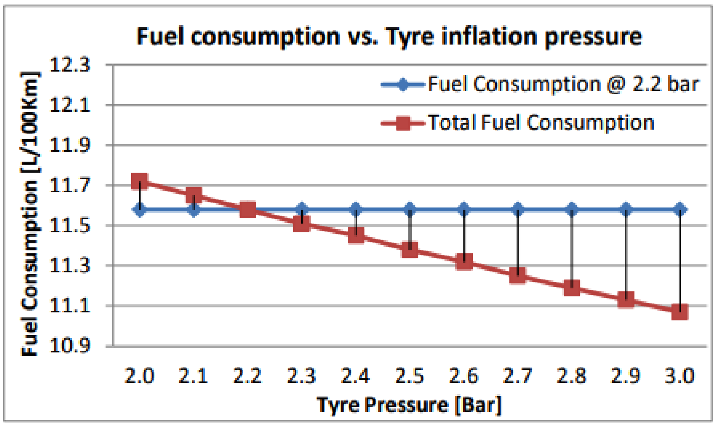
Tanulási cél: a függvény fogalmához kapcsolódó kifejezések áttekintése, az értelmezési tartomány meghatározásához alkalmazott leggyakoribb eljárások gyakorlása. A függvényekkel végzett műveletek megismerése, kiemelt hangsúllyal a kompozíció műveletének gyakorlása. Az inverz függvény fogalmának megismerése, grafikonjának képzése, egyszerűbb függvények esetében az inverz függvény képletének előállítása.

Elméleti összefoglaló

A mérnöki munka során gyakran hallunk olyan állításokat, hogy egy változó függvénye egy másik változónak. Például egy jármű maximális sebessége függ a motor maximális teljesítményétől, függ az út meredekségétől, a jármű frontális keresztmetszetétől, vagy éppen a jármű fogyasztása függ a guminyomástól. Két változó közötti összefüggés többféleképpen is megadható, csak néhányat említve diagrammal, táblázattal, grafikonnal, formulával.

Észrevehetjük, hogy a fenti példákban a változóink egy-egy adott tartományból (halmazból) kerülnek ki. Például ha egy jármű fogyasztását vizsgáljuk a guminyomás függvényében, akkor a guminyomást 1,5 és 3 bar között érdemes vizsgálni, mivel alacsonyabb és magasabb érték túlzott kopáshoz vezet és csökken a gumi élettartama (1. ábra).

A fogyasztás változása a guminyomás függvényében

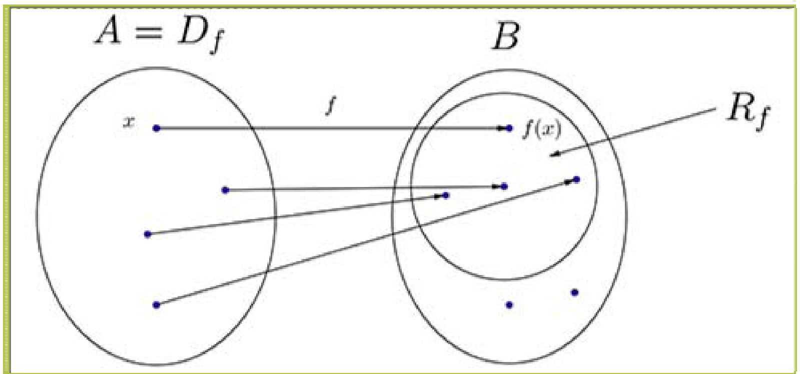


1. ábra

Nézzük a fenti függési viszonyok matematikai általánosítását.

Definíció: Legyen A és B két nem üres halmaz. Ha az A halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük a B halmaz egy-egy elemét, akkor az A halmazon egy **függvényt** értelmeztünk. Az A halmaz a függvény **értelmezési tartománya,** a B halmaz pedig a függvény **képhalmaza.** B-nek azon elemei, amelyek a hozzárendelésben részt vesznek, a függvény **értékkészletét** alkotják. Tehát az értékkészlet a képhalmaz része. Jelölés: az f függvény értelmezési tartománya D_f, az f függvény értékkészlete R_f (2. ábra).

Függvény értelmezési tartománya, képhalmaza, értékkészlete



2. ábra

Definíció: Ha a függvényt f jelöli és $x \in A$, akkor az x-hez rendelt B-beli elemet $f(x)$-szel jelöljük, amit az f függvény x helyhez tartozó **helyettesítési értékének** nevezzük.

