Tanulási cél: ebben a leckében megmutatjuk, hogyan használhatjuk a skaláris és a vektoriális szorzatot térbeli egyenesek és síkok egyenletének felírására.

Térelemeknek nevezzük három dimenzióban a pontot, egyenest és síkot.

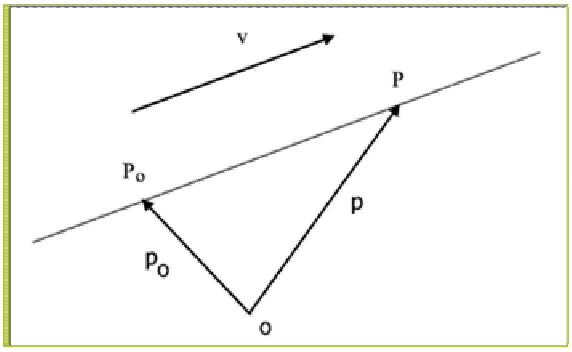
Egyenes megadása térben

Síkbeli koordinátageometriában az egyenes normálvektorának egy, az egyenesre merőleges vektort neveztünk. Térbeli egyenes esetében ez már nem egyértelmű, mert egy térbeli egyenesre végtelen sok merőleges vektor állítható, ezért a térbeli egyenes megadásához más adatra lesz szükségünk.

Legyen adott a térben egy $P_0(x_{0,}, y_0, z_0)$ rögzített pont és egy $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq 0$ vektor. Ekkor pontosan egy olyan egyenes létezik, amely áthalad a P_0 ponton, és párhuzamos a $\mathbf{v}$ vektorral. Ennek az egyenesnek a paraméteres vektoregyenlete:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$$

ahol $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a P_0 rögzítettt pont helyvektora, a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ az egyenes egy tetszőleges P futópontjának a helyvektora, a t valós szám a paraméter, a $\mathbf{v}$ pedig az egyenes irányvektora.



Ez annyit jelent, hogy t helyére különböző értékeket helyettesítve az egyenesen egy-egy pontot kapunk. Ez fordítva is igaz, az egyenes minden pontjának egyértelműen megfelel egy t érték.

A fenti összefüggés egy vektoregyenlet, ami azt jelenti, hogy ha az egyenlet bal és a jobb oldala megegyezik, akkor a két vektor minden koordinátája megegyezik. Felírva a koordinátákra vonatkozó egyenleteket, az egyenes **paraméteres egyenletrendszerét** kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_1 t \\ y &= y_0 + v_2 t \\ z &= z_0 + v_3 t \end{aligned}\right\} \quad t \in R.$$

Megjegyzés: Egy adott egyenes paraméteres egyenletrendszere végtelen sokféleképpen felírható!

Ha az egyenes irányvektorában egyik komponens sem nulla, akkor az egyenleteket t-re rendezve:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = (t)$$

az egyenes **paraméter nélküli** egyenletéhez jutunk.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Írja fel az $A(3, -1, 4)$ és $B(2, 3, -1)$ pontok által meghatározott egyenes egyenletét mindkét alakban! Adjon egy további C pontot, amely rajta van az egyenesen! Döntse el, hogy a $D(-3, 2, -1)$ pont rajta van-e az egyenesen?

Megoldás: Az egyenes felírásához szükségünk van egy irányvektorra és egy adott pontra. Irányvektor lehet az $\overrightarrow{AB}$ vektor, az adott pont pedig legyen az A. Mivel $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v} = (-1, 4, -5)$, ezért az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 3 - t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 4 - 5t, \quad t \in R.$$

Mivel az irányvektor egyik komponense sem nulla, ezért mindegyik egyenletet t-re rendezve megkapjuk a paraméter nélküli alakot:

$$3-x=\frac{y+1}{4}=\frac{4-z}{5}.$$

Az egyenes egy tetszőleges pontját kapjuk, ha t-nek adunk egy valós értéket és ezt behelyettesítjük az egyenes paraméteres egyenletrendszerébe, így meghatározva a keresett C pont (x, y, z) koordinátáit.

Legyen például $t = 2$, ekkor $x = 1, y = 7, z = -2$, tehát az egyenes egy tetszőleges C pontja: $C(1, 7, -2)$. Világos, hogy más t érték esetén az egyenes más-más pontját kapjuk.

Egy pont akkor van rajta egy egyenesen, ha koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét. Ez a paraméteres alaknál azt jelenti, hogy minden koordináta értékhez ugyanaz a t érték tartozik. Ha $D(-3, 2, -1)$ rajta van az egyenesen, akkor D koordinátáit behelyettesítve és az egyenletrendszert megoldva mindegyik sorból azonos t-t számolunk.

$$-3=3-t \quad\rightarrow\quad t=6;\quad 4=-1+4t \quad\rightarrow\quad t=\frac{5}{4}.$$

Mivel már az első két sorból különböző t értéket kaptunk, egyértelmű, hogy a D pont nincs rajta az egyenesen.

Megjegyzés: Ha az egyenes felírásánál a B pontot választottuk volna adott pontnak, akkor a következő alakot kapnánk:

$$x=2-t,\quad y=3+4t,\quad z=-1-5t,\quad t\in R.$$

Úgy tűnhet, hogy másik egyenest kaptunk, pedig nem. Ez ugyanaz az egyenes, csak más az alakja.

2. feladat: Igaz-e, hogy $e:\ x=1-2t,\ y=3+t,\ z=-1-t,\ t\in R$ és $f:\ 1-x=\frac{y+3}{2}=\frac{2z+1}{3}$ egyenesek párhuzamosak?

Megoldás: Két egyenes párhuzamos, ha irányvektoraik párhuzamosak. Az *e* egyenes irányvektora könnyen kiolvasható: $\mathbf{v_e}=(-2, 1, -1)$.

Az f egyenes paraméter nélküli egyenletét alakítsuk vissza a paraméteres formába, hogy az irányvektort ki tudjuk olvasni. Tudjuk, hogy

$$f:\ 1-x=\frac{y+3}{2}=\frac{2z+1}{3}=t,$$

innen:

$$1-x=t \quad\rightarrow\quad x=1-t$$

$$\frac{y+3}{2}=t \quad\rightarrow\quad y=-3+2t$$

$$\frac{2z+1}{3}=t \quad\rightarrow\quad z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t.$$

Kiolvasva az f egyenes irányvektorát: $\mathbf{v_f}=\left(-1, 2, \frac{3}{2}\right)$.

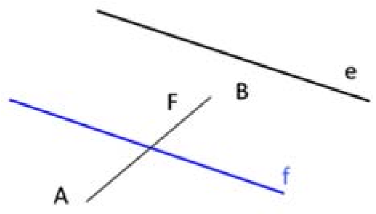
Ha két vektor párhuzamos, akkor megfelelő koordinátáik hányadosa állandó. Mivel

$$\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{1,5}{-1},$$

ezért a két egyenes nem párhuzamos.

3. feladat: Írja fel az AB szakasz felezőpontján átmenő, $e:\ \frac{x-1}{2}=\frac{2-2y}{3}=z-3$ egyenessel párhuzamos egyenes paraméter nélküli egyenletét, ha $A(2, -1, 0)$ és $B(0, -3, -2)$!

Megoldás: Készítsünk ábrát!



Legyen az általunk keresett egyenes f. Az egyenes felírásához kell egy irányvektora és egy pontja. Mivel az egyenes az AB szakasz felezőpontján megy át, ezért az lesz a rögzített pontunk. Legyen F az AB szakasz felezőpontja, ekkor annak koordinátái:

$$f_1 = \frac{2+0}{2} \quad \rightarrow \quad f_1 = 1$$

$$f_2 = \frac{-1+(-3)}{2} \quad \rightarrow \quad f_2 = -2$$

$$f_3 = \frac{0+(-2)}{2} \quad \rightarrow \quad f_3 = -1$$

Tehát $F(1,-2,-1)$.

