $\mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$.

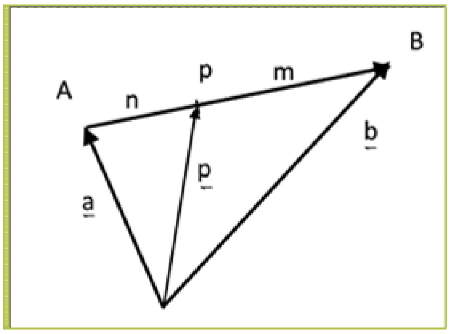


Bizonyítás: Ezt a bizonyítást azért érdemes levezetni, mivel a benne szereplő egyszerű ötletet más feladatok megoldásánál is használni fogjuk.

Az ábráról leolvasható a következő összefüggés: $\mathbf{f} = \mathbf{a} + \overline{AF}$ és $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Elvégezve a behelyettesítést:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} + \overline{AF} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}.$$

Tétel: Legyen A és B két különböző térbeli pont, és P az AB szakasz azon pontja, melyre $AP : PB = n : m$. Ha a megfelelő pontokba mutató helyvektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{p}$, akkor $\mathbf{p} = \dfrac{m \cdot \mathbf{a} + n \cdot \mathbf{b}}{m + n}$



Tétel: Ha az ABC háromszög csúcsaiba mutató helyvektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, akkor a háromszög súlypontjába mutató $\mathbf{s}$ helyvektor:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Kidolgozott feladatok

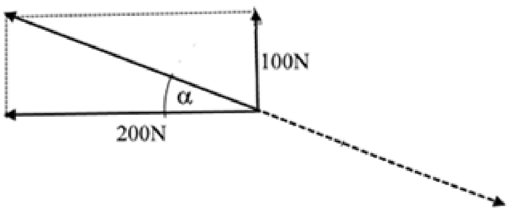
1. feladat: Egy testre $100\ \mathrm{N}$ nagyságú északi és egy $200\ \mathrm{N}$ nagyságú nyugati irányba mutató erő hat. Mekkora és milyen irányú erővel lehet a testet nyugalomban tartani?

Megoldás: Mivel a két vektor merőleges egymásra, ezért az összegük (eredőjük) nagysága Pitagorasz-tétellel számolható:

$$\|\mathbf{F}_e\| = \sqrt{100^2 + 200^2} \approx 223,6\ \mathrm{N}$$

Meghatározzuk az eredő nyugati irányhoz képest észak felé vett hajlásszögét, melyet α-val jelölünk:

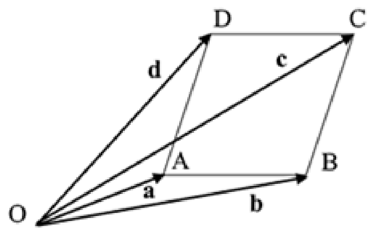
$$tg\alpha = \frac{100}{200} \qquad \alpha \approx 26,57\,°$$



Ha a testet nyugalomban akarjuk tartani, akkor az eredővel ellentétes irányú, vele azonos nagyságú erőt kell alkalmaznunk. Tehát egy $\approx 223,6\ \mathrm{N}$ nagyságú, a keleti iránytól lefelé $\approx 26,57\,°$-ban hajló erőre van szükség.

2. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma csúcsainak helyvektorai rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Fejezzük ki a $\mathbf{d}$ vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok segítségével!

Megoldás: A helyvektorok a sík egy tetszőleges pontjából az adott pontba mutató vektorok.

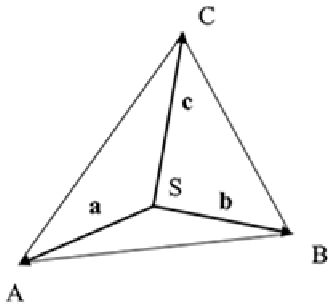


Az ábráról a következő olvasható le:

$\mathbf{d} = \overrightarrow{OD} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{c} - \mathbf{b}$.

3. feladat: Az ABC háromszög S súlypontjából a csúcsokba mutató helyvektorok legyenek rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Határozzuk meg az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok összegét!

Megoldás: Készítsünk ábrát.