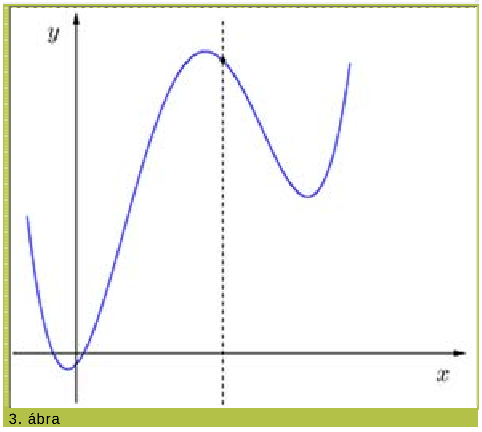
Definíció: Az x változó neve **független változó** (vagy argumentum), az $f(x)$ neve pedig **függő változó,** amit szokás $y = f(x)$-szel is jelölni.

Definíció: Azokat a függvényeket, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is valós számokból áll, **egyváltozós valós függvény**eknek nevezzük.

Definíció: A $P(x, f(x)), x \in D_f$ pontok halmazát az f függvény **grafikonjának** nevezzük, ahol x végigfutja az f értelmezési tartományát.

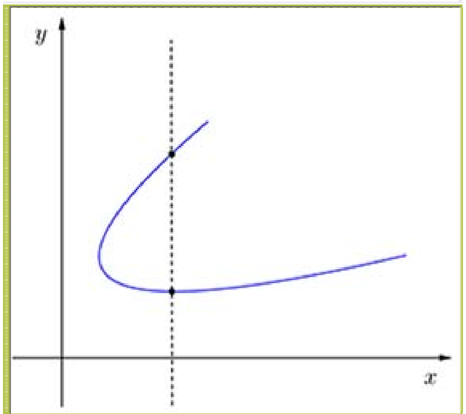
A grafikonok rengeteg különböző alakot ölthetnek, de fontos megjegyezni, hogy nem minden síkgörbe függvény grafikonja. Egy függvény az értelmezési tartományának tetszőleges pontjához csak egyetlen y értéket rendel. Ez a tulajdonság könnyen ellenőrizhető, mivel a függvény grafikont az x tengely bármely pontján átmenő függőleges egyenes legfeljebb egy pontban metszi (3-4. ábra).

Ez a görbe függvénygrafikon



3. ábra

Ez a görbe nem függvénygrafikon



4. ábra.

A mérnöki munka során gyakori feladat, hogy mérési eredményekből az adott folyamatot jól leíró, képlettel is megadható függvényt határozzunk meg.

A függvények ábrázolásakor sokszor elegendő egy jelleggörbe megrajzolása, mely egyértelműen mutatja a függvény előjelviszonyait (az értelmezési tartomány mely részein halad a függvény az x tengely alatt és felett), a zérushelyeket, a szakadási helyek és a végtelen(ek) környezetében való viselkedését.

Egy függvény megadásához meg kell adni az értelmezési tartományt, a képhalmazt és a hozzárendelési szabályt, melynek segítségével minden $x \in A$ elemhez meghatározható a hozzátartozó $f(x) \in B$ elem. Általában a hozzárendelési szabályt képlettel adjuk meg.

Például: $f(x) = \sqrt{x+4}$

A gyakorlatban nem mindig adjuk meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet. Ilyenkor azon x számok halmazát értjük az értelmezési tartomány alatt, amelyekre a hozzárendelési utasítás elvégezhető, illetve azon y értékek halmazát értjük értékkészlet alatt, amelyek egy-egy x számhoz tartoznak.

Ebből kifolyólag, ha nem adunk meg értelmezési tartományt a lineáris függvény, hatványfüggvény, exponenciális függvény, szinusz függvény, koszinusz függvény esetén, akkor a legbővebb halmaz, melyen ezek a függvények értelmezve vannak a valós számok halmaza ($\mathbb{R}$).