Mivel $e \parallel f$, ezért az irányvektoraik párhuzamosak, tehát akár $\mathbf{v_e} = \mathbf{v_f}$ is lehet.

$\mathbf{v_e}$ meghatározásához alakítsuk át az egyenes egyenletét a paraméteres alakra:

$$\frac{x-1}{2} = t \quad \rightarrow \quad x = 1+2t$$

$$\frac{2-2y}{3} = t \quad \rightarrow \quad y = \frac{2-3t}{2}$$

$$z-3 = t \quad \rightarrow \quad z = 3+t.$$

Az egyenletből: $\mathbf{v}_e = (2,\ -1,5,\ 1)$. Mivel $\mathbf{v_e} = \mathbf{v_f}$, ezért a keresett egyenes:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1,5} = z+1$$

4. feladat: Írja fel az $A(0,\ -4,3)$ és $B(-3,-1,0)$ végpontokkal rendelkező szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontján átmenő, XY síkra merőleges egyenes paraméteres egyenletét!

Megoldás: Először keressük meg az A-hoz közelebbi harmadoló H_A pontot. Mivel:

$$h_1 = \frac{2\cdot 0+1\cdot(-3)}{3} \quad \rightarrow \quad h_1 = -1$$

$$h_2 = \frac{2\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{3} \quad \rightarrow \quad h_2 = -3$$

$$h_3 = \frac{2\cdot 3+1\cdot 0}{3} \quad \rightarrow \quad h_3 = 2$$

A számolt koordinátáknak megfelelően:

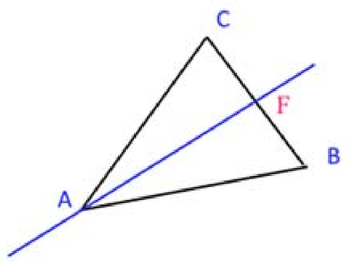
$H_A(-1,-3,2)$.

Az XY síkra merőleges egyenes párhuzamos a z tengellyel, ezért a z tengely irányába mutató bármely vektor jó lesz az általunk keresett egyenlet irányvektorának is. Mivel $\mathbf{v_z} = (0,0,1)$, ezért a keresett egyenes:

$$x=-1,\ y=-3,\ z=2+t,\ \ t \in R.$$

5. feladat: Írja fel az ABC háromszög A csúcsból induló súlyvonalának egyenletét, ha $A(3, 1, -2)$, $B(-3, -1, 4)$ és $C(1, 5, -6)$.

Megoldás: Tudjuk, hogy a súlyvonal a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. Ha F a BC oldal felezőpontja, akkor egy olyan egyenest kell felírnunk, amely áthalad az A és F pontokon.



A felezőpont könnyen számolható:

$$f_1 = \frac{-3+1}{2} \quad \to \quad f_1 = -1$$

$$f_2 = \frac{-1+5}{2} \quad \to \quad f_2 = 2$$

$$f_3 = \frac{4+(-6)}{2} \quad \to \quad f_3 = -1$$

tehát $F(-1, 2, -1)$.

A súlyvonal felírásához meghatározzuk egy irányvektorát: $\mathbf{v} = \overrightarrow{AF} = (-4, 1, 1)$, adott pontnak pedig A-t választva a keresett egyenlet:

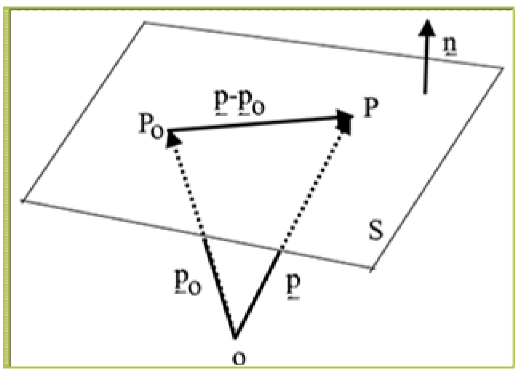
$$x = 3 - 4t, \;\; y = 1 + t, \;\; z = -2 + t \;\; t \in R.$$

Sík megadása

Adott a térben egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ rögzített pont és egy $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \neq 0$ vektor. Ekkor pontosan egy olyan sík létezik, amely áthalad a P_0 ponton, és merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra. Ekkor a sík normálegyenlete:

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

ahol $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a P_o pont helyvektora, a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ a sík egy tetszőleges P futópontjának a helyvektora, és $\mathbf{n}$ pedig a sík egy normálvektora (a síkra merőleges vektor).



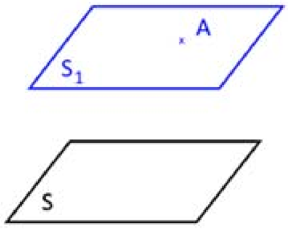
A skalárszorzat koordinátákkal felírt kiszámolási módját felhasználva megkapjuk a sík egyenletét:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Kidolgozott feladatok

6. feladat: Írja fel az $A(2, 1, -2)$ pontra illeszkedő és az $S: x - y + z = 2$ síkkal párhuzamos S_1 sík egyenletét! Adjon egy olyan B pontot, amely illeszkedik az S_1 síkra! Döntse el, hogy a $C(1, -3, 2)$ pont rajta van-e az S_1 síkon?

Megoldás: A feladathoz tartozó ábra:



Két sík párhuzamos, ha normálvektoraik megegyeznek vagy párhuzamosak. Olvassuk ki az adott sík egy normálvektorát: $\mathbf{n_S} = (1, -1, 1)$, ez lehet az általunk keresett S_1 sík normálvektora is. Mivel a sík tartalmazza az *A* pontot, az lesz a rögzített pont. Ekkor a keresett egyenlet:

$$1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z + 2) = 0.$$

Rendezve:

$$S_1: \ x - y + z = 1.$$

Ha egy B pont rajta van a síkon, akkor a pont koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Mivel most ez egy tetszőleges pont lesz, ezért két koordinátáját tetszőlegesen megválasztjuk, a harmadik koordinátát pedig helyettesítéssel számoljuk.

Legyen $B(-2, 3, z)$. Ekkor

$$-2 + 1 \cdot 3 - 2z = 7 \quad \to \quad z = -3,$$

tehát $B(-2, 3, -3)$.

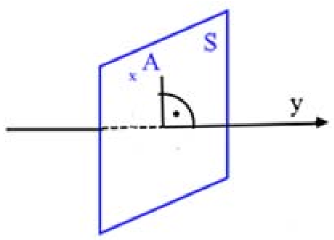
Ha $C(1, -3, 2)$ rajta van a síkon, akkor koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Ezt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Mivel

$$1 - 3 - 4 \neq 7,$$

ezért *C* nincs rajta az S_1 síkon.

7. feladat: Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az y tengelyre és áthalad az $A(1, -2, 3)$ ponton!

Megoldás: Készítsünk egy kész ábrát!

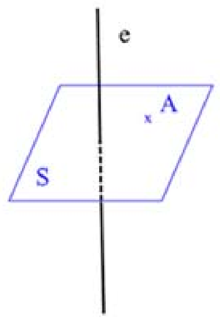


Az *y* tengely merőleges a keresett síkra, ezért $\mathbf{n_S} = \mathbf{v_y}$ teljesül. Mivel $\mathbf{v_y} = (0, 1, 0)$, így a keresett sík:

$$S: \quad 0(x - 1) + 1(y + 2) + 0(z - 3) = 0 \quad \to \quad y = -2.$$

8. feladat: Írja fel az $e: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{2-y}{2} = 1-z$ egyenesre merőleges és az $A(1, -2, 3)$ ponton átmenő sík egyenletét!

Megoldás: Rajzoljunk egy kész ábrát!



