Tanulási cél: Megismerni az $f(ax+b)$, $f^{\alpha}(x)f'(x)$ és $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvények integrálási módszerét, valamint a parciális integrálás szabályát. Ezen módszereket alkalmazni feladatokban.

Elméleti összefoglaló

Az alapintegrálok ismeretében, és az előző leckében megismert egyszerű tételek felhasználásával a függvények elég széles körében meghatározható a primitív függvény. Az alábbiakban olyan módszereket ismertetünk, melyekkel a primitív függvényt még szélesebb körben meghatározhatjuk.

Tétel: Ha tudjuk, hogy az f függvény primitív függvénye F, akkor

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c,$$

ahol $a,\ b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$.

A tételeket sok esetben bizonyítás nélkül adjuk csak meg, de az egyszerűbb esetekben megmutatjuk a bizonyítást is.

Bizonyítás: Azt kell belátnunk, hogy az integrálás eredményének $\left(\frac{F(ax+b)}{a} + c\right)$ a deriváltja az integrálandó függvénnyel ($f(ax+b)$) egyenlő. Ehhez használjuk fel az összetett függvények deriválási szabályát és azt, hogy ha F primitív függvénye f-nek, akkor $F' = f$.

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a} + c\right)' = \left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' + c' = \frac{1}{a}(F(ax+b))' + 0 =$$
$$= \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot(ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$$

A feladatokban való alkalmazáshoz a tételt másképp úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha olyan összetett függvényt kell integrálnunk, melynek belső függvénye lineáris, akkor integráljuk a külső függvényt, s összetételt alkotunk az eredeti belső függvénnyel, valamint osztunk a belső függvényből x együtthatójával.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: $\int \sin(3x+\pi)dx$

Megoldás: Az integrandusunk jól láthatóan olyan összetett függvény, amelynek belső függvénye elsőfokú polinom, vagy más szóval lineáris. Alkalmazhatjuk a fent megismert szabályt.

A külső függvény $\sin x$. Ennek integrálja: $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$.

A belső függvény $3x+\pi$, ez felel meg $ax+b$-nek, azaz $a = 3$ és $b = \pi$.

Ezután egyszerűen behelyettesítünk a szabályba.

$$\int \sin(3x+\pi)dx = \frac{-\cos(3x+\pi)}{3} + c$$

Az ilyen feladatokban általában nem szükséges sok átalakítást végrehajtani az integranduson, a hangsúly azon van, hogy felismerjük, ilyen típusú összetett függvényünk van. Ha ez sikerült, akkor már könnyű alkalmazni a szabályt.

2. feladat: $\int \frac{1}{5x-8}dx$

Megoldás: Az integranduson megint azt ismerhetjük fel, hogy olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú.

A külső függvény most nyilván az $\frac{1}{x}$. Ennek integrálja a következő: $\int \frac{1}{x}dx = \ln\left|x\right| + c$.

A belső függvény most $5x-8$, tehát $a=5$ és $b=8$.

Alkalmazva az $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}+c$ szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \frac{1}{5x-8}dx = \frac{\ln|5x-8|}{5}+c.$$

3. feladat: $\int \frac{1}{\cos^2 5x}dx$

Megoldás: Ha most deriválnunk kellene, akkor azt mondanánk, jelen esetben egy többszörösen összetett függvényünk van. Külső függvény az $\frac{1}{x^2}$, középső a $\cos x$, és belső az $5x$. Nem muszáj azonban ennyire felbontanunk a függvényt, sőt integrálásnál nem is célszerű. Az előző felbontásban szereplő belső függvény, az $5x$, egy lineáris függvény. Csak annyit kell tennünk, hogy amit az előbb külső és középső függvénynek tekintettünk, azt nem bontjuk fel, hanem egyben tekintjük külső függvénynek. Azaz most $\frac{1}{\cos^2 x}$ lesz a külső függvény. Azért célszerű ez a felbontás, mert így a külső függvény egy alapintegrál. Tudjuk ugyanis, hogy $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + c.$

Amint már említettük, a belső függvény $5x$, azaz $a=5$ és $b=0$.

Alkalmazva a korábban ismertetett szabályt, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \frac{1}{\cos^2 5x}dx = \frac{\operatorname{tg} 5x}{5}+c.$$

4. feladat: $\int \sqrt[3]{4x+7}\,dx$

Megoldás: Az integrandus ebben az esetben is olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú.

A külső függvény nyilván a $\sqrt[3]{x}$, melynek integrálja: $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+c.$

A belső függvény 4x+7, tehát $a=4$, és $b=7$.

Alkalmazva az előzőekben ismertetett szabályt, a következőt kapjuk:

$$\int \sqrt[3]{4x+7}\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt[3]{(4x+7)^4}}{4}+c = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x+7)^4}+c.$$

5. feladat: $\int e^{4-x}\,dx$

Megoldás: Most is olyan függvényt kell integrálnunk, melynek belső függvénye lineáris.

A külső függvény most az e^x, melynek integrálja önmaga, azaz: $\int e^x\,dx = e^x + c.$

A belső függvény $4-x$, tehát $a=-1$, és $b=4$.

Alkalmazva az előzőekben ismertetett szabályt, a következőt kapjuk:

$$\int e^{4-x}\,dx = \frac{e^{4-x}}{-1}+c = -e^{4-x}+c.$$

A feladatban arra kell figyelni, hogy a lineáris belső függvényben most fordított a sorrend, azaz a konstans áll elől, és az elsőfokú rész hátul. Valamint ne feledkezzünk el arról sem, hogy az együtthatóba az előjel is beletartozik. Mivel most $-x$ szerepel, ezért az elsőfokú részben az együttható $a=-1$.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: $\int \cos(2x-3)dx$

- $2\sin(2x-3)+c$
- $-3\sin(2x-3)+c$
- $\frac{\sin(2x-3)}{2}+c$
- $\frac{\sin(2x-3)}{-3}+c$

mehet

2. kérdés: $\int \frac{1}{5-6x}dx$

- $5\ln|5-6x|+c$
- $\frac{\ln|5-6x|}{5}+c$
- $-6\ln|5-6x|+c$
- $\frac{\ln|5-6x|}{-6}+c$

mehet

3. kérdés: $\int \frac{1}{(2x+5)^3}dx$

- $\frac{(2x+5)^{-2}}{2}+c$
- $\frac{1}{-4(2x+5)^2}+c$
- $\frac{\ln(2x+5)^3}{2}+c$
- $\frac{\ln(2x+5)^3}{5}+c$

mehet

4. kérdés: $\int 4^{8-5x}\,dx$

- $\frac{4^{8-5x}\cdot\ln 4}{5}$
- $\frac{4^{8-5x}\cdot\ln 4}{-5}$
- $\frac{4^{8-5x}}{5\cdot\ln 4}$
- $\frac{4^{8-5x}}{-5\cdot\ln 4}$

mehet

5. kérdés: $\int \sqrt{4+9x}\,dx$

- [x] $\dfrac{2\sqrt{(4+9x)^3}}{27}+c$
- [ ] $\dfrac{\sqrt{(4+9x)^3}}{6}+c$
- [ ] $\dfrac{1}{8\sqrt{4+9x}}+c$
- [ ] $\dfrac{1}{18\sqrt{4+9x}}+c$

mehet

Elméleti összefoglaló

Tétel: Minden $\alpha \neq 1$ valós szám esetén

$$\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c.$$

Bizonyítás: A tételt az integrálás eredményének deriválásával igazoljuk. Eközben felhasználjuk az összetett függvény deriválási szabályát, amikor az $f^{\alpha+1}(x)$ függvényt deriváljuk. Ekkor a külső függvény $x^{\alpha+1}$, a belső függvény pedig $f(x)$.

$$\left(\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c\right)' = \left(\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}\right)' + c' = \frac{1}{\alpha+1}\left(f^{\alpha+1}(x)\right)' + 0 =$$
$$= \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)f^{\alpha}(x)\cdot f'(x) = f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)$$

A tételt szövegben is megfogalmazhatjuk a feladatokban való alkalmazáshoz. Ha olyan szorzatot kell integrálnunk, melynek egyik tényezője egy függvény hatványa (a kitevő $\neq -1$), másik tényezője pedig a hatványozott függvény deriváltja, akkor az integrálás eredményében eggyel alacsonyabb hatványra emeljük a függvényt, és osztunk az új kitevővel.

