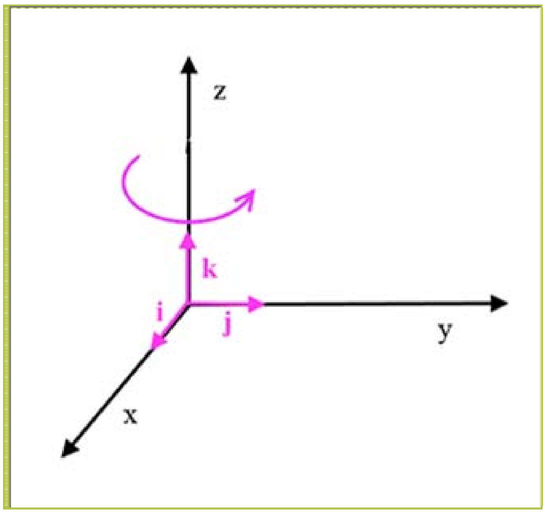
Tanulási cél: ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a koordinátákkal megadott vektorokkal hogyan kell az eddig megismert fogalmakat értelmezni és a műveleteket elvégezni.

Descartes-féle koordináta rendszer, vektorok koordinátás alakja

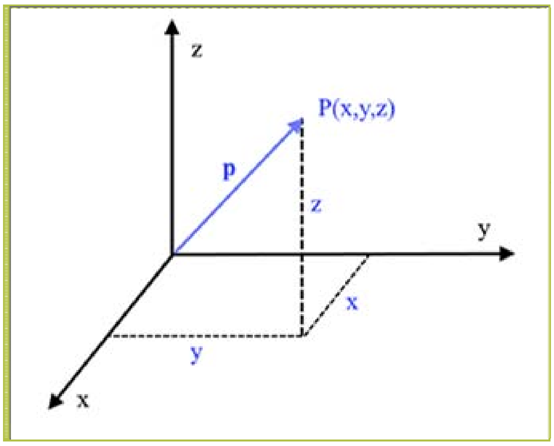
A Descartes-féle koordináta-rendszerben a három tengely egymásra merőleges, és egy pont helyzetét - koordinátáit - az x, y és z tengelyektől mért távolsága határozza meg. A tengelyek metszéspontja az origó. Az origóból kiinduló, és a tengelyek irányába mutató, egymásra kölcsönösen merőleges egységvektorokat nevezzük alapvektoroknak vagy bázisvektoroknak. Az origóból az $(1, 0, 0)$ pontba mutató (x irányú) egységvektor jele $\mathbf{i}$, a $(0, 1, 0)$ pontba mutató (y irányú) egységvektor jele $\mathbf{j}$, míg a $(0, 0, 1)$ pontba mutató (z irányú) egységvektor jele a $\mathbf{k}$.

Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységnyi hosszú, egymásra páronként merőleges vektorok ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak. Ez azt jelenti, hogy ha a $\mathbf{k}$ vektor irányával szemben nézve letekintünk az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{j}$ vektorok által kifeszített síkra, akkor ezen a síkon az $\mathbf{i}$ vektort az óramutató járásával ellentétes irányú 90 szögű forgatás viszi a $\mathbf{j}$ vektorba.



Az előző fejezetben tárgyalt, vektorok egyértelmű felbonthatóságára vonatkozó tétel alapján, egy $P(x, y, z)$ pontba mutató helyvektor egyértelműen felírható a tengelyeken vett egységvektorok (bázisvektorok) lineáris kombinációjaként $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakban.

Ekkor az (x, y, z) rendezett számhármast a $\mathbf{p}$ vektor Descartes koordinátáinak nevezzük, szokásos jelölés: $\mathbf{p} = (x, y, z)$



Műveletek koordinátákkal (összeadás, kivonás, skalárral való szorzás)

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$\lambda a = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Tétel: Legyen $A = (a_1, a_2\ a_3)$ és $B = (b_1, b_2\ b_3)$ két tetszőleges pont, továbbá **a** és **b** az adott pontokba mutató helyvektorok. Ekkor

$\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

$||\overrightarrow{AB}|| = ||\mathbf{b} - \mathbf{a}|| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{b} - 4\mathbf{a}$, $\mathbf{a_e}$ vektorokat, ha $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{b} = (-3, 4, -2)$! (jelölje $\mathbf{a_e}$ az **a** irányú egységvektort)

Megoldás:

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, 2, 3) + (-3, 4, -2) = (-2, 6, 1)$

$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, 2, 3) - (-3, 4, -2) = (4, -2, 5)$

$3\mathbf{a} = 3(1, 2, 3) = (3, 6, 9)$

$2\mathbf{b} - 4\mathbf{a} = 2(-3, 4, -2) - 4(1, 2, 3) = (-10, 0, -16)$

$\mathbf{a} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Jelölje $\mathbf{a_e}$ az **a** irányú egységvektort. Ekkor

$\mathbf{a_e} = \frac{1}{\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$

2. feladat: Döntsük el, hogy párhuzamosak-e az adott vektorpárok:

a) $\mathbf{a} = (-4, 12, 8)$ és $\mathbf{b} = (-2, 6, 4)$
b) $\mathbf{a} = (9, 3, 12)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, 5)$

Megoldás: Két vektor párhuzamos, ha az egyik vektor előáll a másik nullától különböző számszorosaként, azaz ha létezik olyan $\lambda \neq 0$ valós szám, amelyre $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.

a) Könnyen látható, hogy ebben a részben a $\lambda = 2$ értéket választva, $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, tehát ezek a vektorok párhuzamosak.