Az előző feladat alapján tudjuk, hogy $\mathbf{n_S} = \mathbf{v_e}$. Az egyenes irányvektorának meghatározásához vissza kell alakítani paraméteres alakba.

$$\frac{x-1}{3} = t \quad \rightarrow \quad x = 1 + 3t,$$

$$\frac{2-y}{2} = t \quad \rightarrow \quad y = 2 - 2t,$$

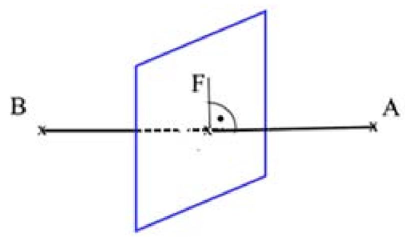
$$1 - z = t \quad \rightarrow \quad z = 1 - t.$$

Innen $\mathbf{v_e} = (3, -2, -1)$. Mivel $\mathbf{n_S} = \mathbf{v_e}$, így a keresett sík egyenlete:

$$S: \quad 3(x-1) - 2(y+2) + 1(z-3) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - 2y + z = 10.$$

9. feladat: Írja fel az AB szakasz felezőmerőleges síkjának egyenletét, ha $A(1, 2, -3)$ és $B(-3, 4, 1)$.

Megoldás: Rajzoljunk!



Először meghatározzuk a szakasz felezőpontját: $F\left(\dfrac{1-3}{2}, \dfrac{2+4}{2}, \dfrac{-3+1}{2}\right) = (-1, 3, -2)$.

Mivel a felezőmerőleges egyenese merőleges a síkra, ezért $\mathbf{v_f} = \mathbf{n_S}$.

Tudjuk, hogy $\mathbf{v_f} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \mathbf{n_S} = (-4, 2, 4)$, így a keresett sík egyenlete:

$$-4(x+1) + 2(y-3) + 4(z+1) = 0,$$

átrendezve:

$$-4x + 2y + 4z = 6 \quad \rightarrow \quad 2x - y + 2z = 3.$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Írja fel az $A(-3, 4, 5)$ pontot az origóval összekötő egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

- ( ) $x = -3t, \quad y = -4t, \quad z = -5t \quad t \in R$
- (x) $x = 3t, \quad y = -4t, \quad z = -5t \quad t \in R$
- ( ) $x = 3t, \quad y = 4t, \quad z = -5t \quad t \in R$
- ( ) $x = -3t, \quad y = -4t, \quad z = 5t \quad t \in R$

mehet

2. kérdés: Írja fel az $A(2,0,4)$és $B(-4,2,-2)$ pontok felezőpontján áthaladó, $e:\ x = 2 - t,\ y = 3 + 2t,\ z = 2 + t$ egyenessel párhuzamos egyenes paraméter nélküli egyenletét!

- ( ) $x + 2 = \dfrac{y-1}{2} = z - 1$
- ( ) $-x - 2 = \dfrac{y-1}{2} = z + 1$
- ( ) $x + 2 = \dfrac{1-y}{2} = z - 1$
- (x) $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = z - 1$

mehet

2. kérdés: Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $A(-3,0,1)$ ponton és párhuzamos az y tengellyel!

- ( ) $x = 3, \quad y = t, \quad z = 1 \quad t \in R$
- ( ) $x = -3 + t, \quad y = t, \quad z = -1 \quad t \in R$
- (x) $x = -3, \quad y = t, \quad z = 1 \quad t \in R$
- ( ) $x = -3, \quad y = t, \quad z = t \quad t \in R$

mehet

3. kérdés: Írja fel az $A(2,-2,1)$ ponton áthaladó $2x + y - z = 1$ síkra merőleges egyenes egyenletét!

- (x) $x = 2 + 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 1 - t \quad t \in R$
- ( ) $x = 2 - 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 1 - t \quad t \in R$
- ( ) $x = 2 - 2t, \quad y = -2 - t, \quad z = 1 - t \quad t \in R$
- ( ) $x = 2 + 2t, \quad y = -2 + t, \quad z = 1 + t \quad t \in R$

mehet

4. kérdés: Döntse el, hogy az $A(1,-3,2)$ és a $B(-1,1,2)$ pontok rajta vannak-e a $2x + y - z = 1$ síkon?

- ( ) mindkettő rajta van

- [ ] csak A van rajta
- [ ] csak B van rajta
- [x] egyik sincs rajta

mehet

5. kérdés: Írja fel az $A(1,5,-2)$ pontra illeszkedő és az YZ síkkal párhuzamos sík egyenletét!

- [x] $x = 1$
- [ ] $y = 5$
- [ ] $z = 2$
- [ ] $x = 0$

mehet

6. kérdés: Írja fel az $A(1,0,-1)$ pontra illeszkedő és az $e: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{2z-1}{4}$ egyenesre merőleges sík egyenletét!

- [ ] $2x + 3y + 2z = 0$
- [x] $2x - 3y + 2z = 0$
- [ ] $2x - 3y - 2z = 0$
- [ ] $2x + 3y - 2z = 0$

mehet

Térelemek kölcsönös helyzete, közös pontjai

Két egyenes metszéspontja

Mivel közös pontot keresünk, ezért két ismeretlenes, de három egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk. Ezt úgy érdemes megtenni, hogy tetszőlegesen kiválasztunk két egyenletet, azokat megoldjuk, majd leellenőrizzük, hogy a kapott megoldás kielégíti-e a harmadik egyenletet. Ha igen, akkor van megoldás, azaz a két egyenes metszi egymást, ha nem, akkor nincs megoldás, azaz a két egyenes nem metszi egymást. Ezeket ilyenkor kitérő egyeneseknek nevezzük.

10. feladat: Határozzuk meg az $e:\ x = 2+t,\ y = -1-t,\ z = 1-2t\ \ t \in R$ és az $f:\ x = 4+t,\ y = 1+3t,\ z = t\ \ t \in R$ egyenesek metszéspontját, ha létezik!

Megoldás: Az egyenesek irányvektorai: $\mathbf{v_e} = (1,-1,-2)$ és $\mathbf{v}_f = (1,3,1)$. Mivel a két irányvektor nem párhuzamos egymással, ezért a két egyenes sem az, tehát vagy metszik egymást vagy kitérők. Próbáljunk metszéspontot keresni. Ebben az esetben célszerű a két egyenes egyenletében szereplő paramétert más-más betűvel jelölni, ezért az f egyenes paraméterét a továbbiakban u-val jelöljük. Ha a két egyenesnek van metszéspontja, akkor az azt jelenti, hogy van olyan t és u paraméter, amelyek ugyanazt az $M(x,y,z)$ pontot határozzák meg. Ez azt jelenti, hogy ennek a két paraméternek ki kell elégítenie a következő egyenletrendszert:

$$2+t = 4+u \quad -1-t = 1+3u \quad 1-2t = u.$$

A harmadik egyenletből megvan u, ezt beírva az első egyenletbe:

$2 + t = 4 + 1 - 2t \quad \rightarrow \quad t = 1 \quad \rightarrow u = -1$

Ha van metszéspont, akkor ezeknek az értékeknek ki kell elégíteniük az eddig általunk fel nem használt második egyenletet is. Ha ez nem teljesül, akkor a két egyenesnek nincs metszéspontja.

Behelyettesítve a második egyenletbe:

$-1 - 1 = 1 + 3 \cdot (-1)$

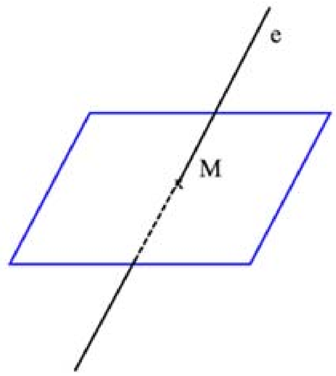
Az egyenlőség teljesül, tehát van metszéspont. Ez a metszéspont meghatározható a t paraméterrel az e egyenesből, vagy az u paraméterrel az f egyenesből is.