Legyen F az AB oldal felezőpontja, ezért $\overrightarrow{SF} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$. A súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadoló pontja, ezért $\mathbf{c} = -2 \cdot \overrightarrow{SF} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Innen átrendezéssel a következőt kapjuk:

$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

4. feladat: Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja legyen D. Szerkesszük meg a D' pontot, amelyre $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} = \mathbf{0}$. Állítsuk elő a $\overrightarrow{D'A}$ és $\overrightarrow{D'B}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével.

Megoldás: Mivel a feltétel szerint $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} = \mathbf{0}$ teljesül, ezért a D' pont a D pont A-ra vonatkozó középpontos tükörképe. Ekkor

$\overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2}$

$\overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{2}$.

5. feladat: Az ABC háromszögben $AB : AC = 2 : 3$. Az A csúcsból induló belső szögfelező a szemközti oldalt D pontban metszi. Adjuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektort $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ segítségével.

Megoldás: A feladat megoldásához ismernünk kell a szögfelezők osztásarányára vonatkozó tételt. Eszerint: Bármely háromszögben egy belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.

Ennek értelmében a D pont a BC oldalon egy ötödölő pont úgy, hogy

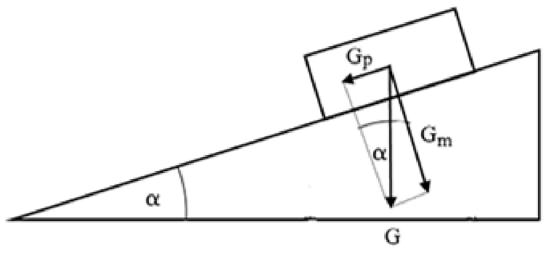
$$\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}.$$

Ekkor:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{5}.$$

6. feladat: Bontsuk fel a 20 °-os lejtőre helyezett $500\ \mathrm{N}$ súlyú testre ható súlyerőt a lejtővel párhuzamos ás arra merőleges összetevőre.

Megoldás: Rajzoljuk fel az ábrát.



A rajzon találunk merőleges szárú szögeket, ezért a keresett összetevők a következő módon számolhatók.

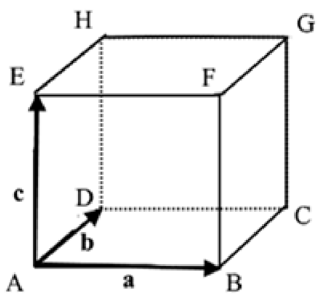
A lejtővel párhuzamos összetevő:

$$\sin\alpha = \frac{\|\mathbf{G_p}\|}{\mathbf{G}} \quad \sin 20° = \frac{\|\mathbf{G_p}\|}{500N} \quad \|\mathbf{G_p}\| \approx 171\ \mathrm{N}$$

$$\cos\alpha = \frac{\|\mathbf{G_m}\|}{\mathbf{G}} \quad \cos 20° = \frac{\|\mathbf{G_m}\|}{500N} \quad \|\mathbf{G_m}\| \approx 470\ \mathrm{N}.$$

7. feladat: Az $ABCDEFGH$ kocka A csúcsából a szomszédos csúcsokba mutató vektorok legyenek: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{AD} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. Fejezzük ki az A csúcsból az összes többi csúcsba mutató vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok segítségével. Számoljuk ki a keresett vektorok hosszát, ha a kocka élének hossza 5 egység.

Megoldás: Készítsünk ábrát.



A vektorok hosszának kiszámításánál a Pitagorasz-tételt kell alkalmazni.

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AF} = \mathbf{a} + \mathbf{c} \quad \|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$\overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AH} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Tekintsük az $ABCDEF$ szabályos hatszöget. Az A, B, C és D csúcsba mutató helyvektorokat jelölje rendre: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. Fejezzük ki az E csúcsba mutató helyvektort az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vektorok segítségével!

- $\mathbf{d} - \mathbf{a} + \mathbf{b}$
- $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{d}$
- $\mathbf{d} + \mathbf{a} - \mathbf{b}$
- $\mathbf{d} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$

mehet

2. kérdés: Az $ABCD$ paralelogramma síkjának egy tetszőleges pontja O. Igaz-e a következő összefüggés: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$?

- igen
- nem

mehet

3. kérdés: Egy egységnyi oldalú szabályos hatszög csúcsai: A, B, C, D, E, F, középpontja K. Legyen $\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$. Fejezze ki a megadott vektorok segítségével az $\overrightarrow{ED}$ és $\overrightarrow{BK}$ vektorokat. Határozza meg a keresett vektorok hosszát!