Észrevehető, hogy ha $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, akkor $\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ összefüggés is teljesül, azaz a vektorok azonos indexű koordinátáinak hányadosai egyenlők. Ezzel a módszerrel:

$2 = \frac{-4}{-2} = \frac{12}{6} = \frac{8}{4}.$

b) Kihasználva, hogy ha az azonos indexű koordináták hányadosai egyenlők, akkor az egyik vektor a másik számszorosa, azaz párhuzamosak. Ebben az esetben:

$\frac{9}{3} = \frac{3}{1} \neq \frac{12}{5}.$

Tehát ez a két vektor nem párhuzamos.

3. feladat: Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi pontok egy egyenesre esnek-e? $A(1, -2, 3)$, $B(-1, 1, -1)$ és $C(-3, -2, 3)$.

Megoldás: A három pont akkor illeszkedik egy egyenesre, ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak egymással. (Természetesen itt másképpen is ki lehetne választani két-két vektort.)

Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, és $\mathbf{c}$ az A, B és C pontokban mutató helyvektorok. Ekkor:

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, 3, -4)$ és $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-4, 0, 0)$.

Mivel:

$$\frac{-4}{-2} \neq \frac{0}{3} = \frac{0}{-4},$$

ezért a három pont nem esik egy egyenesre.

4. feladat: Az előző feladatban megadott pontok nincsenek egy egyenesen, tehát egy háromszöget határoznak meg. Számítsuk ki a háromszög kerületét!

Megoldás:

A kerület kiszámításához ismerni kell mindhárom oldal hosszát. Az oldalak hossza nem más, mint az adott pontok távolsága. Az A és B pontok távolsága az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszával egyezik meg.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, 3, -4) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}.$$

Hasonlóan számoljuk a másik két oldal hosszát is:

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = (-2, -3, 4) \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

A háromszög kerülete:

$$K = \sqrt{29} + 4 + \sqrt{29} \approx 14,77.$$

5. feladat: Határozzuk meg az AB szakasz F felezőpontját és az A-hoz közelebb eső H_A harmadoló pontjának koordinátáit, ha $A(4, 1, -2)$ és $B(3, -1, 1)$!

Megoldás: Használjuk fel, hogy az F pontba mutató $\mathbf{f}$ helyvektor felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével $\mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{\mathbf{2}}$ alakban. Mivel ez egy vektoriális egyenlet, ez az összefüggés a koordinátákra külön-külön is felírható, azaz

$$f_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \quad f_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad f_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}.$$

Tehát:

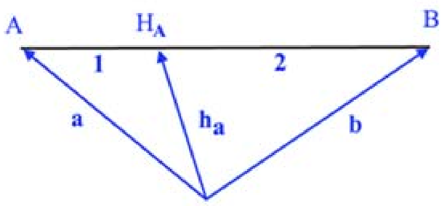
$$f_1 = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} \quad f_2 = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \quad f_3 = \frac{-2+1}{2} = \frac{-1}{2}.$$

A kapott eredmények alapján a felezőpont:

$$F\left(\frac{7}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

A H_A pontba mutató $\mathbf{h_a}$ helyvektor szintén felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével:

$$\mathbf{h_a} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}.$$



Elvégezve a számolást:

$$\mathbf{h_a} = \frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} = \frac{2}{3}(4, 1, -2) + \frac{1}{3}(3, -1, 1) = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$$

Tehát a keresett harmadoló pont koordinátái:

$$H_A\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$$

6. feladat: Adott az $\mathbf{a} = (-4, 3, 0)$ vektor. Állítsuk elő

a) az $\mathbf{a}$-val azonos irányú $\mathbf{a_e}$ egységnyi hosszúságú vektort
b) az $\mathbf{a}$-val ellentétes irányú, 8 hosszúságú $\mathbf{b}$ vektort!

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy

$$\mathbf{a_e} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a},$$

ezért ebbe az összefüggésbe behelyettesítve:

$$\mathbf{a_e} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2+3^2+0^2}}(-4, 3, 0) = \frac{1}{5}(-4, 3, 0) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

b) Először adjuk meg az $\mathbf{a}$ vektorral azonos irányú, irányítottságú és egységnyi hosszúságú $\mathbf{a_e}$ vektort. Ezt az előző részben számoltuk ki,

$$\mathbf{a_e} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right).$$

Ezt az egységnyi hosszúságú vektort nyújtsuk meg 8 egységnyire:

$$8\mathbf{a_e} = 8\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right) = \left(-\frac{32}{5}, \frac{24}{5}, 0\right)$$

Képezzük az ellentett vektorát, azaz szorozzuk meg -1-gyel:

$$\mathbf{b} = -1(8\mathbf{a_e}) = -1\left(-\frac{32}{5}, \frac{24}{5}, 0\right) = \left(\frac{32}{5}, -\frac{24}{5}, 0\right).$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés Az AB szakasz felezőpontja F. Ha $A(11, -3, -4)$ és $F(-2, 1, 3)$ akkor B pont

- $B(4,5, -1, -1,5)$
- $B(7,5, -2, -7,5)$
- $B(-15, 5, 10)$
- $B(-15, 5, 1)$

mehet

2. kérdés: Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma D csúcsát, ha $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 1, -3)$ és $C(5, -4, 5)$!