Azonban néhány függvény esetében nem minden valós számra végezhető el a hozzárendelési utasítás. Ide tartozik a páros pozitív egész kitevőjű gyökfüggvény, a valós törtfüggvény és a logaritmus függvény. Vegyük sorra, hogy melyik függvény esetében milyen kikötést kell tenni.

a) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, ahol n páros pozitív egész

Negatív számokból nem tudunk gyököt vonni a valós számok halmazán (csak komplex számok körében, ahogy az előző leckékben láttuk), így az argumentum nagyobb egyenlő, mint 0, azaz $x \geq 0$.

b) $f(x) = \log_a x$, ahol $a \neq 1$, $a > 0$

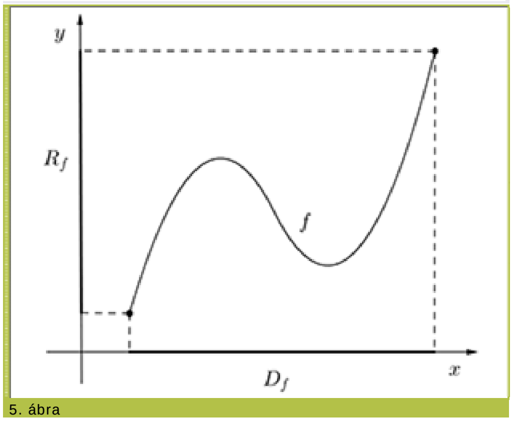
0-nál nagyobb számoknak van csak logaritmusa, azaz a kikötés $x > 0$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Egy tört nevezője nem lehet 0, mivel 0-val nem tudunk osztani, azaz a kikötés $x \neq 0$.

Vizsgáljuk meg az értelmezési tartomány és az értékkészlet fogalmát szemléletesen a függvények ábrájához kapcsolódóan. A függvények ábrájáról az értelmezési tartományt az x tengelyről, míg az értékkészletet az y tengelyről olvassuk le (5. ábra).

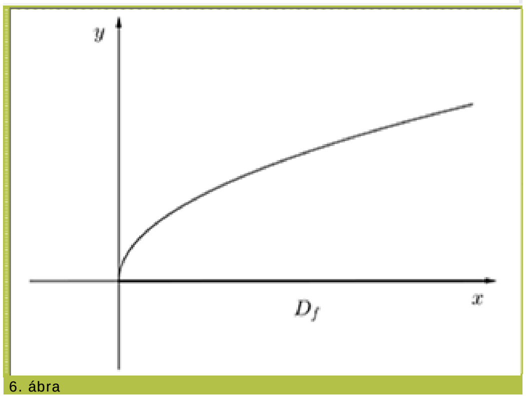
Az értelmezési tartomány és értékkészlet leolvasása a tengelyekről



5. ábra

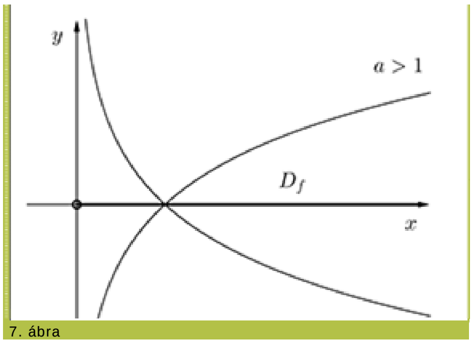
A függvények értelmezési tartományának meghatározásakor láttuk, hogy mely függvények esetében milyen kikötést kell tennünk. Nézzük meg most ezen függvények ábráját, s ez alapján is olvassuk le az értelmezési tartományt az x tengelyről (6-8. ábra).

Gyök függvény értelmezési tartománya



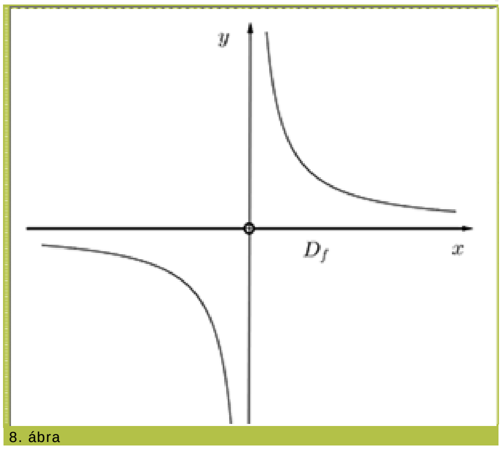
6. ábra

Logaritmus függvény értelmezési tartománya



7. ábra

Tört függvény értelmezési tartománya



8. ábra

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: A függvény hozzárendelési utasítása egy tört. Tudjuk, hogy egy tört nevezője nem lehet nulla. Most tehát a valós számok közül azokat kell kizárni az értelmezési tartományból, amelyekre a nevező nulla. Megoldjuk tehát az

$$x^2+x=0$$

egyenletet. Használhatjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét, vagy az $x(x+1)=0$ szorzatra bontást.

Mivel egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azt kapjuk, hogy egyenletünk két megoldása: $x_1=-1$ és $x_2=0$.