- $\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a},\ \overrightarrow{BK} = \mathbf{a} - \mathbf{b},\ \|\overrightarrow{ED}\| = 1,\ \|\overrightarrow{BK}\| = 0$
- $\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a},\ \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),\ \|\overrightarrow{ED}\| = 1,\ \|\overrightarrow{BK}\| = \frac{1}{2}$
- $\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a},\ \overrightarrow{BK} = \mathbf{a} + \mathbf{b},\ \|\overrightarrow{ED}\| = 1,\ \|\overrightarrow{BK}\| = 0$
- $\overrightarrow{ED} = -\mathbf{a},\ \overrightarrow{BK} = \mathbf{a} + \mathbf{b},\ \|\overrightarrow{ED}\| = 1,\ \|\overrightarrow{BK}\| = 1$

mehet

4. kérdés: Egy kocka A csúcsából kiinduló élvektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Állapítsa meg, hogy az alábbi vektorok közül melyek mutatnak az A-ból kiindulva valamelyik kockacsúcsba:
a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, ***b)*** $\mathbf{a} + \mathbf{c}$, ***c)*** $\mathbf{b} - \mathbf{b}$, ***d)*** $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}$

- mindegyik
- csak az *a)* nem
- csak *b)* nem
- csak *c)* nem

mehet

5. kérdés Legyen P az AB szakasz A-hoz közelebbi negyedelő pontja. Ha az A és B pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor a P pontba mutató helyvektor:

- $\frac{1}{5}(4\mathbf{a}+\mathbf{b})$
- $\frac{1}{5}(\mathbf{a}+4\mathbf{b})$
- $\frac{1}{4}(3\mathbf{a}+\mathbf{b})$
- $\frac{1}{4}(\mathbf{a}+4\mathbf{b})$

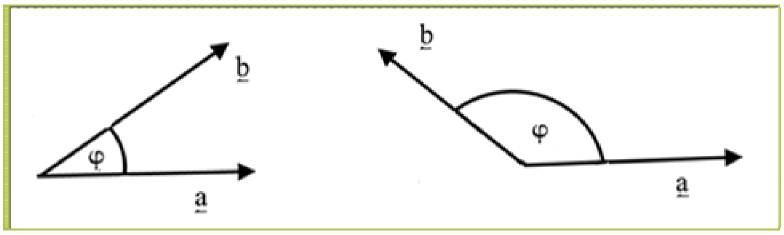
mehet

Vektorok szorzatai

Skaláris szorzat

Gyakran szükségünk van arra, hogy ismerjük egy testre ható $\mathbf{F}$ erőnek a mozgás irányába eső összetevőjét. Megmutatjuk, hogyan lehet egyszerűen kiszámítani két vektor által közbezárt szöget. A számítás kulcsa a *skalárszorzatnak* nevezett kifejezés, amit *belső szorzatként* vagy *skaláris szorzatként* is emlegetnek. Azért beszélünk skalárszorzatról, mert az eredmény egy skalár (valós szám), nem pedig vektor. A skalárszorzat segítségével ki tudjuk számítani egy vektor másik vektorra vonatkozó vetületét és valamely állandó erő által az elmozdulás irányában végzett munkát is.

Definíció: Két egyállású vektor esetében ha a vektorok egyirányúak, akkor hajlásszögük 0°, ha pedig ellentétes irányúak, akkor hajlásszögük 180°. Nem egyállású vektorok esetén a vektorok hajlásszögén a közös pontból kiinduló vektorok által bezárt konvex szöget értjük.



Definíció: Tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzatán az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \phi$ mennyiséget értjük, ahol ϕ a két vektor által közbezárt szög.

A skaláris szorzat tulajdonságai:

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$

$\langle \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$

$\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle$

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2$

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla.

Definíció: ha két vektor merőleges egymásra, akkor ezeket ortogonális vektoroknak nevezzük.

Tétel: Két vektor hegyesszöget zár be egymással akkor és csak akkor, ha skaláris szorzatuk pozitív. Két vektor tompaszöget zár be egymással akkor és csak akkor, ha skaláris szorzatuk negatív.

A skaláris szorzat egyik fontos alkalmazási területe: adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok esetén az $\mathbf{a}$ vektort egyértelműen fel tudjuk bontani $\mathbf{b}$-vel párhuzamos és $\mathbf{b}$-re merőleges összetevőkre.