Ha a $t = 1$ értéket behelyettesítjük az e egyenesbe, akkor a metszéspont: $M(3, -2, -1)$

Egyenes és sík metszéspontja

11. feladat: Határozzuk meg az $e: \quad x = 2 + t,\ y = -2 + t,\ z = 3t \ \ t \in R$ egyenes és az $S:\ x - 2y + 5z = 20$ sík metszéspontját!

Megoldás:



Keressük azt az egyenesen lévő $M(2 + t,\ -2 + t, 3t)$ pontot, amely rajta van az S síkon is. Ha egy pont rajta van a síkon, akkor koordinátái kielégítik a sík egyenletét. Helyettesítsük be a pont koordinátáit a sík egyenletébe:

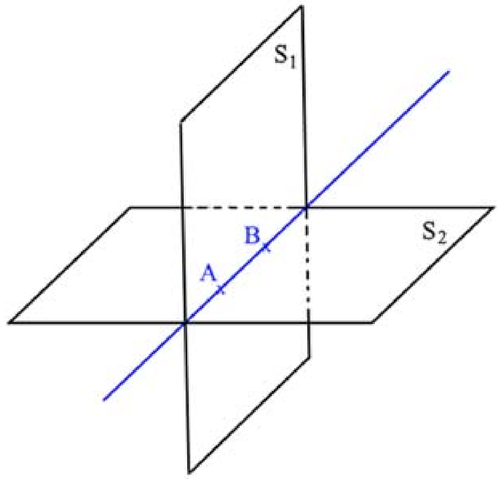
$(2 + t) - 2(-2 + t) + 5(3t) = 20 \quad \rightarrow \quad 14t = 14 \quad \rightarrow t = 1.$

Ez azt jelenti tehát, hogy az egyenes $t = 1$ paraméterértékhez tartozó pontja rajta van az S síkon, vagyis a metszéspont $M(3, -1, 3)$

Két sík metszésvonala

12. feladat: Határozzuk meg az $S_1:\ x + y - z = 1$ és $S_2:\ x - y + 2z = 2$ síkok metszésvonalának egyenletét!

Megoldás: Olvassuk ki a síkok normálvektorait: $\mathbf{n}_{S_1} = (1, 1, -1)$ és $\mathbf{n}_{S_2} = (1, -1, 2)$. Látható, hogy a két normálvektor nem egymás skalárszorosa, azaz a síkok nem párhuzamosak.



Ez pedig azt jelenti, hogy egy egyenesben metszik egymást. A metszésvonal meghatározásának az a legegyszerűbb módja, ha keresünk két olyan pontot, amely a metszésvonalon rajta van. Ez egyben azt is jelenti, hogy ez a két pont mindkét síkon is rajta van. Azaz kell két olyan (x, y, z) hármas, amely mindkét sík egyenletét kielégíti. Ekkor a metszésvonal a két ponton átmenő egyenes lesz, ami így már könnyen felírható.

Tekintsük a síkok egyenleteiből álló egyenletrendszert:

$x+y-z=1 \quad x-y+2z=2$

Ennek végtelen sok megoldása van. Ezért lehetőségünk van olyan pontokat keresni, amelyek valamelyik koordinátáját mi magunk választjuk meg tetszőleges értékkel. Célszerű egy $A(x, y, 0)$ és egy $B(0, y, z)$ pontot keresni.

Az *A* pont meghatározása során az egyenletekbe a z helyére nullát írva, megoldjuk az így kapott egyenletrendszert.

$x+y=1 \quad x-y=2 \quad \rightarrow \quad x=1,5 \; y=-0,5 \quad \rightarrow \quad A(1,5,\,-0,5,0).$

Hasonlóan keressük meg a B pontot is:

$y-z=1 \quad -y+2z=2 \quad \rightarrow \quad z=3 \quad y=4 \quad \rightarrow B(0,4,3)$

A keresett egyenes két pontjából meghatározzuk az egyenes irányvektorát:
$\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}=(-1,5,4,5,3)=(-3,9,6)$, majd a B pont segítségével felírjuk a metszésvonal egyenletét.

$$S_1 \cap S_2 = \begin{cases} x=-3t \\ y=4+9t \\ z=3+6t \end{cases} \quad t \in R.$$

Ellenőrző kérdések

8. kérdés: Határozza meg az $e: \; x=3+2t, \, y=1+t, \, z=2-t \;\; t \in R$ és $f: \; x=-1+t, \, y=2+2t, \, z=1-2t \;\; t \in R$ egyenesek metszéspontját!

- $M(-3,\,-2,\,-5)$
- $M(5,2,1)$
- $M(-3,\,-2,5)$
- $M(1,6,-3)$

mehet

9. kérdés: Határozza meg az $e: \; x=3-3t,\, y=-1+t,\, z=-2-2t \;\; t\in R$ egyenes és az YZ sík metszéspontját!

- $M(0,\,-2,0)$
- $M(1,0,0)$
- $M(0,\,-2,3)$
- $M(0,0,\,-4)$

mehet

10. kérdés: Határozzuk meg az $e: \; x=2-t,\, y=1+t,\, z=1-2t \;\; t\in R$ egyenes és az $S: \; x+y-2z-5=0$ sík metszéspontját!

- $M(1,2,\,-1)$
- $M(0,3,\,-3)$
- $M(2,1,\,-1)$
- $M(0,5,0)$

mehet

11. kérdés: Legyen $S_1: \; x-y+2z=6$ és $S_2: \; 2x-y-z=3$ két egymást metsző sík. Döntsük el, hogy az $A(-6,-14,-1)$ és $B(-3,9,1)$ pontok közül melyik van rajta a két sík metszésvonalán?

- mindkettő rajta van
- csak A van rajta
- csak B van rajta
- egyik sincs rajta

mehet

Térelemek távolsága

Két pont távolsága

Definíció: Két pont távolságán az őket összekötő szakasz (vektor) hosszát értjük.

Tétel: Legyenek $A(a_1, a_2, a_3)$ és $B(b_1, b_2, b_3)$ adott pontok. Ekkor a két pont távolsága:

$$d_{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

Pont és egyenes távolsága

Definíció: Egy pont és egy, a pontra nem illeszkedő egyenes távolságán a pontból az egyenesre bocsájtott merőleges szakasz hosszát értjük.

Tétel: Legyes adott egy P pont és egy $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes. Ekkor ezek távolsága:

$$d_{Pe} = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\right\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

ahol P_0 az e egyenes egy tetszőleges pontja.

Pont és sík távolsága

Definíció: Pont és a pontra nem illeszkedő sík távolságán a pontból a síkra bocsájtott merőleges szakasz hosszát értjük.

Tétel: Legyen adott egy P pont és egy $\mathbf{n}$ normálvektorú S sík. Ekkor ezek távolsága:

$$d_{PS} = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n} \right\rangle\right|}{\|\mathbf{n}\|}$$

ahol P_0 az S sík egy tetszőleges pontja.

Kidolgozott feladatok

13. feladat: Határozzuk meg az $A(2,-1,5)$, $B(3,2,1)$ és $C(6,4,3)$ csúcspontú háromszög kerületét!

Megoldás: A háromszög kerülete az oldalai hosszának összegével egyenlő, azaz a csúcspontok egymástól mért távolságainak összegével.

Írjuk fel a vektorokat és számoljuk ki a hosszukat:

$$\overrightarrow{AB} = (1,3,-4) \quad d(AB) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{AC} = (4,5,-2) \quad d(AC) = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{45}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3,2,2) \quad d(BC) = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{17}$$

A háromszög kerülete: $K = \sqrt{26} + \sqrt{45} + \sqrt{17} \approx 15,93$

14. feladat: Határozza meg a $P(3,2,-1)$ pont és az $e:\ x = 1+t,\ y = -1-2t,\ z = -2\ \ t \in R$ egyenes távolságát!