Ebből a két számból álló halmazt kell tehát a valós számok halmazából kivonni. Így az f függvény D_f -fel jelölt értelmezési tartománya:

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}=(-\infty,-1)\cup(-1,\ 0)\cup(0,\ \infty).$$

2. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Négyzetgyököt a valós számok körében csak nemnegatív számból vonhatunk. Ezért az a feltétel, hogy

$$x^2-x-2\ge 0.$$

Ennek az egyenlőlenségnek a megoldáshalmaza adja az értelmezési tartományt.

A másodfokú egyenlőtlenség megoldását a következőképp kaphatjuk meg. Először megoldjuk az

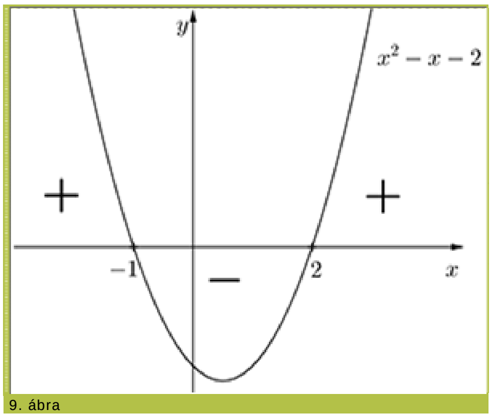
$$x^2-x-2=0$$

egyenletet. Szorzatra bontva a másodfokú kifejezést

$(x+1)(x-2)=0,$

a két gyök tehát $x_1=-1$ és $x_2=2$. Persze a megoldóképletet is használhattuk volna.

A másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, így grafikonja egy felfelé nyíló parabola, tehát a kifejezés a két gyökén kívül pozitív, és a két gyöke között negatív (9. ábra). Az értelmezési tartományt úgy kapjuk meg, hogy a valós számok közül elhagyjuk azokat, ahol a másodfokú kifejezés negatív, azaz a $(-1,\ 2)$ nyílt intervallum pontjait (9. ábra).



9. ábra

Ezek alapján

$D_f=\mathbb{R}\setminus(-1,\ 2)=(-\infty,\ \ -1]\cup[2,\ \infty).$

Figyeljünk a zárójelekre! Az előző feladatban a valós számok halmazából egy kételemű halmazt vontunk ki, ezért használtunk ott kapcsos zárójelet. A mostani feladatban egy nyílt intervallum összes elemét kellett elhagyni a valós számok halmazából.

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{1}{\ln\left(x^2-2x+1\right)}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Most két dolog jelent korlátozást. Az első az, hogy logaritmusát csak pozitív számnak vehetjük, tehát teljesülnie kell az

$x^2-2x+1>0$

egyenlőtlenségnek.

A második az, hogy a nevezőben nem állhat nulla.

Az értelmezési tartományt tehát úgy kapjuk meg, hogy a fenti egyenlőtlenség megoldáshalmazából elhagyjuk a nevező gyökhelyeit.

Megoldjuk az $x^2-2x+1>0$ egyenlőtlenséget. Mivel $x^2-2x+1=(x-1)^2$, a másodfokú kifejezés minden1 -től különböző szám esetén pozitív (grafikonja egy felfelé nyíló parabola, zérushelye $x=1$-ben). Tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza

$H_1=(-\infty,\ \ 1)\cup(1,\ \infty).$

A második feltételnek megfelelően $\ln\left(x^2-2x+1\right)\neq 0$. Mivel a logaritmus függvény csak 1-ben nulla, a nevező akkor lesz nulla, ha

$x^2-2x+1=1,$

azaz, ha

$x^2-2x=0.$

Ennek a másodfokú egyenletnek a két megoldása $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$. Ezt a két számot kell tehát még elhagyni a H_1 halmazból.

Ezek alapján végül is

$D_f = H_1 \setminus \{0, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2,\infty)$.

4. feladat: Mi az értelmezési tartománya az $f(x) = \sqrt{2-x} + \ln(x-1)$ függvénynek?

Megoldás: Nyilván értelmesnek kell lenni külön a gyökös és külön a logaritmusos kifejezésnek is.

Jelölje H_1 azt a halmazt, ahol a gyökös kifejezés értelmes, H_2 azt a részhalmazt, ahol a logaritmusos kifejezés értelmes.

A D_f ennek a két halmaznak a metszete.

Meghatározzuk először H_1-et. Az a feltétel, hogy

$2 - x \geq 0$.

azaz $x \leq 2$ legyen. Ez alapján

$H_1 = (-\infty, 2]$.