Tétel: Legyen adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor, ahol $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Ekkor az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ irányába eső merőleges vetületvektora (az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$-vel párhuzamos összetevője):

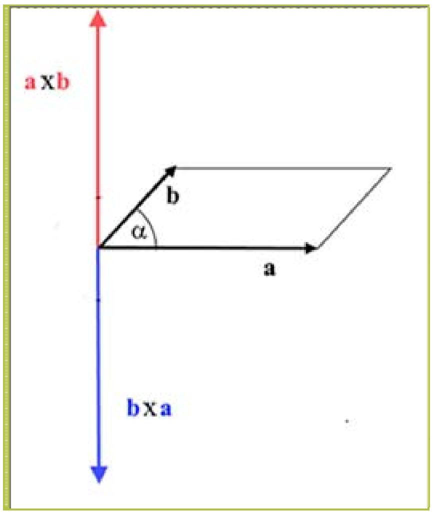
$$\mathbf{a_p} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b}$$

Vektoriális szorzat

Két vektor esetében értelmezhetünk egy másféle szorzási műveletet is. Ennek a szorzásnak az eredménye egy új vektor, az elnevezése pedig vektoriális szorzat lesz.

A vektoriális szorzat fogalmát széleskörűen alkalmazzák az elektromosság, mágnesesség, az áramlástan és az égi mechanika jelenségeinek leírásában.

Definíció: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re, hossza $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\phi$, ahol ϕ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög, és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.



A vektoriális szorzat tulajdonságai:

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

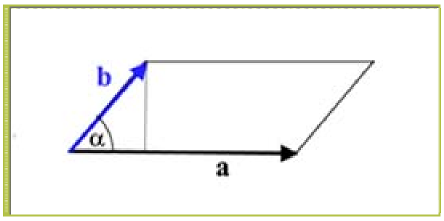
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

$(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok esetén a vektoriális szorzatuk akkor és csak akkor nullvektor, ha a két vektor egymással párhuzamos.

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám.



$T = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített háromszög területe éppen az $\frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{2}$ pozitív valós szám.

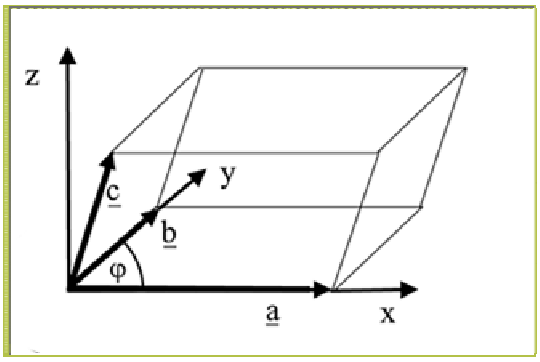
Vegyesszorzat

A vegyesszorzat elnevezés arra utal, hogy ennek kiszámításánál mindkét vektorszorzás műveletre szükségünk lesz.

Definíció: Adott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem nullvektorok vegyes szorzatán az $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ valós számot értjük.

Tétel: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok akkor és csak akkor egysíkúak, ha $\mathbf{abc} = 0$. Ha a vegyesszorzat nem nulla, akkor annak abszolút értéke az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V_p térfogatát adja:

$$V_p = |abc|.$$



Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder V_t térfogata:

$$V_t = \frac{|abc|}{6}.$$

Kidolgozott feladatok

8. feladat: Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két olyan vektor, melyek hajlásszöge $\frac{\pi}{6}$, valamint $\|\mathbf{a}\| = 5$ és $\|\mathbf{b}\| = 4$. Számolja ki az alábbi skaláris szorzatok értékét:

a) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

b) $\mathbf{a}^2$

c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$

d) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$

e) $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$

Megoldás:

a) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\frac{\pi}{6} = 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

b) $\mathbf{a}^2 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{a}\| \cos 0° = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$

c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle =$

$= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\frac{\pi}{6} + \|\mathbf{b}\|^2 = 25 + 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 16 \approx 75,64.$

d) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle =$

$= \|\mathbf{a}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\frac{\pi}{6} + \|\mathbf{b}\|^2 = 25 - 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 16 \approx 6,36$

e) $(3\mathbf{a}-2\mathbf{b})(\mathbf{a}+2\mathbf{b}) = \langle 3\mathbf{a}-2\mathbf{b}, \mathbf{a}+2\mathbf{b}\rangle = 3\langle \mathbf{a},\mathbf{a}\rangle + 6\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle - 2\langle \mathbf{b},\mathbf{a}\rangle - 4\langle \mathbf{b},\mathbf{b}\rangle =$

$= 3||\mathbf{a}||^2 + 4||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\cos\frac{\pi}{6} - 4||\mathbf{b}||^2 = 75 + 80\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 64 \approx 80,28$

9. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét, ha $||\mathbf{a}|| = 5$, $||\mathbf{b}|| = 4$ és $\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = -10$.