Kidolgozott feladatok

6. feladat: $\int \left(x^2+5\right)^6\cdot 2x\,dx$

Megoldás: Az integrandusban most azt ismerhetjük fel, hogy egy függvény hatványa áll benne megszorozva a hatványozott függvény deriváltjával. Úgy is mondhatjuk, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)$ típusú. Alkalmazhatjuk a most megismert szabályt.

Ebben a feladatban nyilván $f(x)=x^2+5$ az a függvény, aminek a hatványa szerepel, s mellette ott áll szorzóként a deriváltja, hiszen $\left(x^2+5\right)'=2x$.

A szabály azt mondja ki, hogy ilyen esetben a függvény 1 -gyel magasabb kitevőjű hatványa lesz az integrál, elosztva ezen 1 -gyel nagyobb kitevővel. Így az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int \left(x^2+5\right)^6\cdot 2x\,dx = \int \left(x^2+5\right)^6\cdot\left(x^2+5\right)'dx = \frac{\left(x^2+5\right)^7}{7}+c.$$

Látható, hogy a megoldás során nem volt szükség az integrandus hosszas átalakítására. Az volt a fontos, hogy felismerjük, az integrandus típusát. Erre akkor van csak esélyünk, ha rendelkezünk az alapderiváltak biztos ismeretével.

7. feladat: $\int \left(x^2-1\right)^3 x\,dx$

Megoldás: Az előző feladat megoldásának mintájára azt mondhatjuk, hogy legyen $f(x)=x^2-1$, hiszen ennek a függvénynek hatványa szerepel az integrandusban. A gondot az okozza, hogy ennek deriváltja $\left(x^2-1\right)'=2x$, és nem pontosan ez szerepel a függvény hatványa mellett szorzóként, hanem csak x. Ezen azonban segíthetünk, ha az integrandust szorozzuk is, és osztjuk is 2-vel. Így elérjük, hogy a függvény hatványa mellett a hatványozott függvény deriváltja álljon.

$$\int \left(x^2-1\right)^3 x\,dx=\int \frac{\left(x^2-1\right)^3 2x}{2}dx=$$

Mivel konstans szorzó kiemelhető az integrálból, ezért a 2-vel osztás helyett célszerűbb $\frac{1}{2}$-del szorzást írni az integrál elé. Így az integrandus egyértelműen $f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)$ típusú.

$$\int \frac{\left(x^2-1\right)^3 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^3 2x\,dx=\frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^3\cdot\left(x^2-1\right)'dx$$

Alkalmazzuk a fent megismert szabályt.

$$\frac{1}{2}\int \left(x^2-1\right)^3\cdot\left(x^2-1\right)'dx=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-1\right)^4}{4}+c=\frac{1}{8}\left(x^2-1\right)^4+c$$

A megoldásból látható, hogy ha az integrandus egyik tényezője egy függvény hatványa, a másik pedig ezen hatványozott függvény deriváltjának szám szorosa, akkor kialakítható az $f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)$ típusú integrandus. Ilyenkor megfelelő konstanssal szorzunk is és osztunk is, hogy a hatványozott függvény deriváltja jelenjen meg. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ilyet csak akkor tehetünk, ha a hatványozott függvény deriváltjától csak konstans szorzó erejéig tér el a tényező. Ha nem konstans szorzó az eltérés, akkor a függvény nem integrálható ilyen módon.

8. feladat: $\int \sqrt[3]{\cos x}\cdot\sin x\,dx$

Megoldás: Az előző két feladatban egyértelműen látható volt egy függvény hatványa, most ehhez egy kicsit alakítanunk kell az integranduson. A gyök helyett írjunk törtkitevős hatványt.

$$\int \sqrt[3]{\cos x}\cdot\sin x\,dx=\int(\cos x)^{\frac{1}{3}}\cdot\sin x\,dx$$

Így már megvan, hogy a $\cos x$ függvény hatványa szerepel az integrandusban egyik tényezőként. Mellette $\sin x$ áll, ami csak egy előjelben különbözik a $\cos x$ deriváltjától, hiszen $(\cos x)'=-\sin x$. Érjük el, hogy megjelenjen a negatív előjel az integrandusban. Ha két negatív előjelet is kiteszünk, akkor mintha nem is tettünk volna semmit. Az egyiket tegyük ki az integrál elé, a másikat pedig belül a $\sin x$-hez. Így elérjük, hogy a hatványozott függvény deriváltja álljon az integrandusban.

$$\int(\cos x)^{\frac{1}{3}}\cdot\sin x\,dx=-\int(\cos x)^{\frac{1}{3}}\cdot(-\sin x)dx=-\int(\cos x)^{\frac{1}{3}}\cdot(\cos x)'dx$$

Ezután már alkalmazható az $\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)dx=\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c$ szabály, s az alábbi eredményt kapjuk:

$$-\int(\cos x)^{\frac{1}{3}}\cdot(\cos x)'dx=-\frac{(\cos x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c=-\frac{3}{4}(\cos x)^{\frac{4}{3}}+c.$$

9. feladat: $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}dx$

Megoldás: Ebben a feladatban sem nyilvánvaló, hogy függvény hatványa szerepel, ezért alakítunk az integranduson. A tört helyett most írjunk negatív kitevős hatvánnyal való szorzást.

$$\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x \, dx$$

Már csak annyit kell észrevenni, hogy $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, tehát a második tényezőben a hatványozott függvény deriváltja áll.

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot \operatorname{sh} x \, dx = \int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)' dx$$

Alkalmazva a megfelelő szabályt, a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\operatorname{ch} x)^{-3} \cdot (\operatorname{ch} x)' dx = \frac{(\operatorname{ch} x)^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2(\operatorname{ch} x)^2} + c.$$

10. feladat: $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} dx$

Megoldás: Tudjuk, hogy $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Ezért célszerűnek látszik két tört szorzatára bontani az integrandust, majd negatív kitevős hatványt írni. Így jól láthatóvá tehetjük, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú.

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right) \cdot \operatorname{arctg}^2 x} dx = \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)} \cdot (\operatorname{arctg} x)^{-2} dx = \int (\operatorname{arctg} x)^{-2} \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx$$

Alkalmazzuk az $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú függvényekre vonatkozó integrálási szabályt.

$$\int (\operatorname{arctg} x)^{-2} \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{\operatorname{arctg} x} + c$$

11. feladat: $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Megoldás: Tudjuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ezért célszerű a törtet szorzattá bontani. Még annyit kell felismernünk, hogy a $\ln x$-et is tekinthetjük egy függvény hatványának, hiszen $(\ln x)^1$-ről van szó, csak az1 -et nem írtuk ki a kitevőben. Így jól láthatóvá válik, hogy az integrandus $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$ típusú függvény.

