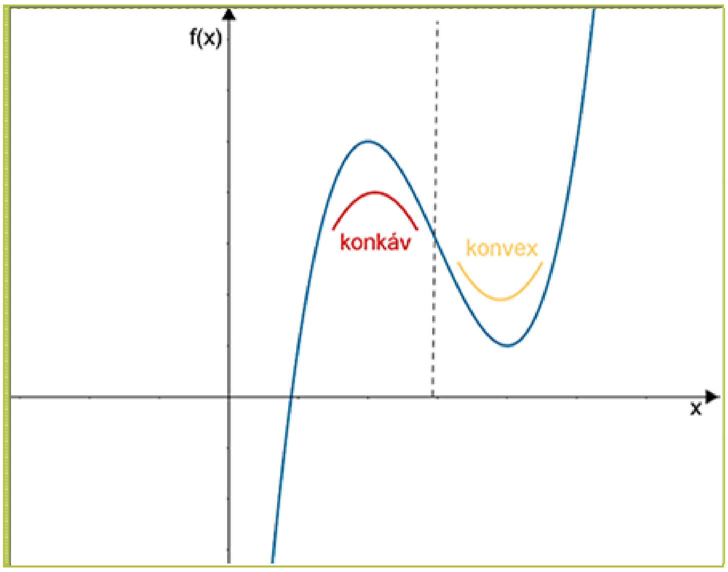
Tanulási cél: A másodrendű derivált és a konvexitás közötti kapcsolat megismerése, a függvények konvexitás és inflexiós pont szempontjából való jellemzése. A teljes függvényvizsgálat lépéseinek megismerése és gyakorlása

Elméleti összefoglaló

A Matematika 1. tantárgy A derivált alkalmazásai című leckéjében láttuk, hogy az elsőrendű derivált előjele meghatározza a függvény monotonitását. A másodrendű derivált előjeléből is következtetéseket vonhatunk le a függvény görbéjének alakjáról, ebben az esetben a függvény konvexitására vonatkozóan.

Elsőként definiáljuk a konvexitás fogalmát szemléletes módon.

Definíció: Egy intervallumon értelmezett valós függvény **konvex,** ha a függvénygörbe két pontját összekötő húr a függvénygörbe fölött halad. Egy intervallumon értelmezett valós függvény **konkáv,** ha a függvénygörbe két pontját összekötő húr a függvénygörbe alatt halad.



Tétel: Legyen az f függvény az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos és az (a, b) nyílt intervallumon differenciálható. Az f függvény az $[a, b]$-n akkor és csak akkor konvex, ha $f'(x)$ az (a, b)-n szigorúan monoton nő, illetve az f függvény az $[a, b]$-n akkor és csak akkor konkáv, ha $f'(x)$ az (a, b)-n szigorúan monoton csökkenő.

Tétel: Legyen az f függvény kétszer differenciálható (a, b)-n. Az f függvény akkor és csak akkor konvex az $[a, b]$-n, ha $f''(x) > 0$ (a, b)-n, illetve az f függvény akkor és csak akkor konkáv az $[a, b]$-n, ha $f''(x) > 0$ (a, b)-n.

Definíció: Legyen f folytonos (a, b)-n és $c \in (a, b)$. Ha f konvex (a, c)-n és konkáv (c, b)-n, vagy konkáv (a, c)-n és konvex (c, b)-n, akkor c **inflexiós pont**ja f-nek.

Tétel: Legyen f a c hely környezetében kétszer differenciálható. Ha a c pontban f-nek inflexiós pontja van, akkor $f''(c) = 0$.

Fontos megjegyezni, hogy a tétel megfordítása nem igaz. Abból, hogy az $f''(c) = 0$, még nem következik, hogy c inflexiós pont.

Tétel: Ha f kétszer differenciálható c-ben és $f''(c) = 0$, továbbá (a, c)-n $f'' > 0$ és (c, b)-n $f'' < 0$, vagy (a, c)-n $f'' < 0$ és (c, b)-n $f'' > 0$, azaz f'' c-ben előjelet vált, akkor c inflexiós pontja f-nek.

A fenti tételek birtokában a következő módon vizsgálhatjuk a függvényeket konvexitás és inflexiós pont szempontjából.

1. Megvizsgáljuk, hogy mi a legbővebb halmaz, amelyen a függvény értelmezhető.
2. Kétszer deriváljuk a függvényt.
3. Megoldjuk az $f''(x) = 0$ egyenletet. Ezzel megkapjuk azokat a helyeket, ahol

inflexiós pont lehet.

4. Az értelmezési tartományt a szakadási helyekkel és a másodrendű derivált zérushelyeivel részekre bontjuk, s az adott részeken megvizsgáljuk a derivált előjelét. Ezt például úgy hajtjuk végre, hogy mindegyik részből választunk egy számot, melyet a deriváltba behelyettesítünk.
5. Az értelmezési tartomány egyes részein a másodrendű derivált előjeléből következtetünk a konvexitásra.

Az utolsó két pontban leírtakat célszerű egy táblázatban összefoglalni, mert akkor tömörebben írhatjuk le az adatokat.

Ez a fenti módszer ismerős lehet, mivel hasonló módon végeztük a függvények monotonitására és szélsőértékére vonatkozó vizsgálatot (lásd Matematika 1. A derivált alkalmazásai című leckében).

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$. Hol konvex az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x) = (x-1)(x+6)^3$?

Megoldás: Amikor egy függvényt olyan szempontból vizsgálunk, hogy hol konvex, illetve hol konkáv, akkor ugyanúgy járhatunk el, mint a növekedés és csökkenés vizsgálatánál (lásd Matematika 1. tárgyban A derivált alkalmazásai című leckében). Ilyenkor azonban a második derivált előjelével kell foglalkoznunk. Ahol ugyanis pozitív egy függvény második deriváltja, ott konvex a függvény, ahol pedig negatív a második derivált, ott konkáv a függvény. Természetesen ilyenkor azzal kell kezdenünk, hogy megállapítjuk, hol értelmezhető a második derivált, és ezen a halmazon vizsgáljuk az előjelét. Jelen esetben minden valós számra értelmezhető a második derivált, azaz $D_{f''} = \mathbb{R}$.

Ezután határozzuk meg a második derivált zérushelyeit, azaz oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$(x-1)(x+6)^3 = 0$

Egy szorzat akkor egyenlő 0-val, ha valamelyik tényezője 0, így ez a szorzat két egyenletre bontható.

$x-1=0$ vagy $(x+6)^3 = 0$

Ezen egyenletek megoldásai: $x = 1$ és $x = -6$.

Most hasonló táblázatot célszerű készítenünk, mint amikor növekedés és csökkenés, azaz monotonitás szempontjából vizsgáltunk egy függvényt. Annyi csak a változás, hogy a második sorban nem az első, hanem a második derivált előjelét tüntetjük majd fel. Természetesen az értelmezési tartományt most a második derivált zérushelyei bontják részekre, hiszen ezeken a helyeken változhat meg a második derivált előjele. Ha egyenlőre csak az első sort töltjük ki, akkor táblázatunk az alábbi lesz.

x	$(-\infty,-6)$	-6	$(-6,1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)$					
$f(x)$					

Ezután vizsgáljuk meg a második derivált előjelét az értelmezési tartomány egyes részein. Ezt végrehajthatjuk úgy, ahogyan a korábbiakban vizsgáltunk előjelet, azaz mindegyik részből kiválasztottunk egy számot, és azt behelyettesítettük. Mivel azonban a második derivált egy szorzat, így megtehetjük azt is, hogy külön vizsgáljuk az egyes tényezők előjelét, és ebből következtetünk a szorzat előjelére.

Ha pl. $x < -6$, akkor nyilván $x-1 < 0$, azaz a derivált első tényezője negatív. Persze ekkor $x+6 < 0$ is teljesül, amiből $(x+6)^3 < 0$ is következik, tehát a második tényező is negatív. Két negatív szám szorzata pedig pozitív, azaz $x < -6$ esetén pozitív a második derivált, s ebből következően itt konvex a függvény.