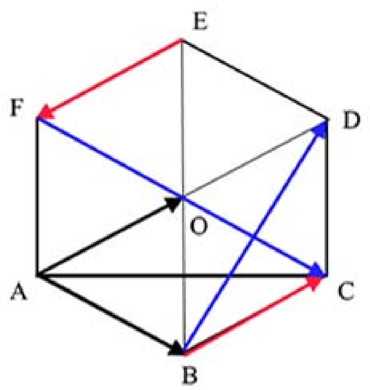
Megoldás: A skaláris szorzat definíciója szerint: $\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = ||\mathbf{a}||\cdot||\mathbf{b}||\cdot\cos\phi$, ahol ϕ a két vektor által bezárt szög. Innen:

$$\cos\phi = \frac{-10}{5\cdot 4} = -\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad \phi = 120\,°.$$

10. feladat: Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldalainak hossza 10, a hatszög középpontja O. Számítsa ki a következő skaláris szorzatokat:

$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\rangle$, $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$, $\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{EF}\rangle$, $\langle\overrightarrow{FC},\overrightarrow{BD}\rangle$, $\langle\overrightarrow{FC},\overrightarrow{EF}\rangle$.

Megoldás: Rajzoljuk fel a szabályos hatszöget.



$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\rangle = 10\cdot 10\cdot\cos 60\,° = 100\cdot 0,5 = 50.$

$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle = 10\cdot 10\sqrt{3}\cdot\cos 30\,° = 100\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 150.$

$\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{EF}\rangle = 10\cdot 10\cdot\cos 180\,° = -100.$

$\langle\overrightarrow{FC},\overrightarrow{BD}\rangle = 20\cdot 10\sqrt{3}\cdot\cos 90\,° = 0.$

$\langle\overrightarrow{FC},\overrightarrow{EF}\rangle = 20\cdot 10\cdot\cos 120\,° = 200\cdot(-0,5) = -100.$

11. feladat: Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok szöge, ha $\langle\mathbf{a}-2\mathbf{b}\rangle\langle 2\mathbf{a}-\mathbf{b}\rangle = 0,5$.

Megoldás: Az egyenlet bal oldalán végezzük el a műveleteket és használjuk ki az $\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle = ||\mathbf{a}||^2 = 1$ és $\langle\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle = ||\mathbf{b}||^2 = 1$ összefüggést:

$\langle\mathbf{a}-2\mathbf{b}\rangle\langle 2\mathbf{a}-\mathbf{b}\rangle = 2\langle\mathbf{a},\mathbf{a}\rangle - 1\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle - 4\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle + 2\langle\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle = 2 - 5\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle + 2 = 4 - 5\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle.$

Eszerint: $4 - 5\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = 0,5 \quad\rightarrow \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = \frac{3,5}{5} \quad\rightarrow \phi = 45,57\,°.$

12. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét, ha a két vektor egymással 30 °-os szöget zár be és $||\mathbf{a}|| = 5$ valamint $||\mathbf{b}|| = 10$!

Megoldás: Tudjuk, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $||\mathbf{a}\times\mathbf{b}||$ pozitív valós szám, azaz

$T = ||\mathbf{a}\times\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\sin\phi = 5\cdot 10\cdot\sin 30\,° = 25.$

13. feladat: Tekintsük az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységvektorokat. Milyen eredményt ad a $(\mathbf{j}\times\mathbf{i})\times\mathbf{j}$ művelet?

Megoldás: A keresett művelet eredménye egy vektor lesz, mivel két vektoriális szorzatot kell egymás után elvégezni. Tudjuk, hogy a vektoriális szorzat eredménye egy vektor, így ezt kétszer egymás után elvégezve is egy vektort kapunk. Ha a jobbsodrású koordináta rendszerre gondolunk, akkor tudjuk, hogy

$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = -\mathbf{k}$

$-\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = -(-\mathbf{i}) = \mathbf{i}$.