Megoldás: A távolság meghatározásához szükségünk van egy pontra az egyenesről. Legyen ez $P_0(1,-1,-2)$, továbbá kell az egyenes irányvektor: $\mathbf{v} = (1,-2,0)$. Ha $P(3,2,-1)$, akkor

$$\overrightarrow{P_0P} = (2,3,1).$$

$$\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

A kapott vektor hossza:

$$\left\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-7)^2} = \sqrt{54}$$

Az irányvektor hossza:

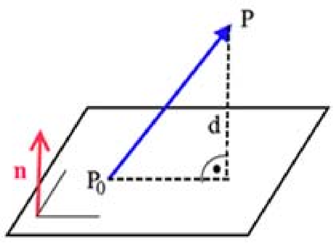
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

A keresett távolság:

$$d_{Pe} = \frac{\left\|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}\right\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{5}} \approx 3,29.$$

15. feladat: Határozza meg a $P(1,\ -2,\ -1)$ pont és az $S:\ 2x-4y+z=2$ sík távolságát!

Megoldás: A megoldáshoz szükségünk lesz a sík egy tetszőleges pontjára és a normálvektorra. Mivel egy olyan tetszőleges pontot keresünk, amely rajta van a síkon, ezért a pont két koordinátáját szabadon megválaszthatjuk, míg a harmadik koordinátát a sík egyenletébe való helyettesítéssel számoljuk. Keressük a $P_0(0,0,z)$ síkbeli pontot. Könnyen számolható, hogy ekkor $z=2$, tehát $P_0(0,0,2)$.



Ekkor: $\overrightarrow{P_0P}=(-1,2,3)$.

Olvassuk ki a sík egy normálvektorát és számoljuk ki a vektor hosszát:

$$\mathbf{n}=(2,-4,1)\quad \|\mathbf{n}\|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}$$

Behelyettesítve a távolságot megadó képletbe:

$$d_{PS}=\frac{\left|\left\langle \overrightarrow{P_0P},\mathbf{n}\right\rangle\right|}{\|\mathbf{n}\|}=\left|\frac{-2-8+3}{\sqrt{21}}\right|=\left|\frac{-7}{\sqrt{21}}\right|=\frac{7}{\sqrt{21}}\approx 1,53.$$

Megjegyzés:

Két párhuzamos egyenes távolsága visszavezethető pont és egyenes távolságára. Ugyanis ilyenkor az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől mért távolságát kell meghatároznunk.

Két párhuzamos sík távolsága visszavezethető pont és sík távolságára, ugyanis ilyenkor az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól mért távolságát kell meghatároznunk.

Egy egyenes és egy vele párhuzamos sík távolsága visszavezethető pont és sík távolságára, ugyanis ilyenkor az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól mért távolságát kell meghatároznunk.

Térelemek hajlásszöge

Térelemek hajlásszöge minden esetben legfeljebb $90\,°$ lehet. Ezt a szöget α-val fogjuk jelölni.

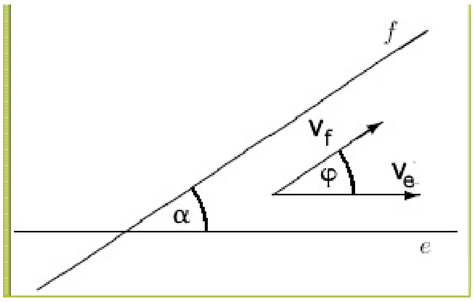
Két egyenes hajlásszöge

Definíció: Két metsző egyenes hajlásszöge megegyezik az egyenesek által közbezárt kisebbik szöggel. Ha a két egyenes nem metszi egymást, akkor párhuzamos eltolással metsző helyzetbe hozhatók.

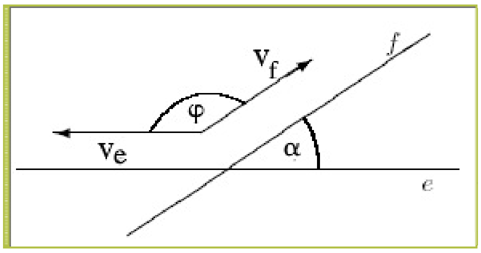
Ez a hajlásszög meghatározható a két egyenes irányvektorából. Jelöljük az e és f egyenesek egy-egy irányvektorát $\mathbf{v_e}$ és $\mathbf{v_f}$-fel. Ekkor az irányvektorok által bezárt szög skaláris szorzat felhasználásával a következő összefüggésből számolható:

$$\cos\phi=\frac{\langle \mathbf{v_e},\mathbf{v_f}\rangle}{\|\mathbf{v_e}\|\|\mathbf{v_f}\|}.$$

Ha $0\,°\le\phi\le 90\,°$, akkor $\alpha=\phi$ a hajlásszög.



Ha $90\,° < \phi$, akkor $\alpha = 180\,° - \phi$ a két egyenes hajlásszöge.



Kidolgozott feladatok

16. feladat: Határozza meg az $e:\ x = 3 - 2t,\ y = 1 + t,\ z = 4 - 5t\ \ t \in R$ és az $f:\ x - 1 = \dfrac{z-1}{3}\ \ y = 5$ egyenesek hajlásszögét!

Megoldás: Első lépésként meg kell adni mindkét egyenes egy-egy irányvektorát és azok hosszát:

$\mathbf{v_e} = (-2, 1, -5)\quad \|\mathbf{v_e}\| = \sqrt{30}$

$\mathbf{v_f} = (1, 0, 3)\quad \|\mathbf{v_f}\| = \sqrt{10}.$

Ekkor a keresett szög:

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f}\rangle}{\|\mathbf{v_e}\|\|\mathbf{v_f}\|} = \frac{-17}{\sqrt{300}} \approx -0,98 \quad \rightarrow \quad \phi \approx 168,52\,°.$$

Mivel ez tompaszög, ezért a keresett hajlásszög:

$\alpha = 180\,° - \phi = 180\,° - 168,52\,° \approx 11,48\,°.$

feladat: Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma átlóinak hajlásszögét, ha $A(2, 3, -1)$, $B(5, 4, 3)$, $C(2, -1, 6)$ és $D(-1, -3, 2)$.

Megoldás: A két átló egyenes irányvektorának szögét határozzuk meg először. Az egyik egyenes irányvektora az $\overrightarrow{AC}$, a másiké pedig a $\overrightarrow{BD}$ vektor is lehet. Adjuk meg ezen vektorok koordinátáit:

$\overrightarrow{AC} = (0, -5, 7)\quad \overrightarrow{BD} = (-6, -7, -1).$

Számoljuk ki a vektorok által bezárt szögét:

$$\cos\phi = \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\rangle}{\|\overrightarrow{AC}\|\,\|\overrightarrow{BD}\|} = \frac{28}{\sqrt{0^2 + (-5)^2 + 7^2}\sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{28}{\sqrt{74}\sqrt{86}} \approx 0,3510 \quad \rightarrow \quad \phi \approx 69,45\,°.$$

Mivel $\phi < 90\,°$, ezért a keresett hajlásszög $\alpha = 69,45\,°$.

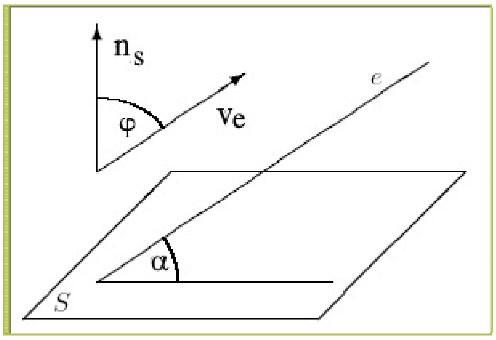
Egyenes és sík hajlásszöge

Definíció: Egyenes és sík hajlásszögén az egyenes és az egyenes síkra eső merőleges vetületének hajlásszögét értjük.