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int (\ln x)^1 \cdot (\ln x)' dx$$

Alkalmazva a megfelelő integrálási módszert, a következő eredményt kapjuk:

$$\int (\ln x)^1 \cdot (\ln x)' dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c = \frac{1}{2} \ln^2 x + c.$$

Ellenőrző kérdések

6. kérdés: $\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx$

- $\frac{\cos^4 x}{4} + c$
- $-\frac{\cos^4 x}{4} + c$
- $\frac{\sin^4 x}{4} + c$

- $-\frac{\sin^4 x}{4}+c$

mehet

7. kérdés: $\int \sqrt{\text{sh}\, x} \cdot \text{ch}\, x \, dx$

- $\frac{2}{3}\sqrt{\text{sh}^3 x}+c$
- $\frac{3}{2}\sqrt{\text{sh}^3 x}+c$
- $-\frac{2}{3}\sqrt{\text{sh}^3 x}+c$
- $-\frac{3}{2}\sqrt{\text{sh}^3 x}+c$

mehet

8. kérdés: $\int x^2\left(4-x^3\right)^5 dx$

- $\frac{\left(4-x^3\right)^6}{6}+c$
- $\frac{\left(4-x^3\right)^6}{18}+c$
- $-\frac{\left(4-x^3\right)^6}{6}+c$
- $-\frac{\left(4-x^3\right)^6}{18}+c$

mehet

9. kérdés: $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^4} dx$

- $\frac{1}{(e^x+1)^3}+c$
- $-\frac{1}{3(e^x+1)^3}+c$
- $\frac{1}{(e^x+1)^5}+c$
- $-\frac{1}{5(e^x+1)^5}+c$

mehet

10. kérdés: $\int \frac{\text{tg}\, x}{\cos^2 x} dx$

- $-\mathrm{tg}^2 x + c$
- $\mathrm{tg}^2 x + c$
- $-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + c$
- $\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + c$

mehet

11. kérdés: $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\, x}}{\left(1+x^2\right)}dx$

- $\frac{4}{3}\sqrt[3]{\mathrm{arctg}^4 x} + c$
- $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\mathrm{arctg}^3 x} + c$
- $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\mathrm{arctg}^4 x} + c$
- $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\mathrm{arctg}^3 x} + c$

mehet

Elméleti összefoglaló

Tétel: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c.$

Bizonyítás: Ha $f(x) > 0$, akkor $|f(x)| = f(x)$. Alkalmazzuk az összetett függvény deriválási szabályát.

$$(\ln|f(x)| + c)' = (\ln(f(x)))' + c' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ha $f(x) < 0$, akkor $|f(x)| = -f(x)$. Most is az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk.

$$(\ln|f(x)| + c)' = (\ln(-f(x)))' + c' = \frac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x)) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Azon x-ekre, ahol $f(x) = 0$, az $\frac{f'(x)}{f(x)}$ függvény nincs értelmezve.

A feladatokban történő alkalmazáshoz a tételt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha olyan törtet kell integrálnunk, melynek számlálója a nevező deriváltjával egyenlő, akkor az integrálás eredménye a nevező abszolút értékének a logaritmusa lesz.

Kidolgozott feladatok

12. feladat: $\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 6}dx$

Megoldás: Az integrandus olyan tört, melynek számlálójában épp a nevező deriváltja áll, hiszen $\left(x^3 - 2x + 6\right)' = 3x^2 - 2$. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy egy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvényt kell integrálnunk.

Mivel most jól láthatóan $f(x) = x^3 - 2x + 6$, csak annyi a feladatunk, hogy behelyettesítsünk a szabályba.

$$\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x + 6} dx = \int \frac{\left(x^3 - 2x + 6\right)'}{x^3 - 2x + 6} dx = \ln\left|x^3 - 2x + 6\right| + c$$

13. feladat: $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx$

Megoldás: Most azt kell felismernünk az integranduson, hogy a számláló, csak egy konstans szorzóban tér el a nevező deriváltjától, hiszen $\left(e^{3x} + 5\right)' = 3e^{3x}$.

Ha be tudjuk csempészni a számlálóba a 3-at, akkor az integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú lesz, s el tudjuk végezni az integrálást. Hasonló esettel már találkoztunk korábban, és akkor a hiányzó konstanssal szoroztunk is, osztottunk is. Járjunk el most is így, és az osztást egyből írjuk az integrál jel elé reciprokkal történő szorzás formájában.

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\left(e^{3x} + 5\right)'}{e^{3x} + 5} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk az

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$ szabályba.

$$\frac{1}{3} \int \frac{\left(e^{3x} + 5\right)'}{e^{3x} + 5} dx = \frac{1}{3} \ln\left|e^{3x} + 5\right| + c = \frac{1}{3} \ln\left(e^{3x} + 5\right) + c$$

Mivel a $e^{3x} + 5 > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért hagyhattuk el az abszolút értéket az eredményben.

Amint látható, ha olyan törtünk van, melyben a számláló csak konstans szorzóban különbözik a nevező deriváltjától, akkor a hiányzó konstanssal szorozva és osztva is, elérhető, hogy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen az integrandus.

14. feladat: $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a nevező deriváltja $\left(x^2 + 4\right)' = 2x$, csak egy konstans szorzóban tér el a tört számlálójától, ami x. Ahhoz, hogy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen az integrandus, szükség lenne a számlálóban egy 2-es szorzóra. Az előbbiek szerint szorozzunk 2-vel, és osszunk is 2-vel. Az osztást egyből írjuk az integrál elé $\frac{1}{2}$-del szorzás formájában.

$$\int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 + 4\right)'}{x^2 + 4} dx$$

Már csak be kell helyettesítenünk a szabályba.

$$\frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 + 4\right)'}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 + 4\right| + c = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 4\right) + c$$

Az abszolút érték most is elhagyható az eredményben, hiszen $x^2 + 4 > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

15. feladat: $\int \operatorname{tg} x \, dx$

Megoldás: Használjuk fel a $\operatorname{tg} x$ definícióját, azaz írjunk helyette $\frac{\sin x}{\cos x}$-et.

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Az integrálandó tört számlálója csak egy előjelben tér el a nevező deriváltjától, hiszen $(\cos x)' = -\sin x$. Szorozzuk meg ezért az integrandust -1-gyel, és az integrál elé is írjunk egy negatív előjelet. Így elérjük, hogy az integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvény legyen.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a megfelelő integrálási szabályba.

$$-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$$

16. feladat: $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} dx$

Megoldás: Ugyan törtet kell integrálnunk, de most nyilván nem igaz, hogy a számlálóban a nevező deriváltja áll, hiszen a nevezőben egy szorzat van, aminek deriváltja nem 1 . Látunk azonban a függvényben részletként $\operatorname{tg} x$-et, amiről tudjuk, hogy deriváltja $\frac{1}{\cos^2 x}$, s a nevezőben szerepel a $\cos^2 x$ is. Használjuk fel a törtek azon átalakítását, amivel emeletes törtté alakíthatunk egy törtet, ha a nevezőben szorzat áll. Ezt az alábbi módon írhatjuk:

$$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{\frac{1}{a}}{b} \text{ vagy } \frac{1}{a \cdot b} = \frac{\frac{1}{b}}{a}.$$

Ha ezt úgy alkalmazzuk, hogy a számlálóba $\frac{1}{\cos^2 x}$ kerül, akkor ezzel a nevezőben maradó deriváltját kapjuk meg, azaz $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusúvá sikerül alakítanunk a függvényt.

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} dx = \int \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x} dx$$

Ezután már csak be kell helyettesítenünk a szabályba.

$$\int \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x} dx = \ln|\operatorname{tg} x| + c$$

A feladatot sikerült megoldanunk, de talán többen azt mondják magukban, hogy ők bizony másképp alakították volna az integrandust. Az előző feladatban szerepelt, hogy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, amit most is felhasználhattunk volna. Így a tört nevezőjében még egyszerűsíthetünk is.