14. feladat: Tekintsük az $ABCDEF$ szabályos hatszöget, melynek oldaléle 15 cm hosszú. Mivel egyenlő az $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{CD}$?

Tudott, hogy az $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{CD}$ vegyesszorzat abszolút értéke az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát adja meg. Ebben az esetben, mivel ezek a vektorok egy szabályos hatszög oldal vektorai, ezért ezek egy síkban vannak. Ha a vektorok egy síkban vannak, akkor nem feszítenek ki testet, tehát a vegyesszorzat értéke nulla.

Eszerint: $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{CD} = 0$.

Ellenőrző kérdések

6. kérdés Ha az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög oldalainak hossza 10 egység, akkor mivel egyenlő $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle$?

- ( ) $50\sqrt{2}$
- (•) $-50\sqrt{2}$
- ( ) 50
- ( ) -50

mehet

7. kérdés: Ha az $ABCD$ paralelogramma AB oldala 6 egység, akkor mivel egyenlő $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}\|$?

- (•) 0
- ( ) 3
- ( ) 6
- ( ) 9

mehet

8. kérdés: Mivel egyenlő $\mathrm{i} \times \mathrm{k}$?

- ( ) 0
- ( ) $\mathbf{j}$
- (•) $-\mathbf{j}$
- ( ) l

mehet

9. kérdés Ha az ABC szabályos háromszög oldalainak hossza 2 egység,

akkor mivel egyenlő az $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}\overrightarrow{CA}$?

- 8
- 4
- 2
- 0

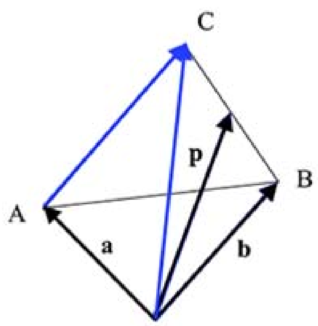
mehet

Összetett feladatok

15. feladat: Az ABC háromszög A csúcsához egy tetszőleges O pontból az $\mathbf{a}$, a B csúcsba a $\mathbf{b}$, a BC szakasz felezőpontjába pedig a $\mathbf{p}$ vektor mutat. Állítsuk elő $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{p}$ segítségével:

a) az O-ból a C-be vezető vektort
b) az $\overrightarrow{AC}$ vektort.

Megoldás: Készítsünk ábrát!



a) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + 2(\mathbf{p} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{p} - \mathbf{b}$

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\mathbf{p} - \mathbf{b} - \mathbf{a}$

16. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor egyenlő hosszú, akkor összegük és különbségük merőleges egymásra.

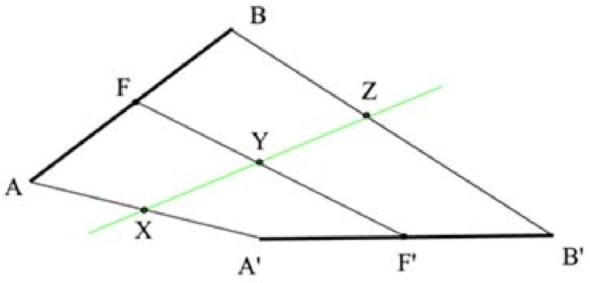
Megoldás: Abban az esetben, ha a két vektor nem párhuzamos, akkor megszerkesztve az összegüket és a különbségüket lényegében egy rombusz két átlóját kapjuk. Az elemi geometriából ismert, hogy ezek egymásra merőlegesek.

Ha a két vektor párhuzamos, akkor vagy azonos irányúak, vagy ellentétesek.

Ha azonos irányúak, akkor a különbségük $\mathbf{0}$, ha ellentétes irányúak, akkor pedig az összegük $\mathbf{0}$. Mivel a $\mathbf{0}$ vektor iránya tetszőleges, ezért a $\mathbf{0}$ vektor bármely vektorra merőleges is, ezzel az állítást igazoltuk.

17. feladat: ABés $A'B'$ tetszőleges szakaszok, ezek felezőpontja F és F'. Igaz-e, hogy az AA', BB' és FF' szakaszok felezőpontjai egy egyenesen vannak!

Megoldás:



Legyen X az AA', Y az FF' és Z a BB' szakasz felezőpontja.