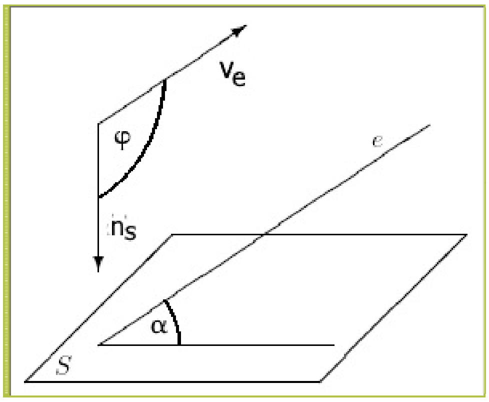
Ha ismerjük a sík egy $\mathbf{n_S}$ normálvektorát és az egyenes egy $\mathbf{v_e}$irányvektorát, akkor a két vektor által bezárt szög:

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{n_S}\rangle}{\|\mathbf{v_e}\|\|\mathbf{n_S}\|}.$$

Ha $0° \le \phi \le 90°$, akkor $\alpha = 90° - \phi$ a hajlásszög.



Ha $90° < \phi$, akkor $\alpha = \phi - 90°$ hajlásszög.



Kidolgozott feladat

18. feladat: Határozza meg az y tengely és az $S:\ 2x + z = 2 + 4y$ sík hajlásszögét!

Megoldás: A számoláshoz ismernünk kell az egyenes egy irányvektorát és a sík egy normálvektorát, valamint ezen vektorok hosszát.

$$\mathbf{v_e} = (0, 1, 0) \quad \|\mathbf{v_e}\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\mathbf{n_S} = (2, -4, 1) \quad \|\mathbf{n_S}\| = \sqrt{21}.$$

A keresett szög:

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{n_S}\rangle}{\|\mathbf{v_e}\|\|\mathbf{n_S}\|} = \frac{-4}{\sqrt{21}} \simeq -0,87 \quad \to \quad 150,46°$$

Ez alapján az egyenes és sík hajlásszöge:

$$\alpha = \phi - 90° \approx 150,46° - 90° \approx 60,46°.$$

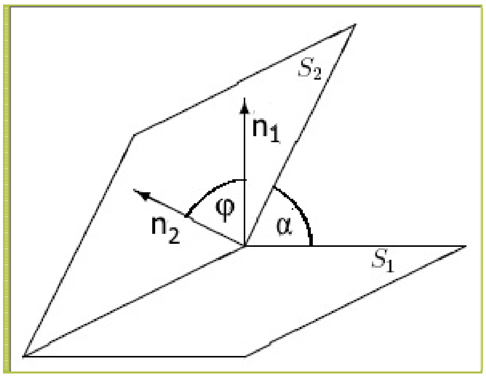
Két sík hajlásszöge

Definíció: Két sík hajlásszöge normálvektoraik hajlásszöge, ha az hegyesszög. Tompaszög esetén $180°$-ból azt kivonva kapjuk a síkok szögét.

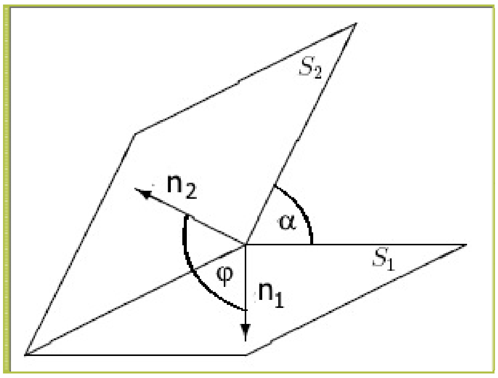
Ha ismerjük a két sík $\mathbf{n_1}$ és $\mathbf{n_2}$ normálvektorát, akkor

$\cos\phi = \dfrac{\langle \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}\rangle}{\|\mathbf{n_1}\|\|\mathbf{n_2}\|}.$

Ha $0° \le \phi \le 90°$, akkor $\alpha = \phi$ a hajlásszög.



Ha $90° < \phi$, akkor $\alpha = 180° - \phi$ a két sík hajlásszöge.



Kidolgozott feladat

19. feladat: Határozza meg az $S_1 :\ x + y - z = 1$ és $S_2 :\ x - 2y + z = 0$ síkok hajlásszögét!

Megoldás: Kiolvasva a síkok egy-egy normálvektorát és meghatározva azok hosszát:

$\mathbf{n}_{S_1} = (1, 1, -1) \quad \|\mathbf{n}_{S_1}\| = \sqrt{3}$

$\mathbf{n}_{S_2} = (1, -2, 1) \quad \|\mathbf{n}_{S_2}\| = \sqrt{6}.$

Majd ezekkel az adatokkal számolva:

$\cos\phi = \dfrac{\langle \mathbf{n}_{S_1}, \mathbf{n}_{S_2}\rangle}{\|\mathbf{n}_{S_1}\|\|\mathbf{n}_{S_2}\|} = \dfrac{-2}{\sqrt{18}} \quad \phi \approx 118,12°.$

Innen az általunk keresett hajlásszög:

$\alpha = 180° - \phi = 180° - 118,12° \approx 61,88°.$

Ellenőrző kérdések

12. kérdés: Határozza meg az $A(2, 3, -1)$ pont és az $e:\ x = 3 - 2t,\ y = -2 + t,\ z = 5\ t \in R$ egyenes távolságát!

- (x) $7,22$
- ( ) $5,22$

- 7, 72
- 6, 75

mehet

13. kérdés: Határozza meg az origó és az $S:\ x+y+z=0$ sík távolságát!

- $\sqrt{2}$
- 2
- 0
- 1

mehet

14. kérdés: Határozza meg az $e:\ \frac{2-x}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{2+z}{-2}$ egyenes és az $S:\ x-2y+z=5$ sík hajlásszögét!

- $70,22\,^{\circ}$
- $80,24\,^{\circ}$
- $55,12\,^{\circ}$
- $62,22\,^{\circ}$

mehet

15. kérdés Határozza meg az $e:\ x=t,\ y=1-t,\ z=1+t\ \ t\in R$ egyenes és az y tengely hajlásszögét!

- $35,26\,^{\circ}$
- $25,26\,^{\circ}$
- $44,74\,^{\circ}$
- $54,74\,^{\circ}$

mehet

16. kérdés: Határozza meg az $S:\ x-3y+z=1$ és az yz sík hajlásszögét!

- $52,45\,^{\circ}$
- $37,21\,^{\circ}$
- $72,45\,^{\circ}$
- $82,28\,^{\circ}$

mehet

Összetett feladatok

20. feladat: Írja fel az $A(1, 3, -2)$ ponton áthaladó, az e és f egyenesekre merőleges g egyenes egyenletét, ha

$e: \; x = y = z \qquad f: \; -x = z, \; y = 3.$

Adja meg a g egyenes és az xy sík metszéspontját!

Megoldás: Az egyenes egyenletrendszerének felírásához szükségünk van egy pontra és egy irányvektorra. Egy pontja adott a keresett egyenesnek. Nézzük meg, hogy mit tudunk mondani a keresett egyenes egy irányvektoráról. Jelölje $\mathbf{v_e}$, $\mathbf{v_f}$ és $\mathbf{v_g}$ az e, f és g egyenesek irányvektorait. Ha a keresett g egyenes merőleges e és f egyenesekre, akkor $\mathbf{v_g} \perp \mathbf{v_e}$ és $\mathbf{v_g} \perp \mathbf{v_f}$ is teljesül. Tehát egy olyan vektort keresünk, amelyik merőleges a két ismert vektorra. A $\mathbf{v_e} \times \mathbf{v_f}$ éppen megfelel a feltételeknek, mivel az merőleges a $\mathbf{v_e}$ és a $\mathbf{v_f}$ vektorokra is, azaz legyen $\mathbf{v_g} = \mathbf{v_e} \times \mathbf{v_f}$.