- $D(7, -3, -10)$

$D(7,-3,-11)$

$D(-5,7,-5)$

$D(7,-3,-5)$

mehet

3. kérdés: Egy egyenesre illeszkedik-e a következő három pont: $A(1,-1,5)$, $B(3,3,3)$ és $C(0,-3,4)$?

igen

nem

mehet

4. kérdés: Határozza meg az $\mathrm{a}=(-1,1,2)$ irányába mutató egységnyi hosszúságú vektor koordinátáit!

$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$

mehet

5. kérdés: Határozza meg az AB szakasz B-hez közelebbi harmadoló pontjának koordinátáit, ha $A(1,1,-1)$ és $B(3,-1,2)$!

$\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},1\right)$

$\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},0\right)$

$\left(3,0,\frac{2}{3}\right)$

$\left(\frac{7}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

mehet

Vektorok skaláris szorzata

Emlékeztető az 1. leckéből:

Definíció: Tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzatán az $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cdot\cos\phi$ mennyiséget értjük, ahol ϕ a két vektor által közbezárt szög.

Tétel: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla.

Definíció: ha két vektor merőleges egymásra, akkor ezeket ortogonális vektoroknak nevezzük.

A skaláris szorzat számolása koordinátákkal

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Megjegyzés: ortonormált bázisvektorok esetén $\langle \mathbf{i}, \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{i}, \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle = 0$.

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ nullvektortól különböző két vektor. Ekkor az általuk közbezárt szög:

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

Következmény: Ha

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$ akkor a két vektor hegyesszöget zár be egymással,
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 0$ akkor a két vektor tompaszöget zár be egymással,
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ akkor a két vektor merőleges egymásra.

Tétel: Legyen adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor, ahol $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Ekkor az $\mathbf{a}$ vektor egyértelműen felbontható $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos ($\mathbf{a_p}$) és $\mathbf{b}$ vektorra merőleges összetevőkre ($\mathbf{a_m}$), ahol

$$\mathbf{a_p} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b} \text{ és } \mathbf{a_m} = \mathbf{a} - \mathbf{a_p}.$$

Kidolgozott feladatok

7. feladat: Határozzuk meg a következő vektorpárok szögét:

a) $\mathbf{a} = (5, -1, 2) \quad \mathbf{b} = (3, 1, -2)$
b) $\mathbf{a} = (4, -2, 2) \quad \mathbf{b} = (3, 6, 0)$
c) $\mathbf{a} = (-2, -1, 2) \quad \mathbf{b} = (3, 1, 2)$

Megoldás: Jelöljük a két vektor által közbezárt szöget ϕ-vel. Ekkor a

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

összefüggés alapján fogunk számolni.

a) Ha $\mathbf{a} = (5, -1, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, -2)$, akkor

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{30}\sqrt{14}} \approx 0,4880 \quad \rightarrow \quad \phi \approx 60,79\,°.$$

b) Ha $\mathbf{a} = (4, -2, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 6, 0)$, akkor

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{4 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 2 \cdot 0}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 6^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{24}\sqrt{45}} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = 90\,°.$$

c) Ha $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, 2)$, akkor

$$\cos\phi = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} = \frac{(-2)\cdot 3 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{9}\sqrt{14}} \approx -0,2673 \quad \rightarrow \quad \phi \approx 105,50\,°.$$

8. feladat: Adjuk meg z értékét úgy, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra, ha $\mathbf{a} = (-2, -1, 2)$és $\mathbf{b} = (4, -1, z)$.

Megoldás: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát úgy kell z értékét megválasztani, hogy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ teljesüljön.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = (-2)\cdot 4 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot z = 0 \quad \rightarrow \quad -7 + 2z = 0$$

$z = 3,5.$

9. feladat: Határozzuk meg az ABC háromszög legnagyobb szögét, ha $A(1,1,0)$, $B(-2,-1,1)$ és $C(2,1,-1)$!

Megoldás: Mivel csak a legnagyobb szög a kérdés, jó lenne eldönteni, melyik csúcsnál található, különben mindegyik szöget ki kell számolnunk, s kiválasztani a legnagyobbat. Mivel a háromszögekben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, a legnagyobb szög a legnagyobb oldallal szemben lesz. Az oldalak hosszának meghatározásához írjuk fel az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorokat.