Legyenek az A, B, F, A', B', F' pontokba mutató helyvektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{a'}$, $\mathbf{b'}$ és $\mathbf{f'}$.

Ekkor:

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{a'}}{2} \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{b'}}{2}.$$

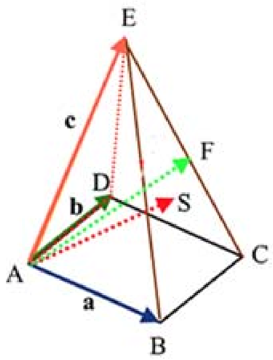
$$\overrightarrow{OY} = \frac{\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF'}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{a'}}{2}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{b'}}{2}}{2} = \frac{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}+\frac{\mathbf{a'}+\mathbf{b'}}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OZ}}{2}.$$

Ebből az következik, hogy Y felezőpontja az XZ szakasznak, tehát X, Y és Z egy egyenesen vannak.

18. feladat: Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet. Legyen $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokkal:

a) a $\overrightarrow{DE}$ vektort
b) az A csúcsból a CE él felezőpontjába mutató vektort
c) az A csúcsból a BCE oldallap súlypontjába mutató vektort.

Megoldás:



a) A $\overrightarrow{DE}$ vektor felírható két vektor különbségeként: $\overrightarrow{DE} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$.

b) A CE él, mint szakasz F felezőpontjába mutató vektort akkor tudjuk könnyen meghatározni, ha ismerjük a CE szakasz két végpontjába mutató azon helyvektorokat, amelyek az A csúcsból indulnak. A vektorok összeadására vonatkozó szabály alapján:

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b} \quad \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}.$$

A szakasz felezőpontba mutató vektor:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}}{2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}.$$

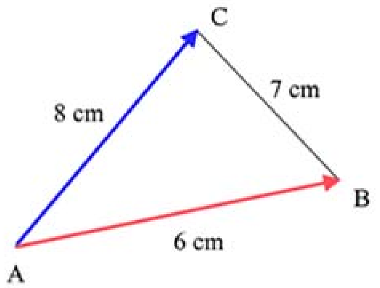
c) Az A csúcsból a BCE oldallap súlypontjába mutató vektort akkor tudjuk előállítani, ha ismerjük a B, C és E csúcsokba mutató, A pontból induló helyvektorokat. Felhasználva az előző eredményeket:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b} \quad \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}.$$

A BCE oldallap súlypontjába mutató vektor:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$$

19. feladat: Az ABC háromszögben $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm és $AC = 8$ cm. Határozzuk meg az $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ értékét!



Megoldás: A skaláris szorzat kiszámításához szükségünk van a két vektor által közbezárt szögre. Jelen esetben ez a háromszög A csúcsánál lévő szöge. Mivel ez egy általános háromszög, ezért ezt a szöget koszinusztétellel tudjuk kiszámolni. A szokásos betűzést használva:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$7^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{17}{32} \quad \rightarrow \quad \alpha \approx 57,91\,°.$$

A keresett skaláris szorzat:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 6 \cdot 8 \cdot \cos 57,91\,° = 25,2.$$

Megjegyzés: Mivel a skaláris szorzat számolásánál a szög koszinuszára van szükség, ezért nem szükséges magát a szöget kiszámolni. Megállhatunk a $\cos\alpha = \frac{17}{32}$ összefüggésnél, ezt helyettesítjük be a skaláris szorzatba, ezáltal pontos eredményt kapva.

20. feladat: A k paraméter mely értékénél lesznek merőlegesek egymásra az $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - k\mathbf{b}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$ vektorok?

Megoldás: Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla, tehát a

$$\langle \mathbf{a} + k\mathbf{b}, \mathbf{a} - k\mathbf{b} \rangle = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Kihasználva a skaláris szorzat tulajdonságait és az egyenlet bal oldalát átalakítva:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - k\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + k\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle - k^2\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

egyenlethez jutunk.

Ebből:

$$\|\mathbf{a}\|^2 - k^2\|\mathbf{b}\|^2 = 0,$$

tehát

$$k = \pm\frac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

21. feladat: Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe 6 egység, akkor mekkora a területe a $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és a $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogrammának?