Hasonlóan, ha $-6 < x < 1$, akkor $x-1<0$, és $x+6>0 \Leftrightarrow (x+6)^3>0$, azaz a szorzat egyik tényezője negatív, másik tényezője pedig pozitív, tehát ekkor negatív a második derivált. Ez azt jelenti, hogy ezen az intervallumon konkáv a függvény.

Végül ha $1<x$, akkor $x-1>0$, és $x+6>0 \Leftrightarrow (x+6)^3>0$, tehát mindkét tényező pozitív, s így a második derivált is pozitív. Ennek következtében ezen az intervallumon konvex a függvény.

Mivel mindkét zérushelyén $(x=-6, x=1)$ megváltozik a második derivált előjele, így mindkét helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Ezek alapján már kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(-\infty,-6)$	-6	$(-6,1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex($\cup$)	inflexiós pont	konkáv ($\cap$)	inflexiós pont	konvex($\cup$)

Legvégül adjunk választ a feladat kérdésére. Amint a táblázatból látható, a függvény konvex, ha $x<-6$ vagy ha $1<x$. Ugyanezt úgy is írhatjuk, hogy a függvény a $(-\infty,-6)\cup(1,\infty)$ halmazon konvex.

2. feladat: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3,4\}$. Hol konkáv az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x)=\dfrac{5^x}{(x+3)(x-4)}$?

Megoldás: Az előző feladat megoldásában ismertetettek szerint járunk el. Vizsgáljuk meg, hogy mely halmazon értelmezhető a függvény második deriváltja. Mivel a nevezőben nem állhat 0, így $(x+3)(x-4)\neq 0$, melyből $x+3\neq 0$ és $x-4\neq 0$. Ezekből következik, hogy $x\neq -3$ és $x\neq 4$.

A második derivált értelmezési tartománya tehát: $D_{f''}=\mathbb{R}\setminus\{-3,4\}$.

Ezután oldjuk meg az $f''(x)=0$ egyenletet.

$$\frac{5^x}{(x+3)(x-4)}=0$$

Tört csak úgy lehet zérus, ha a számlálója zérus, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$5^x=0$

Ennek az egyenletnek azonban nincs megoldása, hiszen 5^x értéke pozitív minden valós x esetén. A második deriváltnak tehát nincs zérushelye, azaz nem lesz inflexiós pontja a függvénynek.

Mivel egy függvény előjele ott is változhat, ahol a függvény nincs értelmezve, így bár nincs a második deriváltnak zérushelye, de az értelmezési tartományt a szakadási helyek mégis részekre bontják. Ha elkezdjük kitölteni a szokásos táblázatot, akkor most a következőt kapjuk.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,4)$	4	$(4,\infty)$
$f''(x)$		X		X	
$f(x)$		X		X	

A szakadási helyeken egyből jelölhettük, hogy mivel ott nem létezik a második derivált, így a függvényről semmit sem mondhatunk.

Vizsgáljuk meg ezután az egyes részeken a második derivált előjelét. Most olyan törtünk van, melynek számlálója minden x esetén pozitív, így csak a nevezőt kell vizsgálnunk, ami egy szorzat. Itt megtehetjük, hogy külön vizsgáljuk a tényezők előjelét.

Ha $x<-3$, akkor $x+3<0$ és $x-4<0$, tehát a nevező pozitív, így a második derivált is pozitív. Ebből következően a függvény konvex.

Ha $-3<x<4$, akkor $x+3>0$ és $x-4<0$, tehát a nevező negatív, így a második derivált is negatív. Ebből következően a függvény konkáv.

Ha pedig $4 < x$, akkor $x + 3 > 0$ és $x - 4 > 0$, tehát a nevező pozitív, így a második derivált is pozitív. Ebből következően a függvény konvex.

Immáron kitölthetjük a teljes táblázatot.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 4)$	4	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$+$	X	$-$	X	$+$
$f(x)$	$\cup$	X	$\cap$	X	$\cup$

A táblázatból kiolvasható, hogy a függvény a $(-3, 4)$ intervallumon konkáv.

3. feladat: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$. Hol van inflexiós pontja az $f(x)$ függvénynek, ha második deriváltja $f''(x) = (x-7)^6 \cdot (e^x - 1)$?

Megoldás: Most is a második derivált értelmezési tartományának vizsgálatával kezdjük. Jelen esetben ez az összes valós szám, azaz $D_{f''} = \mathbb{R}$.

Oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet. Egy függvénynek ugyanis ott lehet inflexiós pontja, ahol a második deriváltja 0.

$(x-7)^6 \cdot (e^x - 1) = 0$

Mivel a derivált szorzat, ezt egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

$(x-7)^6 = 0$ vagy $e^x - 1 = 0$

Az első egyenlet megoldása nyilván $x = 7$. A második egyenletet rendezzük át.

$e^x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 1$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát.

$\ln(e^x) = \ln 1$

Mivel a bal oldalon egy függvény és az inverze áll egy összetételben, így ott valójában egyszerűen x szerepel.

$x = \ln 1 = 0$

A második egyenlet megoldása így $x = 0$.

Két zérushelye van tehát a második deriváltnak, az $x = 0$ és az $x = 7$.

Ezek után a táblázat első sora kitölthető.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 7)$	7	$(7, \infty)$
$f''(x)$					
$f(x)$					

Vizsgáljuk meg ezután a második derivált előjelét. Mivel a derivált olyan szorzat, aminek első tényezője nem vesz fel negatív értéket, hiszen páros kitevőjű hatvány, így csak a második tényező előjelével kell foglalkoznunk.

Ha $x < 0$, akkor $e^x < 1$, ezért $e^x - 1 < 0$. Ekkor tehát negatív a második derivált, s itt konkáv a függvény.

Ha $0 < x < 7$, akkor $e^x > 1$, ezért $e^x - 1 > 0$. Így itt pozitív a második derivált, tehát konvex a függvény.

Ha $7 < x$, akkor $e^x > 1$, ezért $e^x - 1 > 0$. Így itt is pozitív a második derivált, tehát itt is konvex a függvény.

Amint látható, a második derivált zérushelyei közül az $x = 0$ helyen előjelet vált a második derivált, így itt inflexiós pontja van a függvénynek. Viszont az $x = 7$ helyen a második derivált nem vált előjelet, így itt nincs inflexiós pont.

Töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 7)$	7	$(7,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	inflexiós pont	$\cup$	nincs inflexiós pont	$\cup$

A függvénynek tehát az $x = 0$ helyen van inflexiós pontja.

4. feladat: Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz (pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = x^3 + x\ln x$$

Megoldás: Elsőként most is a függvény értelmezési tartományát kell megvizsgálnunk. A logaritmus argumentumában kizárólag pozitív valós számok szerepelhetnek, tehát a kikötés $x > 0$, azaz $D_f = (0,\infty)$.

Először az első derivált függvényt határozzuk meg. Az összeg második tagja egy szorzat (itt a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt alkalmazzuk).

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 + \ln x + 1$$

A második derivált előállítása:

$$f''(x) = 6x + \frac{1}{x}$$

Oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$6x + \frac{1}{x} = 0$$

Mivel az értelmezési tartományból tudjuk, hogy x csak pozitív szám lehet, ezért az egyenlet a következő alakra hozható:

$$6x^2 + 1 = 0$$

Ennek az egyenletnek a valós számok halmazán nincs megoldása, ami azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvénynek nincs inflexiós pontja. A $(0,\infty)$ intervallumon $6x^2 + 1 > 0$, tehát a függvény ezen az intervallumon konvex.

5. feladat: Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szempontjából az $f(x) = \ln\left(4x^2 + 2\right)$ függvényt.