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 1) \quad \rightarrow \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1) \quad \rightarrow \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = (4, 2, -2) \quad \rightarrow \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24}.$$

Mivel BC a leghosszabb oldal, ezért az A csúcsnál lévő α szög a háromszög legnagyobb szöge. Ez a szög lényegében az AB és AC vektorok által bezárt szög, így:

$$\cos\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(-3)\cdot 1 + (-2)\cdot 0 + 1\cdot(-1)}{\sqrt{14}\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{2}} \approx -0,7559 \quad \rightarrow \quad \alpha \approx 139,10\,°.$$

10. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{a} = (2, -3, -6)$, $\mathbf{b} = (6, -2, 3)$ és $\mathbf{c} = (3, 6, -2)$ vektorok kockát feszítenek ki!

Megoldás: Ez úgy értendő, hogy ha a három vektort közös kezdőpontból mérjük fel, akkor egy kocka egy csúcsból induló három élvektorát kapjuk.

Ennek teljesüléséhez az szükséges, hogy a vektorok hossza azonos legyen, s egymásra páronként merőlegesek legyenek, azaz bármelyik merőleges legyen bármelyikre.

Számoljuk először a vektorok hosszát:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

A másik két vektor hossza is ugyanennyi, hiszen a koordináták csak fel vannak cserélve, valamint az előjelek változnak, de ez a négyzet miatt nem számít.

Már csak a páronkénti merőlegességet kell ellenőrizni. A merőlegességhez az kell, hogy bármely két vektor skaláris szorzata 0 legyen.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 2\cdot 6 + (-3)\cdot(-2) + (-6)\cdot 3 = 0$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = 2\cdot 3 + (-3)\cdot 6 + (-6)\cdot(-2) = 0$$

$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = 6 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 3 \cdot (-2) = 0.$

Mivel a merőlegességek is teljesülnek, ezért ezek a vektorok valóban kockát feszítenek ki.

11. feladat: Bontsuk fel az $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ vektort a $\mathbf{b} = (-3, -1, 1)$ vektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre!

Megoldás: A feladathoz lényegében két képletet kell ismernünk:

$\mathbf{a_p} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b}$ és $\mathbf{a_m} = \mathbf{a} - \mathbf{a_p}$.

$$\mathbf{a_p} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b} = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1}{\left(\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}\right)^2}(-3, -1, 1) = \frac{-8}{11}(-3, -1, 1) = \left(\frac{24}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{8}{11}\right)$$

$$\mathbf{a_m} = \mathbf{a} - \mathbf{a_p} = (2, 1, -1) - \left(\frac{24}{11}, \frac{8}{11}, -\frac{8}{11}\right) = \left(-\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, -\frac{3}{11}\right).$$

Ellenőrző kérdések

6. kérdés: Számítsa ki az $a = (-2, 0, 1)$ és $b = (-1, 3, 2)$ vektorok skaláris szorzatát!

- 3
- 4
- -4
- -5

mehet

7. kérdés: Igaz-e, hogy az $a = (-2, -3, 1)$ és a $b = (2, 3, -1)$ vektorok merőlegesek egymásra?

- igen
- nem

mehet

8. kérdés: Mekkora a két vektor hajlásszöge, ha $a = (-1, 3, -2)$ és $b = (1, -1, 1)$?

- $157,79°$
- $0°$
- $22,21°$
- $67,79°$

mehet

9. kérdés: Mivel egyenlő y, ha az $a = (-1, 3, -2)$ két $b = (1, y, 1)$ vektorok merőleges egymásra?

- -2
- -1
- 1
- 0

mehet

10. kérdés: Határozza meg a $b = (-1, -2, -2)$ vektor $a = (-1, 1, -2)$ vektorral párhuzamos összetevőjének koordinátáit!

- $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
- $\left(-\frac{1}{2}, -1, -1\right)$
- $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
- $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

mehet

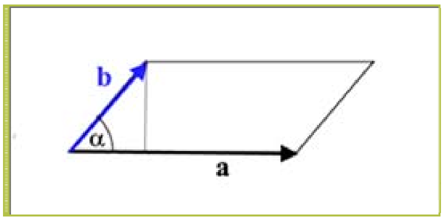
Vektorok vektoriális szorzata

Emlékeztető az 1. leckéből:

Definíció: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re, hossza $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cdot \sin\phi$, ahol ϕ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög, és $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak.

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok esetén a vektoriális szorzatuk akkor és csak akkor nullvektor, ha a két vektor egymással párhuzamos.

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített paralelogramma területe éppen az $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ pozitív valós szám.



$T = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$

Tétel: Adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem nullvektorok által kifeszített háromszög területe éppen az $\frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{2}$ pozitív valós szám.

A vektoriális szorzat számolása koordinátákkal

Tétel: Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Ekkor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{pmatrix}\mathbf{i}-\begin{pmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{pmatrix}\mathbf{j}+\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\mathbf{k}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}.$$

Kidolgozott feladatok

12. feladat: Számítsa ki az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ értéket, ha $\mathbf{a}=(2,1,-1)$ és $\mathbf{b}=(-1,0,2)$!