Megoldás: Tudjuk, hogy a paralelogramma területe egyenlő az őt kifeszítő két vektor vektoriális szorzatának abszolút értékével. Tehát a keresett terület:

$T = \|\mathbf{c} \times \mathbf{d}\|.$

Behelyettesítve:

$T = \|(\mathbf{4a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{5b})\|.$

Először bontsuk fel a belső zárójeleket. Minden tagot minden taggal meg kell szorozni, de ügyelni kell arra, hogy a vektoriális szorzatnál számít a tényezők sorrendje:

$T = \|\mathbf{4}(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + \mathbf{20}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - \mathbf{5}(\mathbf{b} \times \mathbf{b})\|.$

Vegyük észre, hogy

$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \sin 0° = 0$

valamint:

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$

Így a keresett terület:

$T = \|\mathbf{4}(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + \mathbf{20}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - \mathbf{5}(\mathbf{b} \times \mathbf{b})\| = \|\mathbf{21}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\| = 21 \cdot 6 = 126$ területegység.

22. feladat: Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység, akkor mennyi a térfogata az $\mathbf{u} = \mathbf{2a} - \mathbf{b},\ \mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{3c},\ \mathbf{w} = \mathbf{2b} - \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedonnak?

Megoldás: Mivel a paralelepipedon térfogata az őt kifeszítő vektorok vegyesszorzatának abszolút értékével egyenlő, ezért

$V = |\mathbf{uvw}|.$

Behelyettesítve:

$V = |(\mathbf{2a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{3c})(\mathbf{2b} - \mathbf{c})|.$

A vegyesszorzat definíciója szerint a keresett térfogatot tovább alakítva:

$V = |\langle(\mathbf{2a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{3c}), (\mathbf{2b} - \mathbf{c})\rangle|.$

Végezzük el először külön csak a vektoriális szorzást:

$(\mathbf{2a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{3c}) = \mathbf{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + \mathbf{6}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - \mathbf{3}(\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$

Kihasználva, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

$(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{c}) = 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{c}).$

Helyettesítsük ezt vissza a keresett térfogatba:

$V = |\langle 6(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), (2\mathbf{b} - \mathbf{c})\rangle| =$

$= |\langle 12(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \mathbf{b}\rangle - 6\langle(\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \mathbf{c}\rangle - 2\langle(\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \mathbf{b}\rangle + \langle(\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \mathbf{c}\rangle - 6\langle(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \mathbf{b}\rangle + 3\langle(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \mathbf{c}\rangle|$

Felhasználva a vegyesszorzat jelölési módot, folytatva az átalakítást:

$V = |12\mathbf{acb} - 6\mathbf{acc} - 2\mathbf{bab} + \mathbf{bac} - 6\mathbf{bcb} + 3\mathbf{bcc}|$

Mivel három egysíkú vektor vegyes szorzata 0, ezért mindegyik tag, amelyben van ismétlődő vektor, az 0 lesz. (ha három vektor közül kettő azonos, akkor a három vektor biztosan egysíkú)

$V = |12\mathbf{acb} + \mathbf{bac}|.$

Felhasználva, hogy $\mathbf{acb} = -\mathbf{abc}$ és $\mathbf{bac} = -\mathbf{abc}$

$V = |-12\mathbf{abc} - \mathbf{abc}| = |-13\mathbf{abc}| = 13\,|\mathbf{abc}|.$

Mivel az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 5 egység ezért

$V = 13 \cdot 5 = 65.$

Ellenőrző kérdések

10. kérdés: Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet köré írt körének egy tetszőleges (a csúcsoktól különböző) P pontjából a csúcsokhoz húzott helyvektorai legyenek: $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$. Mivel egyenlő $\langle \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\rangle$?

- 0
- 1
- -1
- 2

mehet

11. kérdés: Az előző feladatban szereplő négyzetet tekintve, mivel egyenlő $\langle \overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PD}\rangle$?

- 0
- 1
- -1
- 2

mehet

12. kérdés: Mekkora szöget zárnak be az a és b egységvektorok, ha tudjuk, hogy $5\mathrm{a}-4\mathrm{b}$ és az $\mathrm{a}+2\mathrm{b}$ vektorok merőlegesek egymásra?

- 30°
- 45°
- 60°
- 120°

mehet

13. kérdés: Ha az a, b, c vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 19 egység, akkor mennyi a térfogata az $\mathrm{a}-\mathrm{b}$, $\mathrm{a}+\mathrm{b}$, $\mathrm{b}+2\mathrm{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedonnak?

- 38
- 57
- 76
- 95

mehet