Kiolvasva az egyenesek irányvektorait:

$\mathbf{v_e} = (1, 1, 1) \quad \mathbf{v_f} = (-1, 0, 1).$

$$\mathbf{v_g} = \mathbf{v_e} \times \mathbf{v_f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1).$$

Eszerint a g egyenes egyenlete:

$$g: \; \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = z + 2.$$

Meg kell határoznunk a most felírt egyenes és az xy sík metszéspontját. Ehhez írjuk fel a g egyenes egyenletét paraméteres alakban. Ehhez a következőből kell elindulni:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = z + 2 = t,$$

majd változónként külön-külön rendezéssel a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{x-1}{1} = t \quad \to \quad x = 1 + t$$

$$\frac{y-3}{-2} = t \quad \to \quad y = 3 - 2t$$

$$z + 2 = t \quad \to \quad z = -2 + t.$$

Mi az egyenesnek azt az M pontját keressük, amelyik rajta van az xy síkon. Az ilyen pont koordinátái általánosan: $M(x, y, 0)$. Mivel a harmadik koordináta 0, ezt behelyettesítve az egyenes egyenletrendszerébe:

$z = -2 + t \quad 0 = -2 + t \quad t = 2.$

A kapott *t* értéket visszahelyettesítve számoljuk a pont hiányzó koordinátáit:

$x = 1 + t \quad x = 1 + 2 = 3$

$y = 3 - 2t \quad y = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$

Tehát a keresett metszéspont:

$M(3, -1, 0).$

21. feladat: Adottak az $A(3, -1, 2)$, $B(4, 1, 1)$ és $C(7, -2, 5)$ pontok.

a) Írjuk fel az ABC háromszög S súlypontján átmenő, a háromszög síkjára merőleges egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

b) Írjuk fel a háromszög síkjának egyenletét!

c) Adja meg a háromszög B csúcsából induló magasságának hosszát!

Megoldás:

a) Mivel az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektor is a három pontra illeszkedő síkban van, ezért vektoriális szorzatuk merőleges lesz a síkra. Mivel az általunk keresett egyenes is merőleges a síkra, ezért a keresett egyenes egy irányvektora legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Végezzük el a számolást:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) \quad \overrightarrow{AC} = (4, -1, 3)$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -7, -9).$$

Meg kell még határoznunk a háromszög súlypontjának koordinátáit:

$$s_1 = \frac{3+4+7}{3} \quad s_1 = \frac{14}{3}$$

$$s_2 = \frac{-1+1+(-2)}{3} \quad s_2 = -\frac{2}{3}$$

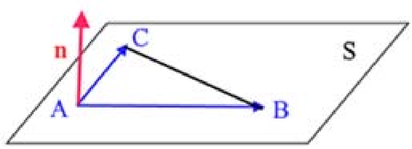
$$s_3 = \frac{2+1+5}{3} \quad s_3 = \frac{8}{3}$$

$$S\left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

A keresett egyenes:

$$e: \; x = \frac{14}{3} + 5t, \; y = -\frac{2}{3} - 7t, \; z = \frac{8}{3} - 9t \;\; t \in R.$$

b) A háromszög síkjának felírásához szükséges a sík egy normálvektora és egy ismert pontja.



A normálvektor merőleges a síkra, így kihasználva az előző feladatrészben kapott eredményt:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -7, -9).$$

A sík egyenletét az $\mathbf{n}$ normálvektor és az A pont segítségével írjuk fel:

$$5(x-3) - 7(y+1) - 9(z-2) = 0$$

Átrendezve:

$$5x - 7y - 9z = 4.$$

c) A B csúcsból induló magasságának hossza nem más, mint a B csúcsból az AC oldalra bocsátott merőleges szakasz hossza. Másképpen fogalmazva, a B csúcs és az AC oldalegyenes távolsága. Ezt viszont a következőképpen lehet számolni:

$$d_{B,AC} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

Kihasználva az első részben kapott eredményeket:

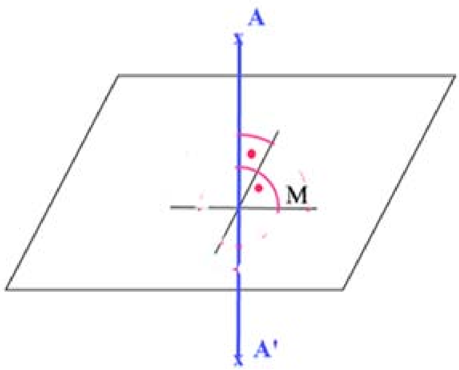
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (5, -7, -9) \quad \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{5^2 + (-7)^2 + (-9)^2} = \sqrt{155}$

$\overrightarrow{AC} = (4, -1, 3) \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{26}$

Tehát a keresett magasság hossza: $\dfrac{\sqrt{155}}{\sqrt{26}} \approx 2,44.$

22. feladat: Tükrözzük az $A(-2, 1, -1)$ pontot az $S: \ x + y + z = 1$ egyenletű síkra!

Megoldás: Egy pontot egy síkra úgy tükrözünk, hogy először a pontból merőlegest állítunk a síkra, megkeressük a merőleges egyenes és a sík M metszéspontját, majd kihasználjuk, hogy ez a metszéspont felezőpontja az eredeti pont és a tükörkép alkotta szakasznak.



Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor a sík egy normálvektora lehet az egyenes egy irányvektora. Hívjuk ezt az egyenest e egyenesnek, akkor

$\mathbf{v_e} = \mathbf{n_S} = (1, 1, 1)$

Felírhatjuk a síkra merőleges, az A ponton átmenő e egyenes egyenletét:

$e: \ x = -2 + t, \ y = 1 + t, \ z = -1 + t \ t \in R$

Az M metszéspont meghatározásához helyettesítsük be az e egyenes egyenletét az S sík egyenletébe:

$-2 + t + 1 + t - 1 + t = 1 \quad \rightarrow \quad -2 + 3t = 1 \quad \rightarrow \quad t = 1$

azaz

$M(-1, 2, 0).$

Kihasználva, hogy M felezőpont és a tükörkép pontot $A'(x, y, z)$ módon jelölve, a felezőpontra vonatkozó összefüggés alapján:

$-1 = \dfrac{-2 + x}{2} \quad \rightarrow \quad x = 0$

$2 = \dfrac{1 + y}{2} \quad \rightarrow \quad y = 3$

$0 = \dfrac{-1 + z}{2} \quad \rightarrow \quad z = 1$

A keresett tükörkép:

$A'(0, 3, 1).$

23. feladat: Adjuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2,3,5)$ ponton és illeszkedik az y tengelyre!

Megoldás: A sík megadásához szükségünk van egy pontra és egy normálvektorra. A pont adott, a normálvektort kell meghatároznunk. Ha a sík illeszkedik egy egyenesre, akkor a sík egy normálvektora merőleges lesz az egyenesre, és így az egyenes egy irányvektorára is. Tehát olyan $\mathbf{n}$ normálvektort keresünk, amely merőleges az y tengely $\mathbf{v_y} = \mathbf{j} = (0,1,0)$ irányvektorára.