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx$$

Ezen a ponton azonban elakadunk. A kapott tört nem alapintegrál, és nem tudjuk egyik könnyen integrálható függvénytípust, azaz $f(ax+b)$, vagy $f^{\alpha}(x) \cdot f'(x)$, vagy $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sem kialakítani. Az átalakításunk ugyan jó, de nem segít a függvény integrálásában. Az integrálási feladatokban tudatosan keresni kell, hogy a tanult szabályok közül melyik alkalmazható az adott esetben. Mivel már két olyan szabályt is láttunk, amiben függvény és deriváltja is szerepel, így kijelenthetjük, hogy a szabályok sok esetben csak akkor ismerhetők fel, ha jól ismerjük az alapderiváltakat. Ha nem tudjuk, melyik függvénynek mi a deriváltja, akkor nem fogjuk felismerni a feladatokban, hogy ezeket az integrálási szabályokat kellene alkalmaznunk. Ilyenkor könnyen kerülhetünk olyan zsákutcába, mint amibe fenti átalakításokkal jutottunk.

17. feladat: $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

Megoldás: Ilyen formában a tört számlálója nyilván nem egyenlő a nevező deriváltjával. De a nevezőben látjuk az $\ln x$-et, amiről tudjuk, hogy deriváltja $\frac{1}{x}$, és az x is ott van a nevezőben. Ha ugyanúgy emeletes törtté alakítunk, mint az előző feladatban, akkor most is $\frac{f'(x)}{f(x)}$ típusú függvényt kapunk. Vigyünk a számlálóba az $\frac{1}{x}$-et.

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx$$

A szokásos módon már csak behelyettesítünk a szabályba.

$$\int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + c$$

Ellenőrző kérdések

12. kérdés: $\int \frac{6x-4}{3x^2-4x+1} dx$

- $\ln|6x-4|+c$
- $\ln\left|3x^2-4x+1\right|+c$
- $\ln\left|3x^2-4x\right|+c$
- $\ln\left|x^3-2x^2+x\right|+c$

mehet

13. kérdés: $\int \frac{x^2-4}{x^3-12x} dx$

- $\ln\left|x^3-12x\right|+c$
- $\frac{1}{3}\ln\left|x^3-12x\right|+c$
- $3\ln\left|x^3-12x\right|+c$
- $\ln\left|x^2-4\right|+c$

mehet

14. kérdés: $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+8} dx$

- $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+8\right)+c$
- $\ln\left(e^{2x}+8\right)+c$
- $2\ln\left(e^{2x}+8\right)+c$
- $\frac{1}{e^{2x}}\ln\left(e^{2x}+8\right)+c$

mehet

15. kérdés: $\int \operatorname{ctg} x \, dx$

- $-\ln|\cos x| + c$
- $\ln|\cos x| + c$
- $\ln|\sin x| + c$
- $-\ln|\sin x| + c$

mehet

16. kérdés: $\int \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x} dx$

- $-\ln|\operatorname{ctg} x| + c$
- $\ln|\operatorname{ctg} x| + c$
- $-\ln\left|\sin^2 x\right| + c$
- $\ln\left|\sin^2 x\right| + c$

mehet

17. kérdés: $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right) \cdot \operatorname{arctg} x} dx$

- $-\ln\left(1+x^2\right) + c$
- $\ln\left(1+x^2\right) + c$
- $-\ln|\operatorname{arctg} x| + c$
- $\ln|\operatorname{arctg} x| + c$

mehet

Elméleti összefoglaló

A szorzatfüggvény deriválási szabályának megfordításából egy újabb integrálási módszerhez juthatunk. Az alábbi tétel erről szól.

Tétel: Ha az $u(x)$ és $v(x)$ függvények differenciálhatóak, valamint $u'(x)v(x)$ integrálható, akkor az $u(x)v'(x)$ függvény is integrálható és

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Bizonyítás: Az $u(x)$ és $v(x)$ függvények differenciálhatóak, így a szorzatfüggvény deriválási szabályát alkalmazva:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Fejezzük ki ebből $u'(x)v(x)$-et.

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$

A jobb oldalon álló függvény integrálható, ebből következően a bal oldal is integrálható. Integráljuk mindkét oldalt.

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \int (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)\,dx$$

A jobb oldalon tagonként integrálhatunk.

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Mivel az első tagban az $u(x)v(x)$ függvény deriváltját integráljuk, így integrálás után visszakapjuk az eredeti $u(x)v(x)$ függvényt.

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

A parciális integrálás alkalmazásával az $u(x)v'(x)$ függvény integrálását az $u'(x)v(x)$ függvény integrálásra vezetjük vissza. A szabályt olyan szorzatok esetén célszerű alkalmazni, melyekben a $v'(x)$-nek megfelelő tényező könnyen integrálható, s ha az $u'(x)v(x)$ könnyebben integrálható mint $u(x)v'(x)$. A szabály alkalmazásával soha nem fejeződik be a feladat megoldása, hiszen a jobb oldalon a második tag még integrált tartalmaz. Ezért is kapta elnevezését a szabály, hiszen csak részben történik meg az integrálás. Az alkalmazás során nagyon fontos, hogy egy integrálandó szorzat tényezői közül melyiket választjuk $u(x)$-nek, illetve $v'(x)$-nek. Erre vonatkozóan a kidolgozott feladatokban adunk útmutatást.

Kidolgozott feladatok

18. feladat: $\int (2x-6)\cdot \operatorname{sh} x\,dx$

Megoldás: Az integrandus most szorzat, s azon belül is egyik tényezője polinom, a másik pedig a . Próbálkozzunk az előbb megismert parciális integrálás alkalmazásával.

Válasszuk a polinomot $u(x)$-nek, mert így a szabály alkalmazása után visszamaradó integrálban majd ezen polinom deriváltja fog megjelenni, ami már csak egy konstans. Így a parciális integrálás után már nem szorzatfüggvény áll majd az integrandusban.

Legyen tehát $u(x) = 2x-6$ és $v'(x) = \operatorname{sh} x$.

Ekkor $u'(x) = 2$ és $v(x) = \operatorname{ch} x$.

Az ismert $v'(x)$-ből integrálással kaptuk meg $v(x)$-et. Ezért fontos, hogy a $v'(x)$-nek választott tényező könnyen integrálható legyen.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (2x-6)\cdot \operatorname{sh} x\,dx = (2x-6)\cdot \operatorname{ch} x - \int 2\cdot \operatorname{ch} x\,dx$$

A feladatot még nem oldottuk meg, hisz még van egy integrálunk. Ebből azonban a konstans szorzót kiemelhetjük, s utána már csak egy alapintegrál marad. Így az eredmény a következő lesz:

$$(2x-6)\cdot \operatorname{ch} x - \int 2\cdot \operatorname{ch} x\,dx = (2x-6)\cdot \operatorname{ch} x - 2\int \operatorname{ch} x\,dx =$$
$$= (2x-6)\cdot \operatorname{ch} x - 2\operatorname{sh} x + c\,.$$

19. feladat: $\int (3x+7)\cdot 5^x dx$

Megoldás: Az integrandus egy hasonló szorzat, mint amilyen az előző feladatban szerepelt. Az első tényező most is egy polinom, a második tényezőben pedig 5^x vette át a $\operatorname{sh} x$ szerepét. Az 5^x is könnyen integrálható, így megint a parciális integrálással próbálkozhatunk.

Legyen $u(x) = 3x + 7$ és $v'(x) = 5^x$.