Megoldás:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=[1\cdot 2-(-1)\cdot 0]\mathbf{i}-[2\cdot 2-(-1)\cdot(-1)]\mathbf{j}+[2\cdot 0-1\cdot(-1)]\mathbf{k}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

Tehát:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(2,-3,1).$$

13. feladat: Határozzuk meg az $ABCD$ paralelogramma területét és C csúcsának koordinátáit, ha $A(1,1,0)$, $B(-1,0,3)$ és $D(1,4,1)$!

Megoldás: A paralelogrammát lényegében az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorok feszítik ki. Tudott összefüggés, hogy ebben az esetben a paralelogramma területe:

$$T=\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\|.$$

Állítsuk elő ezeket a vektorokat, ha a csúcsokba mutató helyvektorokat rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ vektorokkal jelöljük.

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=(-2,-1,3)\quad \overrightarrow{AD}=\mathbf{d}-\mathbf{a}=(0,3,1)$$

Ekkor:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=[(-1)\cdot 1-3\cdot 3]\mathbf{i}-[(-2)\cdot 1-3\cdot 0]\mathbf{j}+[(-2)\cdot 3-1\cdot 0]\mathbf{k}=$$

$$=-10\mathbf{i}+2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$

$$T=\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\|=\|-10\mathbf{i}+2\mathbf{j}-6\mathbf{k}\|=\sqrt{(-10)^2+2^2+(-6)^2}=\sqrt{140}.$$

A C csúcs koordinátáinak meghatározásánál használjuk ki azt, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást. Ez a közös felezőpont a paralelogramma középpontja, jelöljük K-val.

K felezőpontja a BD átlónak ezért:

$$k_1=\frac{-1+1}{2}\quad k_1=0$$

$$k_2=\frac{0+4}{2}\quad k_2=2$$

$$k_3=\frac{3+1}{2}\quad k_3=2,$$

azaz

$$K(0,2,2).$$

Mivel K az AC átlónak is felezőpontja, ezért:

$0 = \frac{1+c_1}{2} \quad c_1 = -1$

$2 = \frac{1+c_2}{2} \quad c_2 = 3$

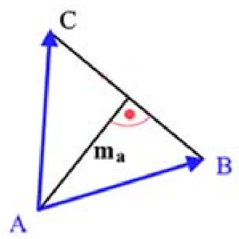
$2 = \frac{0+c_3}{2} \quad c_3 = 4.$

Tehát a keresett C csúcs:

$C(-1, 3, 4).$

14. feladat: Határozzuk meg az ABC háromszög A csúcsából induló magasságvonalának hosszát, ha $A(3, -3, 4)$, $B(-1, 2, 4)$és $C(-1, 6, 1)$!

Megoldás: Készítsünk ábrát.



A megoldás során használjuk ki, hogy a háromszög területét kétféleképpen is ki tudjuk számolni:

$T = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||,$

valamint

$T = \frac{a \cdot m_a}{2},$

ahol a szokásos jelölést megtartva $a = ||\overrightarrow{BC}||$, m_a pedig az A csúcsból induló magasság. Mivel a kétféleképpen felírt terület megegyezik, ezért:

$\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{BC}||m_a$

ahonnan:

$m_a = \frac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{BC}||}.$

Állítsuk elő a számoláshoz szükséges vektorokat.

$\overrightarrow{AB} = (-4, 5, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (-4, 9, -3) \quad \overrightarrow{BC} = (0, 4, -3)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 5 & 0 \\ -4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = [5 \cdot (-3) - 0 \cdot 9]\mathbf{i} - [(-4) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4)]\mathbf{j} + [((-4)) \cdot 9 - 5 \cdot (-4)]\mathbf{k} =$

$= -15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

$m_a = \frac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{BC}||} = \frac{\sqrt{(-15)^2 + (-12)^2 + (-16)^2}}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5.$

Vektorok vegyesszorzata

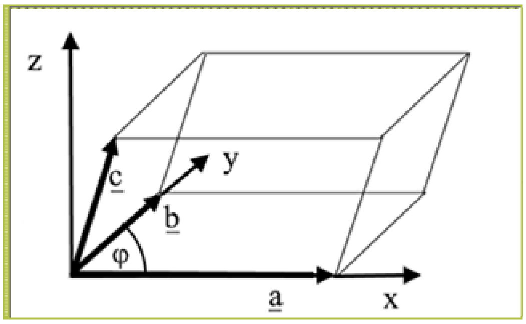
Emlékeztető az 1. leckéből:

A vegyesszorzat elnevezés arra utal, hogy ennek kiszámításánál mindkét vektorszorzás műveletre szükségünk lesz.

Definíció: Adott $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nem nullvektorok vegyes szorzatán az $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ valós számot értjük.

Tétel: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok akkor és csak akkor egysíkúak, ha $\mathbf{abc} = 0$. Ha a vegyesszorzat nem nulla, akkor annak abszolút értéke az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon V_p térfogatát adja:

$$V_p = |abc|.$$



Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder V_t térfogata:

$$V_t = \frac{|abc|}{6}.$$

Kidolgozott feladatok

15. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{abc}$ értékét, ha $\mathbf{a} = (2, -4, 3)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 5)$ és $\mathbf{c} = (-2, 3, 1)$. Egysíkúak-e ezek a vektorok?