Megoldás: Először az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy a logaritmus argumentumában kizárólag pozitív valós számok szerepelhetnek, tehát a kikötés $4x^2 + 2 > 0$. Ez az egyenlőtlenség bármely valós számra fennáll, azaz a függvény minden valós számra értelmezhető, $D_f = \mathbb{R}$.

Ezt követően meghatározzuk a másodrendű deriváltat, melyhez először az elsőrendű deriváltat kell kiszámolnunk. Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2 + 2} \cdot 8x = \frac{8x}{4x^2 + 2}.$$

Erre a deriválási hányadosszabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$f''(x) = \frac{8\left(4x^2 + 2\right) - (8x \cdot 8x)}{\left(4x^2 + 2\right)^2} = \frac{32x^2 + 16 - 64x^2}{\left(4x^2 + 2\right)^2} = \frac{-32x^2 + 16}{\left(4x^2 + 2\right)^2}.$$

Ezt követően megkeressük a másodrendű derivált zérushelyeit, azaz megoldjuk a $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{-32x^2 + 16}{\left(4x^2 + 2\right)^2} = 0$$

Egy tört értéke akkor 0, ha a számlálója 0. Ez alapján

$$-32x^2 + 16 = 0$$

$$32x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ezek lehetnek a függvény inflexiós pontjai. Hogy valóban azok-e, ahhoz ellenőriznünk kell, hogy a másodrendű derivált előjelet vált-e ezekben a pontokban. Ehhez az értelmezési tartományt és a lehetséges inflexiós pontokat tüntetjük fel a táblázat első sorában. Ez alapján a következő táblázatot kell kitöltenünk.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
$f''(x)$					
$f(x)$					

A táblázat második sorában a másodrendű derivált előjeleit vizsgáljuk meg az adott tartományokon, s ebből határozzuk meg a konvexitást a következő sorban. Vegyünk egy $-\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél kisebb számot. Legyen pl. -1, s helyettesítsük ezt a másodrendű deriváltba.

$$f''(-1) = \frac{-32\cdot(-1)^2 + 16}{\left(4\cdot(-1)^2 + 2\right)^2} = -\frac{32}{36}$$

Negatív értéket kaptunk, tehát $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ esetén negatív a másodrendű derivált, ebből következően itt konkáv a függvény.

Ezt követően vegyünk egy $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ közé eső számot. Legyen pl. 0, s ezt is helyettesítsük be a másodrendű deriváltba.

$$f'(0) = \frac{-32\cdot 0 + 16}{(4\cdot 0 + 2)^2} = \frac{16}{4} = 4$$

Pozitív értéket kaptunk, tehát ha $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor pozitív a másodrendű derivált, s így itt konvex a függvény.

Végül vegyünk egy $\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél nagyobb számot is. Legyen pl.1 , és helyettesítsük ezt a másodrendű deriváltba.

$$f'(1) = \frac{-32 + 16}{(4 + 2)^2} = -\frac{16}{36}$$

Negatív értéket kaptunk, így ha $\frac{1}{\sqrt{2}} < x$ akkor negatív a másodrendű derivált, tehát ekkor konkáv a függvény.

Mivel a másodrendű derivált értéke az $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ helyen előjelet vált ($x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$-nél negatívból pozitívba, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$-nél pozitívból negatívba), így ezeken a helyeken inflexiós pontja van a függvénynek.

Mindezeket az összefüggéseket tartalmazza az alábbi táblázat, mellyel válaszoltunk a feladatra.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$
$f''(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$	inflexiós pont	konkáv $\cap$

6. feladat: Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából az $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ függvényt. Adjuk meg az inflexiós pont(ok) koordinátáit is!

Megoldás: Elsőként most is a függvény értelmezési tartományát kell vizsgálnunk. Mivel nevező nem lehet zérus, így ki kell kötnünk, hogy a kitevőben $x \neq 0$, azaz $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ezután állítsuk elő a függvény második deriváltját, mert a konvexitás vizsgálatához erre lesz szükségünk. Az első derivált előállításakor egy összetett függvényt deriválunk. A külső függvény az e^x, a belső függvény pedig az $\frac{1}{x}$.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(x^{-1}\right)' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-x^{-2}\right)$$

A második deriválás során a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt használjuk.

$$f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \cdot \left(-x^{-2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-x^{-2}\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-x^{-2}\right) \cdot \left(-x^{-2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(2x^{-3}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-4} + 2e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-3}$$

Amint az korábban már szerepelt, ilyenkor célszerű kiemelni, amit csak lehet. Figyeljünk oda, hogy a hatványokból azt emeljük ki, ahol kisebb a kitevő, s ez most az x^{-4}. Ha pedig az x^{-3}-ból kiemelünk x^{-4}-t, akkor ott x fog maradni.

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-4} \cdot (1+2x)$$

A negatív kitevős hatvány helyett törtet is írhatunk. Így a második derivált a következő alakot ölti:

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4}$$

Miután a második deriváltat sikerült egyszerűbb alakra hozni, oldjuk meg az $f''(x) = 0$ egyenletet.

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4} = 0$$

Tudjuk, hogy egy szorzat akkor zérus, ha valamelyik tényezője zérus. Az első tényező nem lehet egyenlő 0-val, hiszen az exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel. Ennek következtében elég csak a második tényezőben levő tört vizsgálnunk.

$$\frac{1+2x}{x^4} = 0$$

De a tört csak úgy lehet 0, ha a számlálója 0, így az egyenlet még tovább egyszerűsödik.

$$1 + 2x = 0$$

Ennek megoldása pedig $x = -0.5$.

Ezután elkészíthetjük a táblázatot, kitöltve az első sort. Az értelmezési tartományt egyrészt a második derivált zérushelye, másrészt az értelmezési tartományban levő szakadási hely osztja részekre.

x	$(-\infty, -0.5)$	-0.5	$(-0.5, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$				X	
$f(x)$				X	

Vizsgáljuk meg ezután a második derivált előjelét a különböző részeken. Ehhez a kiemelést követően kapott szorzattá alakított formát célszerű használni. Az $e^{\frac{1}{x}}$, valamint az x^{-4} csak pozitív értékeket vehet fel, így elég csak az $1 + 2x$ előjelét vizsgálnunk.

Ha $x < -0.5$, akkor $1 + 2x < 0$, így a derivált negatív, s ebből következően itt konkáv a függvény.

Ha $-0.5 < x < 0$, akkor $1 + 2x > 0$, s ezért itt konvex a függvény.

Ha pedig $0 < x$, akkor $1 + 2x > 0$ ismét, így itt is konvex a függvény.

Az $x = -0.5$ helyen előjelet vált a második derivált, így ezen a helyen inflexiós pontja van a függvénynek.

Töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$(-\infty, -0.5)$	-0.5	$(-0.5, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	X	$+$
$f(x)$	$\cap$	inflexiós pont	$\cup$	X	$\cup$

Ezután már csak az inflexiós pont második koordinátáját kell meghatároznunk. Ehhez helyettesítsük be a függvénybe az $x = -0.5$ értéket, ahol az inflexiós pont van.

$$f(-0.5) = e^{\frac{1}{-0.5}} = e^{-2}$$

Az inflexiós pont koordinátái tehát: $\left(-0.5, e^{-2}\right)$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$. Mely intervallumo(ko)n konkáv az $f(x)$ függvény, ha $f''(x) = (x-2)^4(x+1)$?

- $(-\infty, -1)$
- $(-1, 2)$
- $(2, \infty)$
- $(-1, 2)$ és $(2, \infty)$

mehet

2. kérdés: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R} \setminus \{8, -5\}$. Mely intervallumo(ko)n konvex az $f(x)$ függvény, ha $f''(x) = \dfrac{2e^x}{(x-8)(x+5)^2}$?

- $(-5, 8)$
- $(-\infty, -5)$ és $(-5, 8)$
- $(8, \infty)$
- $(-\infty, -5)$ és $(8, \infty)$

mehet

3. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x)$ függvénynek, ha $f''(x) = (\ln x - 1)(x+3)^5$?