H_2 esetén az a feltétel, hogy

$x - 1 > 0$,

azaz $x > 1$ legyen. Ebből

$H_2 = (1, \infty)$.

Ennek a két halmaznak a metszetéből kapjuk, hogy

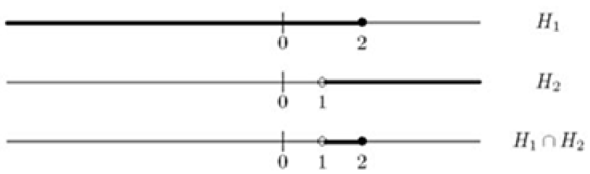
$D_f = (1, 2]$.

Egyváltozós függvények értelmezési tartományát gyakran valós számok részhalmazainak metszeteként, vagy uniójaként kapjuk meg. Metszetet használunk abban az esetben, ha egyik és másik feltételnek is egyszerre kell teljesülnie. Uniót használunk olyankor, mikor az egyik vagy a másik feltétel teljesül.

A valós számok részhalmazai ábrázolhatók a valós számegyenesen. Az ilyen részhalmazok metszeteit és unióit, különösen, ha azok tagjai több darabból állnak, grafikusan célszerű meghatározni a következő módon. A metszet, vagy unió minden tagját feltüntetjük egy valós számegyenesen, úgy, hogy a halmazhoz tartozó pontokat megvastagítjuk. Ezeket egymás alá rajzoljuk, úgy, hogy a origók egy függőleges vonalban legyenek. Az egységet is mindegyik ábrán ugyanakkorának választjuk. Az üres kör azt jelzi, hogy az a szám nincs a halmazban, a teli kör azt, hogy benne van.

Ezután a metszetet úgy kapjuk, hogy legalul felveszünk még egy számegyenest, ügyelve arra, hogy az origója és az egysége a fentiek alá essen, és azon megjelöljük azokat a pontokat, amelyek mindegyik számegyenesen meg voltak jelölve. Az uniónál azokat a pontokat kell a legalsó számegyenesen megjelölni, amelyek valamelyik fentin meg voltak jelölve.

A feladatunk esetében ezt mutatja az alábbi ábra.



5. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Annak kell teljesülni, hogy

$\dfrac{x-2}{x+1} \geq 0.$

Ez akkor igaz, ha a tört értéke nulla, ami a valós számok egy H_1 részhalmazán teljesül, vagy ha a tört értéke pozitív, ami egy H_2 részhalmazon teljesül. Most ennek a két halmaznak az uniója adja a D_f-et.

Kezdjük H_1 meghatározásával.

Egy tört akkor nulla, ha a számlálója nulla, és a nevező pedig értelmes. Az $x-2=0$ feltétel teljesül, ha $x=2$. Mivel 2-ben a nevező nem nulla, így ez a tört egyetlen zérushelye, vagyis

$H_1=\{2\}$.

Rátérünk H_2 meghatározására.

Egy tört két esetben pozitív. Ha mind a számláló, mind a nevező pozitív, ez egy H'_2 halmaz pontjaiban teljesül, vagy ha mind a számláló, mind a nevező negatív, ez egy H''_2 pontjaiban teljesül. Ezek uniója adja H_2-t.

Meghatározzuk először H'_2-t. Annak kell teljesülni, hogy

$x-2>0,$

azaz $x>2,$

és

$x+1>0,$

azaz $x>-1.$

Ez a két egyenlőtlenség egyszerre az $x>2$ számokra teljesül, tehát

$H'_2=(2,\infty).$

H''_2 esetén annak kell teljesülni, hogy

$x-2<0,$

azaz $x<2,$

és $x+1<0,$

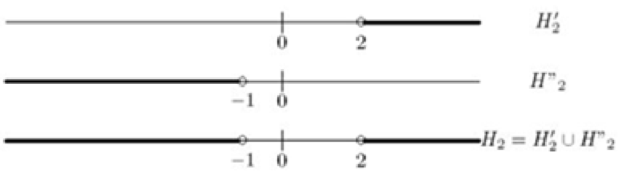
azaz $x<-1$.