Megoldás: Tudjuk, hogy $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$. Először az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort számoljuk ki.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = [(-4) \cdot 5 - 3 \cdot (-1)]\mathbf{i} - [2 \cdot 5 - 3 \cdot 1]\mathbf{j} + [2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 1]\mathbf{k} =$$

$$= -17\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

A most kapott vektort skalárisan szorozzuk $\mathbf{c}$-vel:

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle (-17, -7, 2), (-2, 3, 1) \rangle = (-17) \cdot (-2) + (-7) \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 15.$$

Mivel a vegyesszorzat nem lett nulla, ezért ezek a vektorok nem egysíkúak.

16. feladat: Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (4, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ és $\mathbf{c} = (-1, 2, -5)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

Megoldás: Tudjuk, hogy a $V_p = |\mathbf{abc}|$, azaz ki kell számolni a három vektorok vegyesszorzatát, majd az eredmény abszolút értékét kell venni. A számolást most is két lépésben fogjuk elvégezni.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle (2, -10, 2), (-1, 2, -5) \rangle = -32.$$

Ebből a keresett térfogat:

$$V = |-32| = 32.$$

17. feladat: Egysíkúak-e az alábbi pontok: $A(1,-1,0)$, $B(0,1,-1)$, $C(2,0,-2)$ és $D(1,1,-2)$?

Megoldás: Ha a négy pont egy síkban van, akkor az egyik pontból a másik három pontba irányított vektor is egy közös síkban van. Ez az állítás fordítva is igaz. Ha kiválasztjuk az A pontot, és képezzük az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokat, akkor ha ezen vektorok vegyesszorzata nulla értéket ad, akkor a vektorok egysíkúak, de ekkor a pontok is olyanok.

$$\overrightarrow{AB}=(-1,2,-1)\quad \overrightarrow{AC}=(1,1,-2)\quad \overrightarrow{AD}=(0,2,-2).$$

Képezzük az

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\langle \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle$$

vegyesszorzatot. Ezt most is két lépésben fogjuk számolni.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=-3\mathbf{i}-3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\langle \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle=\langle(-3,-3,-3),(0,2,-2)\rangle=0.$$

Mivel a három vektor vegyesszorzata nulla, ezért a három vektor egysíkú. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha az eredeti négy pont is egysíkú.

18. feladat: Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha $A(1,-1,0)$, $B(-6,0,-1)$, $C(-2,-4,1)$ és $D(-2,-4,-3)$?

Megoldás: Tudjuk, hogy a tetraéder térfogata vegyesszorzat segítségével számolható, ha rendelkezünk egy közös csúcsból induló három élvektorral. Ennek érdekében válasszuk ki az A csúcsot, és határozzuk meg a többi csúcsba mutató élvektort.

$$\overrightarrow{AB}=(-7,1,-1)\quad \overrightarrow{AC}=(-3,-3,1)\quad \overrightarrow{AD}=(-3,-3,-3)$$

Képezzük először az

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\langle \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle$$

vegyesszorzatot. Ezt most is két lépésben fogjuk számolni.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -7 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 1\end{vmatrix}=-2\mathbf{i}+10\mathbf{j}+24\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}=\langle \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\rangle=\langle(-2,10,24),(-3,-3,-3)\rangle=-96.$$

Innen a tetraéder térfogata:

$$V_t=\frac{|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}|}{6}=\frac{|-96|}{6}=16.$$

Ellenőrző kérdések

11. kérdés: Mivel egyenlő $b\times a$, ha $a=(1,0,-1)$ és $b=(0,-2,1)$?

- $(2,1,2)$
- $(2,-1,2)$
- $(-2,-1,-2)$
- $(-2,1,-2)$

mehet

12. kérdés: Mekkora az $\mathrm{a} = (1, 0, -1)$ és $\mathrm{b} = (0, -2, 1)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

- 9
- 3
- $1,5$
- $4,5$

mehet

13. kérdés: Számítsa ki az ABC háromszög területét, ha $A(-3, 2, 5)$, $B(1, 0, 4)$ és $C(2, 6, 3)$!

- $\frac{\sqrt{749}}{2}$
- $\frac{37}{2}$
- $\frac{15}{2}$
- $\frac{\sqrt{740}}{2}$

mehet

14. kérdés: Határozzuk meg az $\mathrm{a} = (1, 0, -1)$, $\mathrm{b} = (5, -3, -2)$ és $\mathrm{c} = (3, -4, 2)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

- 3
- -3
- 9
- 5

mehet

15. kérdés: Egysíkúak-e az alábbi pontok: $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$, $C(-1, -1, 1)$ és $D(-4, 1, 5)$?