Ekkor $u'(x) = 3$ és $v(x) = \frac{5^x}{\ln 5}$.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int (3x+7) \cdot 5^x dx = (3x+7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} dx$$

A még meghatározandó integrálból emeljük ki a konstansokat, így már csak egy alapintegrál marad majd, amit meghatározunk.

$$(3x+7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \int 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} dx = (3x+7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{3}{\ln 5} \int 5^x dx =$$
$$= (3x+7) \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{3}{\ln 5} \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + c = \frac{5^x}{\ln 5}\left(3x + 7 - \frac{3}{\ln 5}\right) + c$$

Az utolsó két feladatban az volt a közös, hogy olyan szorzatot kellett integrálnunk, melyek egyik tényezője egy polinom, másik tényezője pedig az a^x, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ függvények valamelyike. Ilyenkor célszerű a parciális integrálást alkalmazni olyan szereposztással, hogy $u(x)$ a polinom legyen, $v'(x)$ pedig a másik tényező. A szabályt használva a visszamaradó integrálban eggyel alacsonyabb fokszámú polinom marad már csak. Ha az eredeti polinom elsőfokú volt, akkor a visszamaradó integrálban $u'(x)$ már csak egy konstans lesz, ami az integrálból kiemelhető. A $v'(x)$-nek megfelelő függvényt könnyen tudjuk integrálni, hiszen az függvények a^x, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ mindegyike alapintegrál. Ráadásul az integrálás eredményeként kapott $v(x)$ függvényt is könnyű integrálni, mert az is alapintegrál, vagy annak szám szorosa lesz. Ez akkor fontos, ha a polinom nem elsőfokú. Ilyenkor a szabályt többször kell alkalmazni egymás után, egészen addig, míg a polinomból csak egy konstans marad a deriválások után. Erre majd a későbbiekben mutatunk példát.

20. feladat: $\int (4x+3) \cdot \ln x \, dx$

Megoldás: Ismét szorzatot kell integrálnunk, és az egyik tényező most is polinom, de a másik tényezőben álló $\ln x$ más típusú mint ami az előző két feladatban szerepelt. Akkor ott olyan függvény állt, amely alapintegrál volt. A $\ln x$ nem ilyen függvény. Ezért nem célszerű őt $v'(x)$-nek választani, hiszen akkor a $v(x)$-et nem könnyű meghatározni. Legyen tehát a szereposztás most a parciális integrálás során a következő:

$u(x) = \ln x$ és $v'(x) = 4x + 3$.

Ekkor $u'(x) = \frac{1}{x}$ és $v(x) = 2x^2 + 3x$.

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int (4x+3) \cdot \ln x \, dx = \left(2x^2 + 3x\right) \cdot \ln x - \int \left(2x^2 + 3x\right) \cdot \frac{1}{x} dx$$

A még meghatározandó integrálban egyszerűsítsünk, majd végezzük el az integrálást. Nem lesz nehéz dolgunk, mert az egyszerűsítés után egy polinomot kell integrálnunk.

$$\left(2x^2 + 3x\right) \cdot \ln x - \int 2x + 3 \, dx = \left(2x^2 + 3x\right) \cdot \ln x - \left(x^2 + 3x\right) + c$$

21. feladat: $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

Megoldás: Hasonló szorzatot kell integrálnunk mint az előző feladatban, csak most a polinom nem több tagból áll, hanem csak egyetlen tagból. Ugyanúgy járhatunk el, mint az előbb.

Legyen $u(x) = \ln x$ és $v'(x) = x^3$.

Ekkor $u'(x) = \frac{1}{x}$ és $v(x) = \frac{x^4}{4}$.

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx$$

A visszamaradó integrálban most is egyszerűsítsünk, a konstans szorzót pedig emeljük ki. Mivel x-nek egy hatványa marad csak, így ezt már könnyen tudjuk integrálni.

$$\frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c$$

Az eredmény szebb alakban írható, ha kiemeljük amit lehet.

$$\frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + c$$

22. feladat: $\int \ln x \, dx$

Megoldás: Az előző négy feladatban szorzat állt az integrálban, de most nem. Azaz egy egyszerű trükkel most is szorzattá alakíthatjuk. Írjuk az $\ln x$-et $1 \cdot \ln x$ formában. Az 1 is egy polinom, csak nagyon egyszerű polinom, hiszen 0 a fokszáma. $\left(1 = x^0\right)$ Így már ugyanúgy járhatunk el mint az előző két feladatban.

Legyen $u(x) = \ln x$ és $v'(x) = 1$.

Ekkor $u'(x) = \frac{1}{x}$ és $v(x) = x$.

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

A visszamaradó integrálban egyszerűsítsünk, majd hajtsuk végre az integrálást.

$$x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c$$

Az eredmény kiemelés után most is írható más alakban.

$$x \cdot \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

Az utolsó három feladatban olyan szorzatokat kellett integrálni, melyek egyik tényezője polinom volt, ez lehetett csak egy konstans is, a másik tényezője pedig az $\ln x$. Ilyenkor is alkalmazható a parciális integrálás, de nem a polinomot kell $u(x)$-nek választani, hanem az $\ln x$-et. Ennek oka az, hogy az $\ln x$ nem alapintegrál, így nem olyan könnyen integrálható mint például a $\sin x$. Természetesen ez azt is jelenti, hogy ilyenkor a polinom lesz a $v'(x)$. Ez jó is, hiszen egy polinom hatványfüggvények konstans szorosának összegéből áll, a hatványok pedig könnyen integrálhatóak. Az integrálás növeli a hatványok fokszámát, így az integrálás utáni polinomban nem szerepel konstans tag. A legalacsonyabb fokszámú tag is legalább elsőfokú. Mivel az $\ln x$ deriváltja $\frac{1}{x}$, így a visszamaradó integrálban egy legalább elsőfokú tagokat tartalmazó polinomot szorzunk $\frac{1}{x}$-szel. Ilyenkor mindig egyszerűsíthetünk x-szel, és egy polinomot kapunk. Ezt pedig könnyen tudjuk integrálni.

Ellenőrző kérdések

18. kérdés: $\int (3x-4)\sin x \, dx$

- ( ) $3\cos x - (3x-4)\sin x + c$
- ( ) $(3x-4)\sin x - 3\cos x + c$
- (•) $3\sin x - (3x-4)\cos x + c$

- $(3x-4)\cos x - 3\sin x + c$

mehet

19. kérdés: $\int (2x+7)\cdot 3^x\,dx$

- (selected) $\frac{3^x}{\ln 3}\left(2x+7-\frac{2}{\ln 3}\right)+c$
- $\frac{3^x}{\ln 3}\left(2x+7+\frac{2}{\ln 3}\right)+c$
- $3^x\cdot\ln 3\cdot(2x+7-2\cdot\ln 3)+c$
- $3^x\cdot\ln 3\cdot(2x+7+2\cdot\ln 3)+c$

mehet

20. kérdés: $\int (5x+8)\cdot \mathrm{ch}\, x\,dx$

- $(5x+8)\mathrm{sh}\, x + 5\,\mathrm{ch}\, x + c$
- (selected) $(5x+8)\mathrm{sh}\, x - 5\,\mathrm{ch}\, x + c$
- $(5x+8)\mathrm{ch}\, x + 5\,\mathrm{ch}\, x + c$
- $(5x+8)\mathrm{ch}\, x - 5\,\mathrm{sh}\, x + c$

mehet

21. kérdés: $\int (8x-9)\cdot \ln x\,dx$

- $\left(4x^2-9x\right)\cdot\ln x-(8x-9)\cdot\frac{1}{x}+c$
- $\left(4x^2-9x\right)\cdot\ln x+(8x-9)\cdot\frac{1}{x}+c$
- (selected) $\left(4x^2-9x\right)\cdot\ln x-\left(2x^2-9x\right)+c$
- $\left(4x^2-9x\right)\cdot\ln x+\left(2x^2-9x\right)+c$

mehet

22. kérdés: $\int x^2\cdot \ln x\,dx$

- $\frac{x^3}{3}(\ln x+1)+c$
- $\frac{x^3}{3}(\ln x-1)+c$
- $\frac{x^3}{3}\left(\ln x+\frac{1}{3}\right)+c$