Másrészt, ha megadnánk egy Q pontot az y tengelyen, akkor a $\overline{QP}$ vektor illeszkedik a síkra, tehát merőleges az $\mathbf{n}$ normálvektorra. Adjunk meg egy pontot az y tengelyről! A legegyszerűbb az origó, azaz $Q(0,0,0)$. Ekkor $\overline{QP} = (2,3,5)$. Tehát keresünk egy $\overline{QP}$ és $\mathbf{v_y}$ vektorokra merőleges vektort. A feltételnek megfelel a vektoriális szorzata. Ezért legyen

$$\mathbf{n} = \overline{QP} \times \mathbf{v_y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-5,0,2).$$

Az S sík egyenlete:

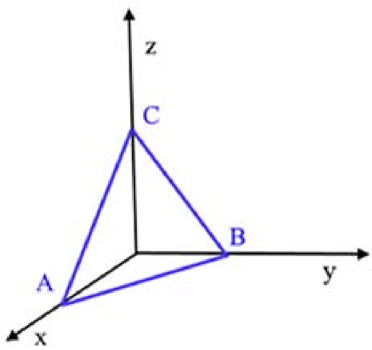
$$S: \quad -5(x-2) + 0(y-3) + 2(z-5) = 0.$$

Rendezéssel a következő egyenlethez jutunk:

$$-5x + 2z = 0.$$

24. feladat: Mekkora területű háromszöget metszenek ki a koordinátasíkok az $S: \; 2x - y + 3z = 6$ egyenletű síkból?

Megoldás: Határozzuk meg először a kimetszett háromszög csúcspontjainak koordinátáit.



Az x tengelyre eső A csúcspontról tudjuk, hogy a második és harmadik koordinátája *0*, azaz $y = z = 0$. A sík egyenlete alapján, akkor $x = 3$.

Az y tengelyen lévő B csúcspontnál $x = z = 0$, behelyettesítve a sík egyenletébe: $y = -6$.

A *z* tengelyen lévő C csúcspont koordinátái, ha $x = y = 0$, akkor $z = 2$.

Tehát a csúcspontok:

$$A(3,0,0) \quad B(0,-6,0) \quad C(0,0,2).$$

Válasszuk ki az egyik pontot, például A-t. Indítsunk vektorokat A-ból a háromszög másik két csúcsába. A megadott két vektor kifeszíti a háromszöget és területe pedig

$$t = \frac{1}{2} \|\overline{AB} \times \overline{AC}\|.$$

Végezzük el a számolást!

$$\overline{AB} = (-3,-6,0) \quad \overline{AC} = (-3,0,2)$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -3 & -6 & 0\\ -3 & 0 & 2\end{vmatrix}=(-12,6,-18)$$

$$t=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|=\frac{1}{2}\sqrt{144+36+324}=\sqrt{126}.$$

25. feladat: Adott az $ABCD$ tetraéder, ahol $A(4,7,6)$, $B(0,1,-2)$, $C(-1,5,3)$ és $D(4,-5,2)$.

a) Határozzuk meg a tetraéder ABC és BCD oldallapjai által bezárt szögét!

b) Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéderben az ABC oldallap és az AD oldalegyenes által bezárt szöget!

Megoldás:

a) Két sík hajlásszöge megadható, ha ismerjük a síkok normálvektorainak hajlásszögét, tehát nem kell a síkok egyenletét felírni, elég a normálvektort ismerni. Ezért állítsuk elő a feladatban szereplő síkok egy-egy normálvektorát.

Az ABC oldallap normálvektora egy olyan vektor lehet, amely merőleges az ABC síkra. Az adatokból ismerhetünk két olyan vektort, amely benne van az említett síkban, ezek az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok. A keresett normálvektor mindkét vektorra merőleges, tehát adódik, hogy válasszuk normálvektornak az $\mathbf{n_{ABC}}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

Adatokkal:

$$\overrightarrow{AB}=(-4,-6,-8)\quad \overrightarrow{AC}=(-5,-2,-3),$$

$$\mathbf{n_{ABC}}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -4 & -6 & -8\\ -5 & -2 & -3\end{vmatrix}=(2,28,-22),$$

$$\mathbf{n_{ABC}}=\sqrt{2^2+28^2+(-22)^2}=2\sqrt{318}$$

Hasonló megfontolások alapján a BCD oldallap egy normálvektora pedig legyen $\mathbf{n_{BCD}}=\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}$.

Adatokkal:

$$\overrightarrow{BD}=(4,-6,4)\quad \overrightarrow{BC}=(-1,4,5)$$

$$\mathbf{n_{BCD}}=\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 4 & -6 & 4\\ -1 & 4 & 5\end{vmatrix}=(-46,-24,10)$$

$$\mathbf{n_{BCD}}=\sqrt{(-46)^2+(-24)^2+10^2}=2\sqrt{698}.$$

Ekkor:

$$\cos\phi=\frac{\langle\mathbf{n_{ABC}},\mathbf{n_{BCD}}\rangle}{\|\mathbf{n_{ABC}}\|\|\mathbf{n_{BCD}}\|}=\frac{2\cdot(-46)+28\cdot(-24)+(-22)\cdot 10}{2\sqrt{318}\cdot 2\sqrt{698}}=$$

$$=\frac{-984}{4\sqrt{221964}}\qquad \phi\approx 121,48^\circ$$

Mivel $90^\circ<\phi$, ezért a két sík hajlásszöge:

$$\alpha=180^\circ-\phi\approx 180^\circ-121,48^\circ\approx 58,52^\circ.$$

b) A hajlásszög meghatározásához elegendő ismerni az ABC oldallap egy normálvektorát és az AD oldalegyenes egy irányvektorát. Használjuk fel, hogy az előző részben már meghatároztuk az ABC oldallap egy normálvektorát:

$\mathbf{n}_{\mathbf{ABC}} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 28, -22)$

Az AD oldalegyenes egy irányvektora lehetne az:

$\overrightarrow{AD} = (0, -12, -4).$

Ekkor a keresett szög:

$$\cos\phi = \frac{\langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n}_{\mathbf{ABC}} \rangle}{\|\overrightarrow{AD}\| \|\mathbf{n}_{\mathbf{ABC}}\|} = \frac{0 \cdot 2 + (-12) \cdot 28 + (-4) \cdot (-22)}{\sqrt{0^2 + (-12)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 28^2 + (-22)^2}} =$$

$$= \frac{-248}{4\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{318}} \approx -0,5497 \quad \phi \approx 123,35\,°.$$

Mivel $90\,° < \phi$, ezért a keresett hajlásszög:

$\alpha = \phi - 90\,° \approx 123,35\,° - 90\,° \approx 33,35\,°.$

Ellenőrző kérdések

17. kérdés: Írja fel az ABC háromszög síkjának egyenletét, ha $A(2, -1, 5)$, $B(-3, -4, 1)$ és $C(6, 5, -1)$!

- $20x - 3y + 2z = 53$
- $x - y + z = 8$
- $21x - 23y - 9z = 20$
- $4x - 2y + 2z = 20$

mehet

18. kérdés: Határozza meg az $A(1, -5, 2)$ pont és az $e: \ x = 4,\ y = -2 + 2t,\ z = 3t \quad t \in R$ egyenes közös síkjának egyenletét!

- $13x + 9y + 6z = -20$
- $13x - 9y - 6z = 46$
- $13x - 9y + 6z = 70$
- $13x + 9y - 6z = -44$

mehet

19. kérdés: Adott egy háromszög két csúcsa és a súlypontja. Írja fel a BC oldal egyenesének egyenletét, ha $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 3)$ és $S(2, 1, 3)$.

- $x = 6 + 7t,\ y = 1 + t,\ z = 3t \ t \in R$
- $x = 6 + 7t,\ y = 1 + t,\ z = t \ t \in R$
- $x = -1 + 7t,\ y = t,\ z = 3 \ t \in R$
- $x = -1 + 7t,\ y = t,\ z = 3t \ t \in R$

mehet

20. kérdés: Adott az $ABCD$ tetraéder, ahol $A(4,7,6)$, $B(0,1,-2)$, $C(-1,5,3)$ és $D(4,-5,2)$. Határozzuk meg a tetraéderben az AB oldal felezőmerőleges síkjának és a CD oldal egyenesének hajlásszögét!

- $23,39\,°$
- $66,61\,°$
- $27,65\,°$
- $63,35\,°$

mehet