- igen
- nem

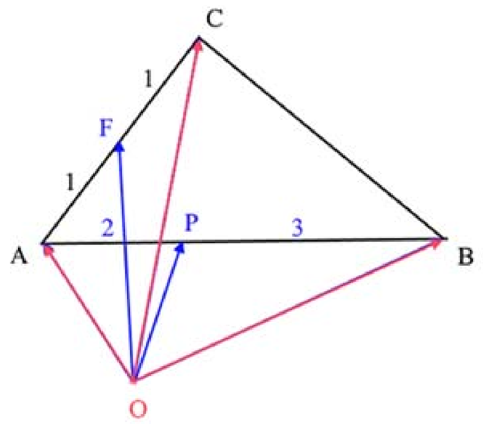
mehet

Összetett feladatok

19. feladat: Adott az ABC háromszög $A(1, -1, 2)$ csúcsa, valamint az AB oldal egy olyan $P(1, 1, 2)$

pontja, amelyre $AP : PB = 2 : 3$. Az AC oldal felezőpontja $F(5, 5, -2)$. Határozzuk meg a háromszög hiányzó csúcsait és a súlypont koordinátáit! Számítsuk ki a háromszög területét!

Megoldás: Jelölje $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{f}$ és $\mathbf{s}$ rendre az A, B, C, P, F és S pontokba mutató helyvektorokat a szokásoknak megfelelően.



Mivel P egy ötödölő pont az AB szakaszon, ezért

$$\mathbf{p} = \frac{3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{5} \quad \rightarrow \quad \mathbf{b} = \frac{5\mathbf{p} - 3\mathbf{a}}{2} = \frac{5}{2}\mathbf{p} - \frac{3}{2}\mathbf{a}.$$

Behelyettesítve:

$$\mathbf{b} = \frac{5}{2}\mathbf{p} - \frac{3}{2}\mathbf{a} = \frac{5}{2}(1, 1, 2) - \frac{3}{2}(1, -1, 2) = (1, 4, 2).$$

Eszerint a háromszög B csúcsa: $B(1, 4, 2)$.

Mivel F felezőpont az AC oldalon, ezért:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{c} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a},$$

azaz:

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{f} - \mathbf{a} = 2(5, 5, -2) - (1, -1, 2) = (9, 11, -6).$$

Tehát a C csúcs koordinátái: $C(9, 11, -6)$.

Ismert összefüggés, hogy

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{1}{3}[(1, -1, 2) + (1, 4, 2) + (9, 11, -6)] = \left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Tehát a háromszög súlypontjának koordinátái:

$$S\left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

A háromszög területének meghatározásához adjunk meg két olyan vektort, amely kifeszíti a háromszöget. Legyenek ezek most az A pontból induló $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok. Ekkor a háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, 5, 0) \quad \overrightarrow{AC} = (8, 12, -8).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 8 & -12 & -8 \end{vmatrix} = -40\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 40\mathbf{k}.$$

A háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-40)^2 + (-40)^2} = 20\sqrt{2}.$$

20. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma csúcsai $A(-2, 1, 2)$, $B(4, 3, -1)$ és $C(1, 9, -3)$. Bizonyítsa be, hogy a paralelogramma négyzet!

Megoldás: Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az AC és BD átlók felezőpontja megegyezik. Ez a pont a paralelogramma középpontja, jelöljük K-val.

Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, és $\mathbf{k}$ rendre az A, B, C, D és K pontokba mutató helyvektorok.

Ekkor:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}[(-2, 1, 2) + (1, 9, -3)] = \left(-\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2}\right).$$

Továbbá:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}) \quad \to \quad \mathbf{d} = 2\mathbf{k} - \mathbf{b} = 2\left(-\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2}\right) - (4, 3, -1) = (-5, 7, 0),$$

tehát a paralelogramma D csúcsa:

$D(-5, 7, 0)$.

Egy paralelogramma akkor négyzet, ha két szomszédos oldala azonos hosszúságú és merőleges egymásra. Tekintsük az AB és AD oldalakat.

$$\overrightarrow{AB} = (6, 2, -3) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7$$

$$\overrightarrow{AD} = (3, -6, 2) \quad \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = 7$$

Tehát a paralelogrammánk két szomszédos oldala 7 egységnyi. Még a merőlegességet kell igazolni. Tudjuk, hogy ha két vektor merőleges egymásra, akkor a skaláris szorzatuk nulla. Ellenőrizzük le:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle (6, 2, -3), (3, -6, 2) \rangle = 18 - 12 - 6 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy két szomszédos oldal merőleges egymásra.

Mivel olyan paralelogrammánk van, amelynek két szomszédos oldala egyenlő nagyságú és egymásra merőleges, ezért ez a paralelogramma négyzet.

Megjegyzés: A D csúcs meghatározása nélkül is dolgozhattunk volna. A négyzet olyan síkidom, amelynek két egyenlő hosszúságú átlója van, amelyek merőlegesen felezik egymást. Ezt a tulajdonságot kihasználva is megoldhattuk volna a feladatot.

21. feladat: Egy téglatest két élvektora $\mathbf{a} = (4, 3, 1)$ és $\mathbf{b} = (-1, 0, 1)$. Határozzuk meg a harmadik $\mathbf{c}$ élvektorát, ha tudjuk, hogy $\|\mathbf{c}\| = 5$.