$\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + c$

mehet

További kidolgozott feladatok

23. feladat: $\int \frac{1}{1+9x^2}dx$

Megoldás: Az integrandus ezen alakjából nem igazán látszik az, hogyan tudnánk elvégezni az integrálást. Viszont észrevehetjük, hogy az integrálandó függvény nagyon hasonlít az $\frac{1}{1+x^2}$ függvényre, ami alapintegrál. A különbség az x^2 előtt álló 9-es szorzóban van. Ha egy kicsit alakítunk a függvényen, és a $9x^2$-et $(3x)^2$ formában írjuk, akkor lényegében az $\frac{1}{1+x^2}$-et kapjuk, csak az x szerepét a $3x$ veszi át. Az integrál így a következő alakot ölti:

$$\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}dx.$$

Ebből már látható, hogy olyan összetett függvényünk van, amelynek belső függvénye elsőfokú. A lecke elején megismert $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt alkalmazhatjuk tehát. Most azonban nem volt olyan egyértelmű, hogy ilyen típusú az integrál. Ez csak átalakítás után válik egyértelművé. A szabály ezután a következő módon használható.

A külső függvény most $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ami egy alapintegrál: $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$.

A belső függvény $3x$, tehát $a = 3$, és $b = 0$.

Behelyettesítve a szabályba a következő eredményt kapjuk:

$$\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}dx = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3} + c.$$

A feladatból jól látszik, hogy az alapintegrálok biztos ismerete nagyon fontos. Csak akkor jöhet rá valaki, hogy milyen alakban kell írni az integrandust, ha tisztában azzal, hogy $\frac{1}{1+x^2}$ egy alapintegrál. Ezután már könnyű észrevenni ezen alapintegrál, és az integrandus közötti hasonlóságot.

24. feladat: $\int \frac{1}{4+x^2}dx$

Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőre. Az integrandus alig különbözik az $\frac{1}{1+x^2}$ alapintegráltól, de most más helyen tér el attól, mint az előző feladatban. Elsőként azt lenne jó elérnünk, hogy a nevezőben a 4 helyén 1 álljon, ezért célszerű kiemelni $\frac{1}{4}$-et.

$$\int \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}dx$$

Ezzel elértük, hogy az integrandus lényegében olyan, mint az előző feladatban, csak x^2 együtthatója nem egy egész szám, hanem egy tört. Írjunk ezután az $\frac{x^2}{4}$ helyett $\left(\frac{x}{2}\right)^2$-t, amit $\left(\frac{1}{2}x\right)^2$ formában is írhatunk.

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}dx$$

Így már egyértelmű, hogy megint olyan összetett függvényt kell integrálnunk, amiben a belső függvény lineáris, s amelyben $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a külső függvény. Ennek integrálja már korábban is szerepelt: $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c.$

A belső függvény most $\frac{1}{2}x$, azaz $a = \frac{1}{2}$ és $b = 0.$

Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt, azaz integráljuk a külső függvényt, alkossunk összetételt a lineáris belső függvénnyel, és osszunk a belső függvényből x együtthatójával. Így eredményünk az alábbi lesz:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c.$$

25. feladat: $\int \frac{1}{x^2-6x+10}dx$

Megoldás: A feladat hasonlít az előző kettőre, azonban míg az ottani törtek nevezőjében csak egy négyzetes tag és egy konstans állt, most elsőfokú tag is van. Középiskolában megismertük a másodfokú kifejezések teljes négyzetté alakítását. Ha ezt alkalmazzuk, akkor most is elérhetjük, hogy a nevezőben csak másodfokú és konstans tag álljon.

$$x^2-6x+10 = x^2-6x+9+1 = (x-3)^2+1$$

Írjuk ezt be az integrálba.

$$\int \frac{1}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2+1}dx$$

Azt láthatjuk, hogy lényegében megint az $\frac{1}{1+x^2}$ függvényt kaptuk, csak az x szerepét az $x-3$ vette át. Olyan összetett függvényt kell tehát integrálnunk, aminek külső függvénye az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény, aminek integrálja: $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c.$

A belső függvény most $x-3$, azaz $a = 1$ és $b = -3.$

Alkalmazzuk az $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ szabályt.

$$\int \frac{1}{(x-3)^2+1}dx = \frac{\operatorname{arctg}(x-3)}{1} + c = \operatorname{arctg}(x-3) + c$$

26. feladat: $\int \frac{7}{25x^2+20x+13}dx =$

Megoldás: Olyan tört áll az integrandusban, melynek számlálója konstans, nevezője pedig egy másodfokú kifejezés. Hasonlóval találkoztunk az előző három feladatban is, csak azokban a nevezőben álló másodfokú kifejezés sokkal egyszerűbb volt. Ezekben a feladatokban olyan összetett függvénnyé tudtuk alakítani az integrandust, melyeknek lineáris volt a belső függvénye. Most is megpróbálhatjuk ezt elérni. Hajtsunk végre olyan átalakításokat, mint az előző három feladatban. Első lépésként alakítsunk teljes négyzetté a nevezőben, a számlálóból a konstanst pedig emeljük ki.

$$\int \frac{7}{25x^2+20x+13}dx = 7\int \frac{1}{(5x+2)^2+9}dx$$

Ezután emeljük ki a nevezőből a 9-et, hogy helyén 1 maradjon. Azért tesszük ezt, mert a függvény így egyre jobban hasonlít majd az $\frac{1}{1+x^2}$ alapintegrálra.

$$7\int \frac{1}{(5x+2)^2+9}dx = \frac{7}{9}\int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9}+1}dx$$

Az $\frac{(5x+2)^2}{9}$-et írjuk inkább $\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2$ alakban.

$$\frac{7}{9}\int \frac{1}{\frac{(5x+2)^2}{9}+1}dx = \frac{7}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2+1}dx$$

Utolsó átalakításként pedig az $\frac{5x+2}{3}$ helyett használjuk inkább az $\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$ alakot, valamint cseréljük meg a nevezőben a tagok sorrendjét.

$$\frac{7}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{5x+2}{3}\right)^2+1}dx = \frac{7}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2}dx$$

Ezen alakból már jól látszik, hogy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, melynek külső függvénye az $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ alapintegrál, amiből $F(x)=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x+c$. A belső függvénye pedig az $\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$ lineáris függvény, azaz $a=\frac{5}{3}$ és $b=\frac{2}{3}$.

Alkalmazzuk az ilyen összetett függvényekre vonatkozó $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+c$ integrálási szabályt. Az alábbi eredményt kapjuk:

$$\frac{7}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)^2}dx = \frac{7}{9}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)}{\frac{5}{3}}+c = \frac{7}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\right)+c$$

A feladat megoldása során alkalmazott eljárás segítségével integrálhatjuk az összes olyan törtet, melynek számlálója konstans, nevezője pedig szorzattá nem bontható másodfokú kifejezés. Ilyenkor a nevezőben teljes négyzetté alakítunk, majd kiemeléssel elérjük, hogy az összegben szereplő konstans tag 1 legyen. A nevezőben szereplő másik tagot úgy alakítjuk, hogy egy elsőfokú kifejezés négyzete legyen. Ekkor olyan összetett függvényt kapunk, melynek külső függvénye $\frac{1}{1+x^2}$, belső függvénye pedig lineáris.