- 0
- 1
- 2
- 3

mehet

4. kérdés: A következő intervallumo(ko)n konkáv az $f(x)$ függvény, ha $f''(x) = 1 - \lg\left(x^2+6\right)$

- $(-\infty, -2)$.
- $(-2, 2)$.
- $(2, \infty)$.
- $(-\infty, -2)$ és $(2, \infty)$.

mehet

5. kérdés: Az $f(x) = \ln\left(1+3x^2\right)$ függvény inflexiós pontjának (pontjainak) koordinátái:

- $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \ln 2\right)$.
- $(-\sqrt{3}, \ln 10)$.
- $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \ln 2\right)$ és $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \ln 2\right)$.
- $(-\sqrt{3}, \ln 10)$ és $(\sqrt{3}, \ln 10)$.

mehet

6. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = x^5 - 30x^3 + 2$ függvénynek?

- 0
- 1
- 2
- 3

mehet

7. kérdés: Az $f(x) = e^x(x-1)$ függvény inflexiós pontjának függvényértéke

- $-e^2$

- ( ) $e^2 - 1$
- (x) $-\frac{2}{e}$
- ( ) $2e$

mehet

8. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = 4x^3 + x\ln x$ függvénynek?

- (x) 0
- ( ) 1
- ( ) 2
- ( ) 3

mehet

9. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = \frac{3}{2}x^3 + x - x\ln x$ függvénynek?

- ( ) 0
- ( ) 1
- (x) 2
- ( ) 3

mehet

Elméleti összefoglaló

Függvénydiszkusszión annak vizsgálatát értjük, hogy egy függvény az értelmezési tartományának mely pontjaiban, vagy mely részhalmazain rendelkezik a függvényekre jellemző tulajdonságok valamelyikével.

A jellemző tulajdonságokat két csoportba oszthatjuk.

Az első csoportba az úgynevezett globális tulajdonságok tartoznak. Ide soroljuk azokat, amelyekkel egy függvény az értelmezési tartományának egy egész részhalmazán rendelkezik vagy nem rendelkezik, pl. növekedés vagy konvexitás.

A másik csoportba a lokális tulajdonságok tartoznak. Ezek azok, amelyek az értelmezési tartomány egy pontjában lépnek fel, pl. lokális szélsőérték, zérushely, stb.

A függvények diszkusszióját a következő lépésekben végezzük:

1. Értelmezési tartomány meghatározása.
2. Alaki tulajdonságok (tengelymetszetek, paritás).
3. Limeszek az értelmezési tartomány szélein.
4. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

5. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.
6. Grafikon rajzolása.
7. Értékkészlet meghatározása.

Kidolgozott feladatok

7. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^3 - 3x^2$ függvényen.

Megoldás:

1. Értelmezési tartomány.

Egyszerű most a helyzetünk, mert látható, hogy a függvény mindenütt értelmezve van, ezért

$D_f = \mathbb{R}.$

2. Alaki tulajdonságok.

Ezen értjük egyrészt annak meghatározását, hogy a függvény grafikonja hol metszi az x tengelyt. Ezeket a pontokat az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai adják. Megoldjuk tehát az

$x^3 - 3x^2 = 0$

egyenletet. Az x^2 kiemelésével

$x^2(x-3) = 0,$

ami akkor teljesül, ha $x_1 = 0$ vagy ha $x_2 = 3$. Ebben a két pontban metszi tehát a grafikon az x tengelyt.

Másrészt ide tartozik annak megállapítása, hogy a grafikon hol metszi az y tengelyt. Ilyen persze csak akkor van, ha a nulla eleme az értelmezési tartománynak, ebben az esetben $f(0)$ adja a keresett pontot. A mi esetünkben

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0,$

a grafikon tehát átmegy az origón.

Továbbá ebben a lépésben vizsgáljuk meg, hogy a függvény páros-e vagy páratlan-e. Mindkettő az $f(-x)$ összetett függvény képletének előállításával kezdődik.

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 = -x^3 - 3x^2.$

A függvény akkor páros, ha $f(-x) = f(x)$ (tehát szimmetrikus az y tengelyre), ez most nem teljesül, mivel

$-x^3 - 3x^2 \neq x^3 - 3x^2.$

A függvény akkor páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$ (tehát szimmetrikus az origóra), most ez sem teljesül, mivel

$-x^3 - 3x^2 \neq -\left(x^3 - 3x^2\right).$

Függvényünk tehát se nem páros, se nem páratlan.

3. Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Egy függvény értelmezési tartománya általában diszjunkt (véges vagy végtelen) intervallumok uniója. Ezeknek az intervallumoknak a végpontjaiban kell az intervallum felőli egyoldali határértékeket kiszámítani.

Mivel a feladatunkban az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, ezért két limeszt kell kiszámolnunk:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3-3x^2\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)=\infty.$$

4. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

Tudjuk, hogy lokális szélsőérték ott lehet, ahol $f'(x)=0$. Elkészítjük tehát a derivált függvényt:

$$f'(x)=3x^2-6x,$$

és megoldjuk az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$3x^2-6x=0,$$

$$3x(x-2)=0,$$

aminek a két gyöke $x'_1=0$, illetve $x'_2=2$.

A derivált gyökei közül az értelmezési tartományba is beletartozók a lehetséges szélsőértékek. Mivel most a teljes valós számok halmaza az értelmezési tartomány, mindkét gyököt meg kell vizsgálnunk.

Tudjuk, hogy a jelöltek közül azok valóban szélsőérték helyek, ahol a derivált függvény előjelet vált.

A jelöltek az értelmezési tartományt (további) darabokra bontják, és ezeken a darabokon a derivált függvény állandó előjelű, ezeket az előjeleket kell először meghatározni. Ezeket egy-egy, a darabokba eső számnak a derivált függvénybe való behelyettesítésével kaphatjuk meg. Az egész eljárást célszerű egy táblázatba foglalni.

A táblázat első sora a szélsőérték jelölteket és az értelmezési tartomány általuk létrehozott darabjait tartalmazza (a valós számok természetes rendezésében).

A második sorban az $f'(x)$ egyes darabokbeli előjele szerepel, (és az, hogy a derivált a jelöltekben nulla).

Az értelmezési tartományunk egy darabból áll, és két jelöltünk van, ezek tehát három darabra bontják az értelmezési tartományt.

A $(-\infty,0)$ darabból vesszük mondjuk a -1-et, s ekkor azt kapjuk, hogy $f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)=9>0$, ezért az egész darabon pozitív az első derivált előjele.

A $(0,2)$ darabból vegyük például az1 -et, ekkor $f'(1)=3(1)^2-6(1)=-3<0$, ezért az egész darabon negatív az előjel.

Végül a $(2,\infty)$ darabból válasszuk a hármat, ekkor $f'(3)=3(3)^2-6(3)=9>0$, ezért az egész darabon pozitív az első derivált előjele.

Az alábbi táblázat első két sorában látjuk ezeket feltüntetve.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

Látjuk azt is, hogy mindkét jelöltünk esetén megvan a szükséges előjelváltás, tehát mindkettő valóban szélsőérték hely.

Mivel nullában a derivált pozitívból vált negatívba, itt lokális maximum van. A kettőben a derivált előjele negatívból vált pozitívba, itt tehát lokális minimum van.

Ki kell még számolni a maximum és a minimum értékét:

$f(0) = 0$, illetve $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4.$

Tudjuk, hogy ahol az első derivált pozitív, ott növő a függvény, ahol negatív, ott csökkenő.

Az előző táblázat harmadik sora ezeket az információkat tartalmazza, felfelé mutató nyíllal jelölve a növekedést, illetve lefelé mutatóval a csökkenést. A növekedési viszonyokból is leolvasható, hogy egy adott szélsőérték hely maximum hely, vagy minimum hely.

5. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

Tudjuk, hogy inflexiós pont ott lehet, ahol $f''(x) = 0$. Elkészítjük tehát a második deriváltat:

$f''(x) = 6x - 6.$

Megoldva az

$f''(x) = 0$, azaz a $6x - 6 = 0$

egyenletet megoldásként $x''_1 = 1$ adódik. Mivel ez a gyök benne van az értelmezési tartományban, ez az inflexiós pont jelölt.

Tudjuk, hogy a jelöltek közül az(ok) valóban inflexiós pont(ok), ahol a második derivált előjelet vált. Ezt a szélsőértékeknél használt eljáráshoz hasonlóan lehet megvizsgálni. Az eredményeket most is egy táblázatba foglaljuk.

Az első sor most az inflexiós pont jelölteket, és az értelmezési tartomány általuk létrehozott darabjait tartalmazza.

A második sor a második derivált előjelét tartalmazza a keletkezett darabokon, és azt, hogy a jelöltünkben az értéke nulla. Egy jelöltünk van, ami az értelmezési tartományt két részre bontja.

Az első darabból vegyük a nullát, itt $f''(0) = 6(0) - 6 = -6 < 0$, ezért az egész darabon negatív a második derivált.

A második darabból vegyük a kettőt, ekkor $f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0$, tehát az egész darabon pozitív a második derivált.

Az alábbi táblázatban láthatjuk ezeket.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1,\infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex

Megvan tehát a szükséges előjelváltás, az 1 inflexiós pont. Ki kell még számítanunk az inflexiós pont második koordinátáját:

$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 = -2.$

Tudjuk, hogy ahol a második derivált pozitív, ott konvex a függvény, ahol negatív, ott konkáv. A második táblázat harmadik sora ezeket az információkat tartalmazza.

6. Grafikon.

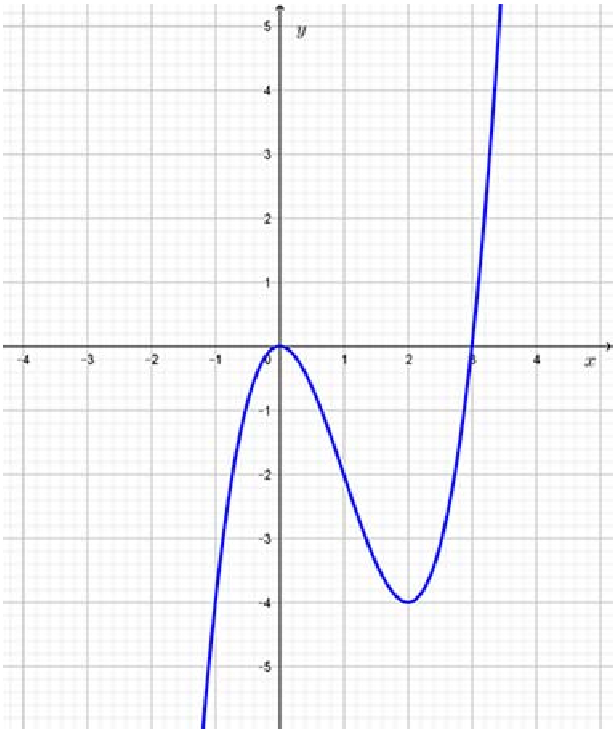
Az eddig megszerzett információkat felhasználva felvázolható a függvény grafikonja.

Felvéve egy koordináta-rendszert először a nevezetes pontokat jelöljük meg, (tengelymetszetek, szélsőértékek, inflexiós pontok.)

Ezután vegyük figyelembe a határértékeket és a monotonitási viszonyokat.

Végül, a konvexitási információkat is figyelembe véve, rajzoljuk meg a grafikont.

Ezt látjuk az alábbi ábrán.



7. Értékkészlet.

A (helyes) grafikonról leolvasható az értékkészlet.

Most azt kapjuk, hogy

$R_f = \mathbb{R}.$

8. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ függvényen.

Megoldás:

1. Értelmezési tartomány.

A nevező $x^2 + 1$, soha nem lehet nulla. Azt látjuk, hogy minden valós számra teljesül ez az egyenlet, így

$D_f = \mathbb{R}.$

2. Alaki tulajdonságok.

Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldása $x_1 = 0$, ami az x tengellyel vett metszetet adja, azonban $f(0) = 0$ miatt, itt metszi a grafikon a függőleges tengelyt is.

A függvény paritását vizsgálva látjuk, hogy

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x),$$

tehát a függvény páratlan.

3. Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Ismét csak a végtelenekben kell kiszámolni a határértékeket. A számlálóból is és a nevezőből is kiemelve x^2-et kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0.$$

Teljesen hasonlóan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0.$$

4. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+1\right)-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

A derivált nulla, ha a tört számlálója nulla, ez nyilván $x'_1=-1$ és $x'_2=1$ esetén teljesül. Mindkét gyök az értelmezési tartományban van, meg kell ezért őket vizsgálni.

Elkészítjük a táblázatot.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

Az első darabból a -2 -t helyettesítve $f'(-2)=-\frac{3}{25}<0$.

A második darabból 0-t helyettesítve $f'(0)=1>0.$

Végül a harmadik darabból 2 -t helyettesítve $f'(2)=-\frac{3}{25}<0$.

Így kaptuk a második sor előjeleit. Látjuk, hogy mindkét jelölt esetén megvan az előjelváltás, ezért mindkettő szélsőérték hely, mégpedig a -1 lokális minimum hely, az 1 lokális maximum hely.

A minimum értéke $f(-1)=-\frac{1}{2}$, a maximum értéke (a páratlanság miatt is) $f(1)=\frac{1}{2}$.

A fenti táblázat harmadik sorában megjelöltük a monotonitási szakaszokat. Látjuk, hogy a szélsőértékeken kívül a függvény csökkenő, a szélsőértékek között növő.

5. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

$$f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+1\right)^2-\left(1-x^2\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-2x\left(x^2+1\right)-4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}==\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Az $f''(x)=0$ egyenletnek most három megoldása van: $x''_1=-\sqrt{3}$, $x''_2=0$, $x''_3=\sqrt{3}$. Mindhárom az értelmezési tartományban van, ezért meg kell őket vizsgálni. Most az alábbi táblázatot készíthetjük el.

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inf.pont	konvex	inf.pont	konkáv	inf.pont	konvex

Az előjeleket, például, a következő számok behelyettesítésével kaphatjuk:

az első tartományból válasszuk a -2-t, ekkor $f''(-2) = -\frac{4}{125} < 0,$

a második tartományból a -1-et, ekkor $f''(-1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0,$

a harmadikból az 1 -et, ekkor $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0,$

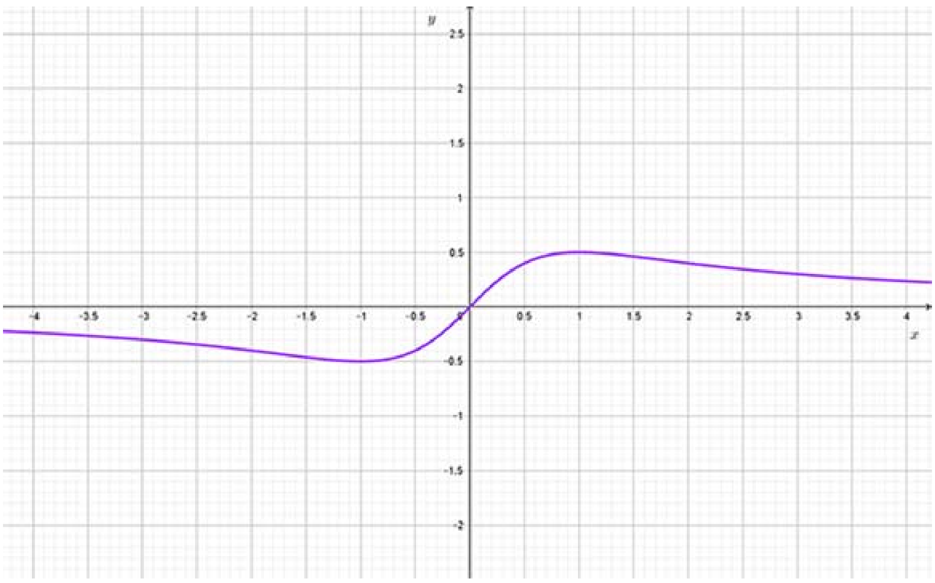
a negyedikből 2-t, ekkor $f''(2) = \frac{4}{125} > 0.$

Látjuk, hogy mindhárom jelölt esetén megvan az előjelváltás, mind a három valóban inflexiós pont.
Az inflexiós pontok második koordinátái: $f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4},\ f(0) = 0$ és $f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

A második táblázat harmadik sorában szerepelnek ezek az információk. Látjuk, hogy most az inflexiós pontok választják el a konkáv és konvex szakaszokat.