Megoldás:

A téglatest élei merőlegesek egymásra, ezért a keresett $\mathbf{c}$ vektor merőleges mind az $\mathbf{a}$, mind a $\mathbf{b}$ vektorra. Ha egy olyan vektort keresünk, amely két adott vektor mindegyikére merőleges, akkor ahhoz a vektoriális szorzatra lesz szükségünk. Képezzük az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Ez az új vektor csak akkor lehet a keresett $\mathbf{c}$ élvektor, ha a hossza 5 egység.

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \sqrt{3^2+(-5)^2+3^2} = \sqrt{43}.$$

Nekünk egy $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ irányú, de 5 hosszúságú vektorra van szükségünk, ezért

$$\mathbf{c} = \frac{5}{\sqrt{43}}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{5}{\sqrt{43}}(3,-5,3) = \left(\frac{15}{\sqrt{43}}, -\frac{25}{\sqrt{43}}, \frac{15}{\sqrt{43}}\right).$$

A feltételeknek a most meghatározott $\mathbf{c}$ vektor ellentettje is megfelel, így a feladat másik megoldása:

$$\mathbf{c}' = -\mathbf{c} = \left(-\frac{15}{\sqrt{43}}, \frac{25}{\sqrt{43}}, -\frac{15}{\sqrt{43}}\right).$$

22. feladat: Mekkora az $ABCD$ tetraéder D csúcsból induló testmagasságának hossza, ha $A(1,2,1)$, $B(2,2,2)$, $C(4,4,3)$ és $D(-5,10,9)$?

Megoldás: A megoldás során a tetraéder térfogatát kétféleképpen fogjuk felírni, amelyből a keresett magasság majd meghatározható lesz.

Határozzuk meg először a tetraéder A csúcsából induló élvektorait:

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,1) \quad \overrightarrow{AC} = (3,2,2) \quad \overrightarrow{AD} = (-6,8,8).$$

Először számoljuk ki a tetraéder térfogatát a vegysszorzat segítségével.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \langle \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle = \langle(-2,1,2),(-6,8,8)\rangle = 36,$$

$$V_t = \frac{|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}|}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

A D csúcsból induló testmagasság meghatározásához használjuk fel a tetraéder középiskolában tanult térfogatképletét, valamint azt, hogy a háromszög területét fel tudjuk írni a vektoriális szorzat hosszaként:

$$V_t = \frac{t_{ABC_\triangle}\cdot m_D}{3} = \frac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|\cdot m_D}{3} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|\cdot m_D}{6}.$$

A vektoriális szorzatot már korábban kiszámoltuk, így:

$$\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = 3.$$

Innen a keresett magasság:

$$6 = \frac{3\cdot m_D}{6} \quad \rightarrow \quad m_D = 12.$$

23. feladat: Határozzuk meg z értékét úgy, hogy az alábbi három vektor egy síkban legyen: $\mathbf{a} = (2,z,z)$, $\mathbf{b} = (-z,3,-4)$, $\mathbf{c} = (2z,-1,3)$.

Megoldás: Ha három vektor egy síkban van, akkor a vegyesszorzatuk nulla. Ezt használjuk ki a megoldás során.

$$\mathbf{abc} = \langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle = 0.$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & z & z \\ -z & 3 & -4 \end{vmatrix} = -7z\mathbf{i}-(-8+z)\mathbf{j}+(6+z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{abc} = \langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad \langle(-7z, 8-z, 6+z),(2z,-1,3)\rangle = 0$$

$-14z^2-(8-z)+3(6+z)=0$

$-14z^2+4z+10=0$

$z_1=1 \quad z_2=-\frac{5}{7}.$

Ellenőrző kérdések

16. kérdés: Adott az ABC háromszög $C(1,-3,2)$ csúcsa, valamint az AC oldal egy olyan $P\left(\frac{5}{3},-1,\frac{4}{3}\right)$ pontja, amelyre $AP:PC=1:2$. Az AB oldal felezőpontja $F\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit!

- $S(1,0,1)$
- $S(1,-1,0)$
- $S(1,-1,1)$
- $S(1,1,-1)$

mehet

17. kérdés: Kockát feszít-e ki a következő három vektor? $\mathrm{a}(-8,2,4)$, $\mathrm{b}(2,-4,8)$, $\mathrm{c}(-4,8,-2)$

- igen
- nem

mehet

18. kérdés: Mekkora az $ABCD$ tetraéder D csúcsból induló testmagasságának hossza, ha $A(-1,-1,-1)$, $B(3,0,0)$, $C(0,3,0)$ és $D(0,0,3)$?

- $\frac{4}{\sqrt{12}}$
- 2
- $2\sqrt{3}$
- 6

mehet

19. kérdés: Határozza meg x értékét úgy, hogy az a, b, c, vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 62 egység legyen, ha $\mathrm{a}(x,-6,8)$, $\mathrm{b}(-x,-1,-4)$, $\mathrm{c}(x,-5,3)$!

- $\frac{1}{3}$
- 2
- 1

6

mehet