27. feladat: $\int\left(4x^2-6x+5\right)\cdot\cos x\,dx$

Megoldás: Az integrandus egy szorzat, melynek első tényezője egy polinom, második tényezője pedig a $\cos x$. Ilyen esetben a parciális integrálás $\left(\int u\cdot v' = u\cdot v-\int u'\cdot v\right)$ vezet célhoz.

Legyen $u=4x^2-6x+5$ és $v'=\cos x$.

Ekkor $u'=8x-6$ és $v=\sin x$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int\left(4x^2-6x+5\right)\cdot\cos x\,dx = \left(4x^2-6x+5\right)\cdot\sin x-\int(8x-6)\cdot\sin x\,dx$$

A még meghatározandó integrál ugyanolyan típusú, mint amilyen az eredeti feladat volt, csak 1-gyel alacsonyabb a polinom fokszáma, azaz már csak elsőfokú. Ezért újra alkalmazzuk a parciális integrálást.

Legyen $u=8x-6$ és $v'=\sin x$.

Ekkor $u' = 8$ és $v = -\cos x$.

Amikor a szabályba helyettesítünk, akkor figyeljünk oda, hogy az integrál előtt negatív előjel állt, ami az integrál helyére kerülő mindkét tagra vonatkozik majd. Ezért célszerű zárójelbe tenni a behelyettesítésnél, hogy csökkentsük a hibázás veszélyét.

$$\int\left(4x^2-6x+5\right)\cdot\cos x\,dx=\left(4x^2-6x+5\right)\cdot\sin x-\left((8x-6)\cdot(-\cos x)-\int 8(-\cos x)dx\right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és emeljük ki a konstanst az integrálból.

$$\int\left(4x^2-6x+5\right)\cdot\cos x\,dx=\left(4x^2-6x+5\right)\cdot\sin x+(8x-6)\cdot\cos x-8\int\cos x\,dx$$

Már csak egy alapintegrálunk van, melyet behelyettesítünk, majd amit lehet összevonunk. Az eredmény a következő:

$$\int\left(4x^2-6x+5\right)\cdot\cos x\,dx=\left(4x^2-6x+5\right)\cdot\sin x+(8x-6)\cdot\cos x-8\sin x+c=$$
$$=\left(4x^2-6x-3\right)\cdot\sin x+(8x-6)\cdot\cos x+c\,.$$

28. feladat: $\int\left(x^2+4x-7\right)\cdot\mathrm{sh}(3x-8)dx$

Megoldás: Az előzőhöz nagyon hasonló feladatunk van. Ugyanúgy parciális integrálással próbálkozhatunk.

Legyen $u=x^2+4x-7$ és $v'=\mathrm{sh}(3x-8)$.

Ekkor $u'=2x+4$ és $v=\dfrac{\mathrm{ch}(3x-8)}{3}$.

A v meghatározásakor figyeljünk oda arra, hogy $v'=\mathrm{sh}(3x-8)$ olyan összetett függvény, aminek belső függvénye elsőfokú. Az integrálás során ne felejtsünk el osztani a belső függvényből x együtthatójával.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int\left(x^2+4x-7\right)\cdot\mathrm{sh}(3x-8)dx=\left(x^2+4x-7\right)\cdot\frac{\mathrm{ch}(3x-8)}{3}-\int(2x+4)\cdot\frac{\mathrm{ch}(3x-8)}{3}dx$$

A konstans szorzókat célszerű egy-egy tagban előre emelni.

$$\int\left(x^2+4x-7\right)\cdot\mathrm{sh}(3x-8)dx=\frac{1}{3}\left(x^2+4x-7\right)\cdot\mathrm{ch}(3x-8)-\frac{1}{3}\int(2x+4)\cdot\mathrm{ch}(3x-8)dx$$

A megmaradt integrál ugyanolyan típusú, mint amilyen az eredeti volt, csak 1 -gyel alacsonyabb a polinom fokszáma, azaz már csak elsőfokú. Ezért újra alkalmazzuk a parciális integrálást.

Legyen $u=2x+4$ és $v'=\mathrm{ch}(3x-8)$.

Ekkor $u'=2$ és $v=\dfrac{\mathrm{sh}(3x-8)}{3}$.

Amikor a szabályba helyettesítünk, akkor figyeljünk oda, hogy az integrál előtti $-\dfrac{1}{3}$ szorzó az integrál helyére kerülő mindkét tagra vonatkozik majd. Ezért célszerű zárójelbe tenni a behelyettesítésnél, hogy csökkentsük a hibázás veszélyét.

$$\int\left(x^2+4x-7\right)\cdot\mathrm{sh}(3x-8)dx=$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^2+4x-7\right)\cdot\mathrm{ch}(3x-8)-\frac{1}{3}\left((2x+4)\cdot\frac{\mathrm{sh}(3x-8)}{3}-\int 2\cdot\frac{\mathrm{sh}(3x-8)}{3}dx\right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és emeljük ki a konstanst az integrálból.

$$\int\left(x^2+4x-7\right)\cdot \mathrm{sh}(3x-8)dx =$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^2+4x-7\right)\cdot \mathrm{ch}(3x-8)-\frac{1}{9}(2x+4)\cdot \mathrm{sh}(3x-8)+\frac{2}{9}\int \mathrm{sh}(3x-8)dx$$

Már csak egy olyan összetett függvényt kell integrálnunk, aminek belső függvénye elsőfokú. Amikor először alkalmaztuk a parciális integrálást, akkor már integráltuk is ezt a függvényt, hiszen akkor ez volt a v'-nek választott tényező. Az alábbi eredményt kapjuk:

$$\int\left(x^2+4x-7\right)\cdot \mathrm{sh}(3x-8)dx =$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^2+4x-7\right)\cdot \mathrm{ch}(3x-8)-\frac{1}{9}(2x+4)\cdot \mathrm{sh}(3x-8)+\frac{2}{9}\frac{\mathrm{ch}(3x-8)}{3}+c=$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^2+4x-7\right)\cdot \mathrm{ch}(3x-8)-\frac{1}{9}(2x+4)\cdot \mathrm{sh}(3x-8)+\frac{2}{27}\mathrm{ch}(3x-8)+c\,.$$

Ha összevonjuk a két $\mathrm{ch}(3x-8)$-at tartalmazó tagot, akkor az eredmény kicsit rövidebben is írható.

$$\int\left(x^2+4x-7\right)\cdot \mathrm{sh}(3x-8)dx=\frac{1}{3}\left(x^2+4x-\frac{61}{9}\right)\cdot \mathrm{ch}(3x-8)-\frac{1}{9}(2x+4)\cdot \mathrm{sh}(3x-8)+c\,.$$

29. feladat: $\int 3^x\cdot\cos x\,dx$

Megoldás: Az integrandus olyan szorzat, melynek egyik tényezője exponenciális, másik tényezője pedig a vagy $\cos x$ függvények valamelyike. Ilyen esetben is sokszor célszerű a parciális integrálás alkalmazása, sőt kétszer is kell használni a szabályt. Az ilyen integrandus esetén mindegy, hogyan osztjuk ki a szerepeket az első parciális integrálás során.

Legyen most $u=3^x$ és $v'=\cos x$ a szereposztás.

Ekkor $u'=3^x\cdot\ln 3$ és $v=\sin x$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int 3^x\cdot\cos x\,dx = 3^x\cdot\sin x-\int 3^x\cdot\ln 3\cdot\sin x\,dx$$

Emeljük ki az integrálból a konstans $\ln 3$-at, majd osszuk ki a következő parciális integráláshoz a szerepeket. Itt már nem mindegy, hogyan választunk. Ugyanúgy kell kiosztanunk a szerepeket, mint az első esetben.

$$\int 3^x\cdot\cos x\,dx = 3^x\cdot\sin x-\ln 3\int 3^x\cdot\sin x\,dx$$

Legyen tehát $u=3^x$ és $v'=\sin x$ a szereposztás.