6. Grafikon.

A grafikont most is a nevezetes pontok berajzolásával kezdjük. A határértékek azt mondják, hogy a függvény a végtelenek felé hozzásimul az x tengelyhez. Figyelembe véve a monotonitási és konvexitási viszonyokat is, az alábbi ábrát kaphatjuk:



Ügyeljünk a páratlanság érzékeltetésére, azaz arra, hogy a grafikon az origóra szimmetrikus.

7. Értékkészlet.

Az ábra alapján világos, hogy a függvény a lokális minimuma és a lokális maximuma közötti értékeket veszi fel, beleértve azokat is, tehát

$$R_f = \left[-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\right].$$

9. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$ függvényen.

Megoldás:

1. Értelmezési tartomány.

Mivel a nevezőben nulla nem lehet, így

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. Alaki tulajdonságok.

Az $f(x) = 0$ egyenletnek most két gyöke van: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$. Mivel a nulla nem eleme az értelmezési tartománynak, a grafikon nem metszi a függőleges tengelyt.

A paritást vizsgálva:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} = \frac{x^2 - 1}{-x^3} = -\frac{x^2 - 1}{x^3} = -f(x),$$

a függvény tehát páratlan.

3. Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Az értelmezési tartomány két darabból áll, ezeknek négy széle van, négy limeszt kell tehát kiszámolnunk. (Valójában a páratlanság miatt csak kettőt.)

Ezek:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \cdot 1} = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^3} = \infty,$$

hiszen a számláló -1-hez tart, a nevező pedig nullához, de mindig negatív.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^3} = -\infty,$$

a páratlanság miatt persze az előző limesz mínusz egyszerese, és végül

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3} = 0,$$

most is igaz, hogy ez a mínusz végtelenben vett határérték mínusz egyszerese.

4. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték(ek) meghatározása.

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^3\right) - \left(x^2 - 1\right)3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 + 3x^2}{x^6} = -\frac{x^2 - 3}{x^4}.$$

Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai: $x'_1 = -\sqrt{3}$, $x'_2 = \sqrt{3}$.

Mindkét jelölt az értelmezési tartományba esik, meg kell őket vizsgálnunk. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

Figyeljünk arra, hogy most a D_f eleve két darabból áll. Ezeket vágja ketté a két jelölt, mivel különböző darabokba esnek. A táblázat fejlécében ezért négy darabot kell szerepeltetni.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	X	+	0	-
$f(x)$	$\downarrow$	lok.min.	$\uparrow$	X	$\uparrow$	lok.max.	$\downarrow$

Az $f'(x)$ előjeleit rendre a következő helyettesítésekkel kaptuk:

$f'(-2) = -\frac{1}{16} < 0,$

$f'(-1) = 2 > 0,$

$f'(1) = 2 > 0,$

$f'(2) = -\frac{1}{16} < 0.$

Mindkét jelöltben előjelet vált a derivált, ezért mindkettő szélsőérték hely, mégpedig $-\sqrt{3}$ lokális minimum hely, $\sqrt{3}$ lokális maximum hely. A lokális minimum értéke $f(-\sqrt{3}) = \frac{2}{-\sqrt{27}} \approx -0.38$, a lokális maximum, a páratlanság miatt, ennek mínusz egyszerese, $f(\sqrt{3}) \approx 0.38$.

A táblázatunk harmadik sorából láthatjuk, hogy mik a monotonitási viszonyok.

5. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pont(ok) meghatározása.

$$f''(x) = -\frac{2x\left(x^4\right) - \left(x^2 - 3\right)4x^3}{x^8} = -\frac{2x^5 - 4x^5 + 12x^3}{x^8} = -\frac{-2x^5 + 12x^3}{x^8} = \frac{2\left(x^2 - 6\right)}{x^5}.$$

$f''(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x''_1 = -\sqrt{6}$, $x''_2 = \sqrt{6}$. Mindkét jelölt az értelmezési tartományba esik. A táblázatunk most az alábbi:

x	$(-\infty, -\sqrt{6})$	$-\sqrt{6}$	$(-\sqrt{6}, 0)$	0	$(0, \sqrt{6})$	$\sqrt{6}$	$(\sqrt{6}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	X	-	0	+
$f(x)$	konkáv	inf.pont	konvex	X	konkáv	inf.pont	konvex

Az előjeleket, alkalmas számok behelyettesítésével ellenőrizze le most az olvasó.

Az előjelek megkaphatók a következő okoskodással is.

Egy tört előjelét kell kiszámolnunk. Ez akkor pozitív, ha a számláló és a nevező egyforma előjelű, akkor negatív, ha különböző előjelűek.

A számlálóban egy másodfokú kifejezés áll, amelynek képe egy felfelé nyíló parabola, ez tehát a gyökein kívül pozitív, a gyökei között pedig negatív. A nevezőben álló hatvány, a páratlan kitevő miatt, negatív x-ekre negatív, pozitívakra pozitív.

Ezek alapján is megkaphatjuk a fenti előjeleket.

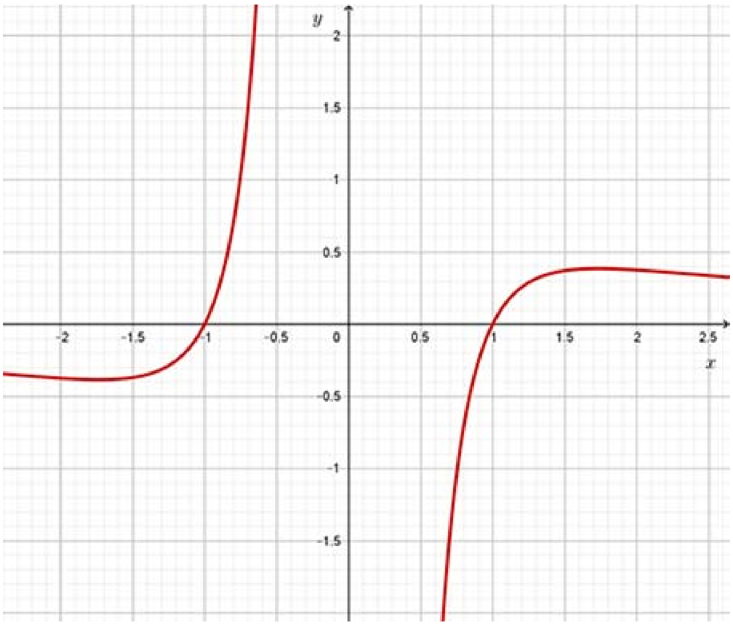
Mindkét jelölt inflexiós pont tehát. Az inflexiós pontok második koordinátái:
$f(-\sqrt{6}) = -\frac{5}{6\sqrt{6}} \approx -0.34$, $f(\sqrt{6}) = 0.34$.

A nulla előtti és utáni darabon is más előjelű a második derivált, de a nulla persze nem inflexiós pont, hiszen ott értelmezve sincs a függvény. Jól mutatja ez azonban azt, hogy a $-\sqrt{6}$ és $\sqrt{6}$ közötti részt nem lehet egy darabként szerepeltetni a fejlécben.