Ekkor $u'=3^x\cdot\ln 3$ és $v=-\cos x$.

Újra helyettesítsünk a szabályba.

$$\int 3^x\cdot\cos x\,dx = 3^x\cdot\sin x-\ln 3\cdot\left(3^x\cdot(-\cos x)-\int 3^x\cdot\ln 3\cdot(-\cos x)dx\right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és ismét emeljük ki a konstanst az integrálból.

$$\int 3^x\cdot\cos x\,dx = 3^x\cdot\sin x+\ln 3\cdot 3^x\cdot\cos x-\ln^2 3\cdot\int 3^x\cdot\cos x\,dx$$

Így lényegében egy olyan egyenletet kaptunk, amiben az integrál az ismeretlen, mert a kétszeri parciális integrálás után az eredeti integrál szám szorosát kaptuk. Annyi a feladatunk, hogy ebből az egyenletből kifejezzük az integrált. Első lépésként adjunk mindkét oldalhoz

$\ln^2 3\cdot\int 3^x\cdot\cos x\,dx$-et.

$$\int 3^x \cdot \cos x\, dx + \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x\, dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x + c$$

Emeljük ki az integrált a bal oldalon.

$$\left(1 + \ln^2 3\right) \int 3^x \cdot \cos x\, dx = 3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x + c$$

Végül osszuk az egyenlet mindkét oldalát $\left(1 + \ln^2 3\right)$-mal.

$$\int 3^x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{1 + \ln^2 3}(3^x \cdot \sin x + \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x) + c$$

Ha az eredményből kiemeljük a 3^x-t, akkor a következő alakban is megadható:

$$\int 3^x \cdot \cos x\, dx = \frac{3^x}{1 + \ln^2 3}(\sin x + \ln 3 \cdot \cos x) + c.$$

30. feladat: $\int e^{2x} \cdot \sin 3x\, dx$

Megoldás: A feladat hasonlít az előzőre. Olyan szorzatot kell integrálnunk, melynek egyik tényezője exponenciális, másik tényezője pedig $\sin$. Most is parciális integrálással célszerű próbálkozni, és tetszőlegesen oszthatjuk ki a szerepeket.

Legyen pl. $u = e^{2x}$ és $v' = \sin 3x$.

Ekkor $u' = 2e^{2x}$ és $v = -\frac{\cos 3x}{3}$.

Szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy mindkét tényező olyan összetett függvény, melynek belső függvénye elsőfokú. Figyeljünk oda, mert amikor u-ból u'-t állítjuk elő, akkor a deriválásnál a belső függvény deriváltjával szoroznunk kell a külső függvény deriváltját, amikor pedig v'-ből állítjuk elő v-t, azaz integrálunk, akkor a belső függvényből x együtthatójával osztanunk kell a külső függvény integrálját.

Helyettesítsünk be ezután a szabályba.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x\, dx = e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) - \int 2e^{2x} \cdot \left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) dx$$

Mielőtt újra alkalmaznánk a parciális integrálást, célszerű ezt egy kicsit rendezni, s a konstansokat kiemelni a tagokban.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x} \cdot \cos 3x\, dx$$

Most újra osszuk ki a szerepeket immáron figyelve arra, hogy ugyanúgy tegyük ezt, mint az első esetben.

Legyen $u = e^{2x}$ és $v' = \cos 3x$.

Ekkor $u' = 2e^{2x}$ és $v = \frac{\sin 3x}{3}$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{3}\left(e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} - \int 2e^{2x} \cdot \frac{\sin 3x}{3} dx\right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és a konstansokat most is emeljük ki a tagokból.

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}e^{2x} \cdot \cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x} \cdot \sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x} \cdot \sin 3x\, dx$$

A kétszeri parciális integrálás után az eredeti integrál egy szám szorosát kaptuk a jobb oldalon. Így annyi a feladatunk, hogy a kapott egyenletből fejezzük ki az integrált. Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $\frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$-et.

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cdot\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cdot\sin 3x + c$$

Végül osszunk $\frac{13}{9}$-del, azaz szorozzunk $\frac{9}{13}$-dal.

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\cdot\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\cdot\sin 3x + c$$

Ha az eredményből kiemelünk amit lehet, akkor az alábbi formában is írható:

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + c.$$

Ellenőrző kérdések

23. kérdés: $\int \frac{1}{1+49x^2}dx$

- $\ln\left(1+49x^2\right)+c$
- $\frac{1}{49}\ln\left(1+49x^2\right)+c$
- $\frac{1}{49}\mathrm{arctg}\,49x^2+c$
- $\frac{1}{7}\mathrm{arctg}\,7x+c$

mehet

24. kérdés: $\int \frac{1}{16+x^2}dx$

- $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{4}+c$
- $\frac{1}{16}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{4}+c$
- $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{16}+c$
- $\frac{1}{16}\mathrm{arctg}\,\frac{x}{16}+c$

mehet

25. kérdés: $\int \frac{1}{x^2+8x+17}dx$

- $\ln\left(x^2+8x+17\right)+c$
- $\frac{\ln\left(x^2+8x+17\right)}{2x+8}+c$
- $\mathrm{arctg}(x+4)+c$

$\text{arctg}(x+8)+c$

mehet

26. kérdés: $\int \frac{1}{4x^2-20x+34}dx$

$\frac{1}{2}\text{arctg}(2x-5)+c$

$\frac{1}{10}\text{arctg}(2x-5)+c$

$\frac{1}{6}\text{arctg}\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}\right)+c$

$\frac{1}{18}\text{arctg}\left(\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}\right)+c$

mehet

27. kérdés: $\int\left(x^2+5x-4\right)\cdot\sin x\,dx$

$\left(x^2+5x-6\right)\cdot\cos x+(2x+5)\cdot\sin x+c$

$(2x+5)\cdot\sin x-\left(x^2+5x-6\right)\cdot\cos x+c$

$\left(x^2+5x-2\right)\cdot\cos x+(2x+5)\cdot\sin x+c$

$(2x+5)\cdot\sin x-\left(x^2+5x-2\right)\cdot\cos x+c$

mehet

28. kérdés: $\int\left(x^2+1\right)\cdot\text{ch}(2x-5)dx$

$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\text{sh}(2x-5)+\frac{x}{2}\cdot\text{ch}(2x-5)+c$

$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\text{sh}(2x-5)-\frac{x}{2}\cdot\text{ch}(2x-5)+c$

$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}\right)\cdot\text{sh}(2x-5)+\frac{x}{2}\cdot\text{ch}(2x-5)+c$

$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}\right)\cdot\text{sh}(2x-5)-\frac{x}{2}\cdot\text{ch}(2x-5)+c$

mehet

29. kérdés: $\int 4^x\cdot\sin x\,dx$

$\frac{4^x}{1+\ln^2 4}(\ln 4\cdot\sin x-\cos x)+c$

- $\frac{4^x}{1+\ln^2 4}(\sin x - \ln 4 \cdot \cos x) + c$
- $\frac{4^x}{1+\ln^2 4}(\ln 4 \cdot \sin x + \cos x) + c$
- $\frac{4^x}{1+\ln^2 4}(\sin x + \ln 4 \cdot \cos x) + c$

mehet

30. kérdés: $\int e^{-3x} \cdot \cos 2x \, dx$

- $\frac{e^{-3x}}{13}(3\sin 2x - 2\cos 2x) + c$
- $\frac{e^{-3x}}{13}(3\sin 2x + 2\cos 2x) + c$
- $\frac{e^{-3x}}{13}(2\sin 2x - 3\cos 2x) + c$
- $\frac{e^{-3x}}{13}(2\sin 2x + 3\cos 2x) + c$

mehet