A táblázat harmadik sorában szerepelnek az erre vonatkozó információk.

6. Grafikon.

Az eddigek figyelembevételével az alábbi ábrát rajzolhatjuk fel:



7. Az ábráról látszik, hogy

$R_f = \mathbb{R}.$

Ellenőrző kérdések

10. kérdés: Hány lokális szélsőértéke van az $f(x) = x^3 - x^2 + x$ függvénynek?

- 0.
- 1 .
- 2.
- 3.

mehet

11. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = x^3 - x^2 + x$ függvénynek?

- 0.
- 1 .
- 2.
- 3.

mehet

12. kérdés: Van-e olyan harmadfokú polinom, amelynek nincs inflexiós pontja?

- Van.
- Nincs.

mehet

13. kérdés: Az $f(x) = x + \frac{4}{x}$ függvény lokális minimumának értéke

- (x) 4.
- ( ) 2.
- ( ) -4.
- ( ) $-\infty$.

mehet

14. kérdés: Az $f(x) = \frac{6x}{x^2+2}$ függvény lokális szélsőértékhelyei

- ( ) $-2, 2$.
- ( ) $0, \sqrt{2}$.
- ( ) $-\sqrt{2}, 0$.
- (x) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

mehet

15. kérdés: Az $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ függvény

- (x) páros.
- ( ) páratlan.
- ( ) se nem páros, se nem páratlan.

mehet

16. kérdés: Az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvény

- ( ) páros.
- (x) páratlan.
- ( ) se nem páros, se nem páratlan.

mehet

Összetettebb feladatok

Kidolgozott feladatok

10. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \ln(x^2+1)$ függvényen.

Megoldás:

1. Értelmezési tartomány.

A logaritmus argumentumára kell kikötést tennünk. Mivel $x^2+1>0$ minden x-re, ezért $D_f=\mathbb{R}$.

2. Alaki tulajdonságok.

Megoldjuk először az

$$\ln\left(x^2+1\right)=0$$

egyenletet. Mivel a logaritmus egyedül1 -ben nulla, az kell, hogy

$$x^2+1=1$$

legyen, ami $x=0$ esetén teljesül. Persze ekkor $f(0)=0$ is fennáll, a grafikon tehát áthalad az origón.

A paritást vizsgálva:

$$f(-x)=\ln\left((-x)^2+1\right)=\ln\left(x^2+1\right)=f(x),$$

most tehát páros függvénnyel van dolgunk.

3. Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(x^2+1\right)=\infty.$$

A párosság miatt ezek nem is lehetnek eltérők.

4. Lokális szélsőértékek.

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+1}.$$

$\frac{2x}{x^2+1}=0$ akkor és csak akkor, ha $x'_1=0$, egy szélsőérték jelöltünk van tehát. A szokásos táblázat elkészítésével megvizsgáljuk, hogy valóban szélsőérték-e.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

Látjuk, hogy a jelöltünk valóban szélsőérték hely, mégpedig lokális minimum hely, a minimum értéke: $f(0)=0$.

5. Monotonitási szakaszok.

A harmadik sorból látszik, hogy a minimum hely előtt csökken, utána nő a függvény.

6. Inflexiós pontok.

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$f''(x)=0$ akkor és csak akkor, ha $x''_1=-1$ vagy $x''_2=1$.

Az alábbi táblázatban mindkét jelöltet megvizsgáljuk.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
	$-$	0	$+$	0	$-$

$f''(x)$					
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex	inf. pont	konkáv

Mindkét jelölt valóban inflexiós pont. Az inflexiós pontok második koordinátái:
$f(-1) = f(1) = \ln 2 \approx 0.69.$

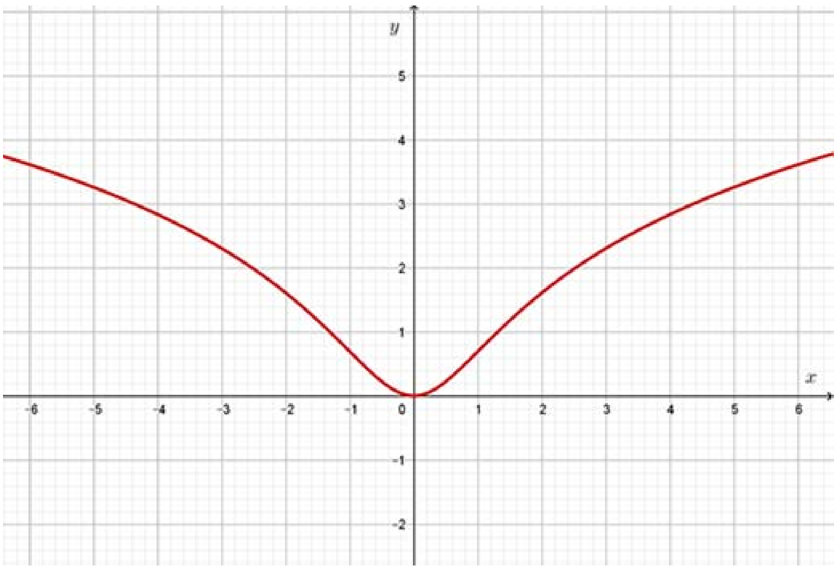
7. Konvex, konkáv szakaszok.

Látjuk a harmadik sorból, hogy a függvény az inflexiós pontok között konvex, azokon kívül konkáv.

8. Grafikon.

Figyelembe véve az eddig megszerzett információkat, most az alábbi grafikont kapjuk.

Most is ügyeljünk arra, hogy a párosság, azaz a grafikon y tengelyre való szimmetrikussága, látszódjon.



9. Értékkészlet.

Látjuk, hogy $R_f = [0, \infty).$

11. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = xe^{-x}$ függvényen.

Megoldás:

1. Értelmezési tartomány.

Mivel nem kell kikötést tennünk, így $D_f = \mathbb{R}.$

2. Alaki tulajdonságok.

A tengelymetszeteket vizsgálva:

$f(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x_1 = 0$, a grafikon átmegy az origón.

A paritást vizsgálva:

$f(-x) = (-x)e^{-(-x)} = -xe^{x}.$

Ez nem az $f(x)$, és nem is annak mínusz egyszerese, tehát a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3. Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

$\lim_{x\to-\infty}(xe^{-x}) = -\infty,$

hiszen a szorzat első tényezője mínusz végtelenbe, a második tényezője plusz végtelenbe tart.

A $\lim_{x\to\infty}(xe^{-x})$ határérték $0\cdot\infty$ típusú, de átírható $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ alakban törtté, és ez a $\frac{\infty}{\infty}$ típusú limesz a L'Hospital-szabály segítségével könnyen kiszámolható. A deriváltak hányadosának limesze

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0,$

ezért

$\lim_{x\to\infty}(xe^{-x}) = 0.$

4. Lokális szélsőértékek.

A deirválásnál a szorzat szabályt alkalmazva:

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$

$f'(x) = 0$ pontosan akkor, ha a szorzat valamelyik tényezője 0. Az első tényezőből $x'_1 = 1$, valamint a szorzat második tényezője sehol sem lehet nulla.

A szokásos táblázatban megvizsgáljuk a jelöltet.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

Az1 -ben tehát szélsőérték van, mégpedig lokális maximum, aminek értéke $f(1) = \frac{1}{e} \approx 0.37.$

5. Monotonitási viszonyok.

A harmadik sor alapján a függvény1 -ig nő, utána csökken.

6. Inflexiós pontok.

$f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}.$

$f''(x) = 0$ pontosan akkor, ha a szorzat valamelyik tényezője 0. Az első tényezőből $x''_1 = 2$, valamint a szorzat második tényezője sehol sem lehet nulla. Megvizsgáljuk a jelöltünket. A táblázat most

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex

A második derivált előjele az $x-2$ tényező előjelével azonos. Ez 2 előtt negatív, utána pozitív.

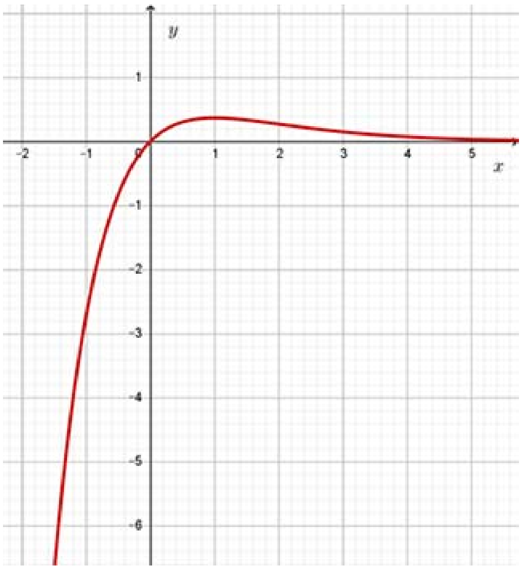
A 2-ben tehát inflexiós pont van. $f(2) = 2e^{-2} \approx 0.27$ az inflexiós pont második koordinátája.

7. Konvex, konkáv szakaszok.

A második sor alapján az inflexiós pont előtt konkáv a függvény, utána konvex.

8. Grafikon.

Figyelembe véve az eddigieket a függvény ábrája:



9. Értékkészlet.

Az ábra alapján a függvény a lokális maximumát, és az annál kisebb értékeket veszi fel, (a lokális maximum most globális maximum is).

$$R_f = \left(-\infty, \quad \frac{1}{e}\right].$$

12. feladat: Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ függvényen.

Megoldás:

1. Értelmezési tartomány.

A nevezőbeli x miatt

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

2. Alaki tulajdonságok.

A függvény sehol sem nulla, hiszen a számláló semmilyen x-re sem nulla, a grafikon nem metszi a vízszintes tengelyt.

Mivel $0 \notin D_f$, a grafikon nem metszi a függőleges tengelyt sem.

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{e^{-x}}{x},$$

amiből látszik, hogy a függvény se nem páros, se nem páratlan.

3. Limeszek az értelmezési tartomány szélein.

Négy határértéket kell kiszámolnunk.

Alkalmazva a L'Hospital-szabályt az eredeti $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú limeszre:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty,$$

hiszen a számláló1 -hez, a nevező pedig nullához tart, de mindig negatív.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}=\infty,$$

mivel most a nevező a pozitív számokon keresztül tart nullához.

Végül, ismét felhasználva a L'Hospital-szabályt,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty.$$

4. Lokális szélsőértékek.

$$f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

$f'(x)=0$ pontosan akkor, ha a tört számlálója 0. Mivel a számláló szorzat, így valamelyik tényezőjének kell 0-nak lennie, amiből $x=1$.

Figyeljünk most arra, hogy a jelölt a D_f jobb oldali felébe esik, azt vágja ketté, ezért a fejléc az alábbi három intervallumot tartalmazza.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	X	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	X	$\downarrow$	lok. min.	$\uparrow$

Az1 -ben tehát lokális minimum van, amelynek értéke: $f(1)=e$.

5. Monotonitási viszonyok.

Figyeljük meg, hogy - összhangban a nulla körüli limeszekkel - a nulla bal és jobb oldali környezetében is csökkenő a függvény.

6. Inflexiós pontok

$$f''(x)=\frac{((x-1)e^x)'x^2-(x-1)e^x\left(x^2\right)'}{x^4}=\frac{(e^x+(x-1)e^x)x^2-2x(x-1)e^x}{x^4}=$$

$$=\frac{\left(x^2-2x+2\right)e^x}{x^3}.$$

Újra egy törtet kell vizsgálnunk, hogy az hol 0, mely akkor lehetséges, ha a tört számlálója 0. Mivel a számláló szorzat, így valamelyik tényezőjének kell 0-nak lennie. Azt látjuk, hogy az x^2-2x+2 diszkriminánsa negatív, amiből $f''(x)\neq 0$, tehát nincs inflexiós pont.

7. Konvex, konkáv szakaszok.

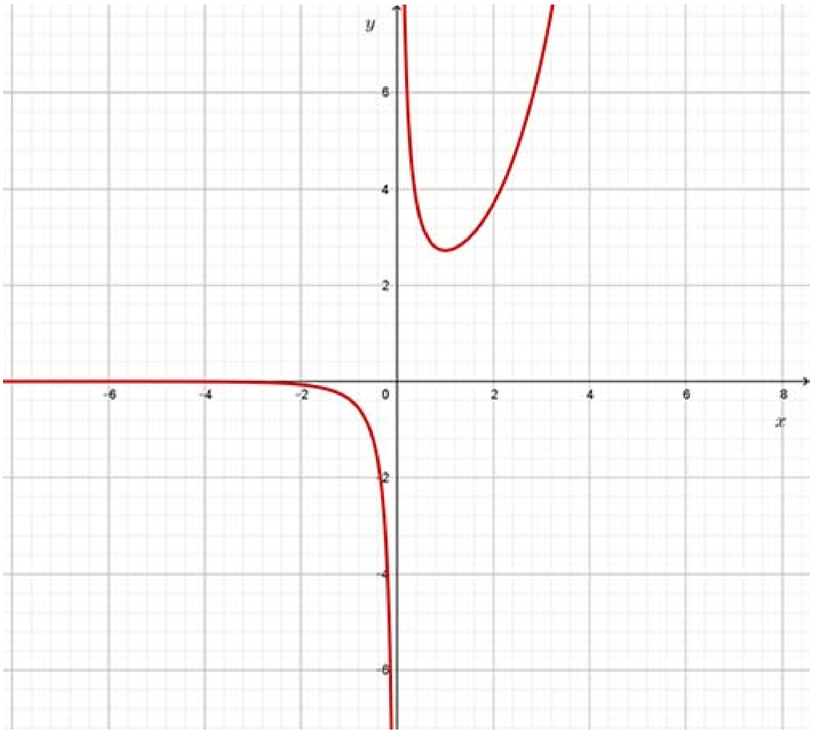
Nincs ugyan inflexiós pont, de a második táblázatot most is el kell készíteni, mert a konvex és konkáv szakaszok abból olvashatók ki.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
$f''(x)$	$-$	X	$+$
$f(x)$	konkáv	X	konvex

Az előjelekkel kapcsolatban jegyezzük meg, hogy most $f''(x)$ előjele (mivel a számlálója mindig pozitív) a nevezője előjelével egyezik meg, az pedig negatív x-ekre negatív, pozitívakra pozitív.

8. Grafikon.

Ezek után elkészíthetjük a függvény ábráját, ami az alábbi:



9. Az ábra alapján

$R_f = (-\infty, 0) \cup (e, \infty)$.

Ellenőrző kérdések

17. kérdés: Az $f(x) = x^3 - 12x + 1$ függvény csökken az alábbi intervallum (ok)on

- $(2,\infty)$.
- $(-2, 2)$.
- $(-\infty, -2)$.
- $(-\infty, -2)$ és $(2,\infty)$.

mehet

18. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvénynek?

- 0.
- 1 .
- 2.
- 3.

mehet

19. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ függvénynek?

- 0.

- ◯ 1 .
- ◉ 2.
- ◯ 3.

mehet

20. kérdés: Hány lokális szélsőértékhelye van az $f(x) = x^2e^{-x}$ függvénynek?

- ◯ 0.
- ◯ 1 .
- ◉ 2.
- ◯ 3.

mehet

21. kérdés: Hány inflexiós pontja van az $f(x) = x^4$ függvénynek?

- ◉ 0.
- ◯ 1 .
- ◯ 2.
- ◯ 3.

mehet

22. kérdés: Az $f(x) = x^6 - 10x^4$ függvény konkáv a $(-2, 2)$ intervallumon.

- ◉ Igaz.
- ◯ Nem igaz.

mehet