Ez a két egyenlőtlenség egyszerre az $x<-1$ számokra teljesül, vagyis

$H''_2=(-\infty,-1).$

Ezeket felhasználva, amint az az alábbi ábráról is leolvasható

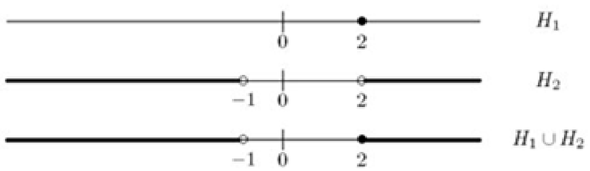
$H_2=H'_2\cup H''_2=(-\infty,-1)\cup(2,\infty).$



Végül is

$D_f = H_1 \cup H_2 = (-\infty, -1) \cup [2, \infty)$.

Az D_f grafikus előállítása szerepel a következő ábrán.



6. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: A logaritmus argumentumára vonatkozó kikötés alapján teljesül az

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} > 0$$

egyenlőtlenség.

Egy tört két esetben pozitív. Ha mind a számláló, mind a nevező pozitív, vagy ha mind a kettő negatív.

Bevezetjük a következő jelöléseket.

<table>
<tr><td colspan="2">$\frac{+}{+}$</td><td colspan="2">$\frac{-}{-}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">H_1-gyel jelöljük azt a halmazt, ahol a számláló és a nevező is pozitív.</td><td colspan="2">H_2-vel azt a halmazt, ahol mindkettő negatív.</td></tr>
<tr><td>H_1'' jelölje azt a halmazt, ahol a számláló pozitív.</td><td>H_1'''' az a halmaz, ahol a nevező pozitív.</td><td>H_2'' az a halmaz, ahol a számláló negatív.</td><td>H_2'''' az a halmaz, ahol a nevező negatív.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ezek metszete $H_1 = H_1'' \cap H_1''''$.</td><td colspan="2">Ezek metszete $H_2 = H_2'' \cap H_2''''$.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ezek uniója adja az értelmezési tartományt.
$D_f = H_1 \cup H_2$</td></tr>
</table>

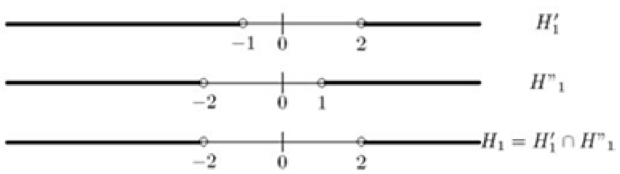
Kezdjük H_1 meghatározásával.

Mivel a számláló és a nevező képe is felfelé nyíló parabola, ezek a gyökeiken kívül pozitívak, és a gyökeik között negatívak.

Egyenlővé téve a számlálót is és a nevezőt is nullával, és megoldva az egyenleteket, azt kapjuk, hogy a számláló gyökei -1 és 2, a nevező gyökei pedig -2 és 1.

A lenti ábráról leolvashatjuk, hogy

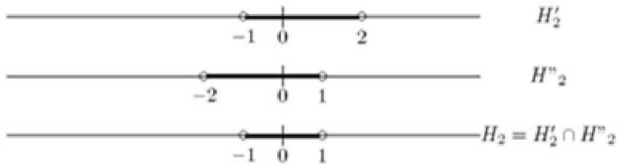
$H_1 = (-\infty, -2) \cup (2, \ \infty)$.



Térjünk rá H_2 meghatározására.

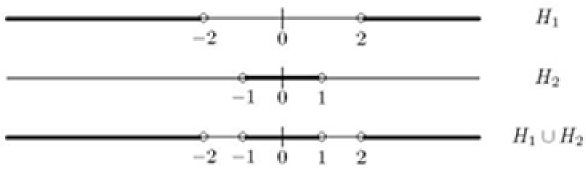
Mivel a számláló és a nevező képe is felfelé nyíló parabola, ezért gyökeik között negatívak (Láttuk, hogy a számláló gyökei -1 és 2, a nevező gyökei pedig -2 és 1). A lenti ábra alapján meghatározható a metszet.

$H_2 = (-1,\ 1)$.



Végül, az uniót is grafikusan meghatározva, az alábbi ábrából kapjuk, hogy

$D_f = H_1 \cup H_2 = (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$.



Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Mi az $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ függvény értelmezési tartománya?

- $D_f = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.
- $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.
- $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.
- $D_f = (0, 1)$.

mehet

2. kérdés: Mi az értelmezési tartománya az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$ függvénynek?

- $D_f = (-\infty, -2] \cup (0, \infty)$.
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $D_f = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$.
- $D_f = \mathbb{R} \setminus [-2, 0]$.

mehet

3. kérdés: Legyen $f(x) = \ln(x(2-x))$. Ekkor $D_f =$

- $(0, 2)$.
- $(-2, 0)$.
- $[0, 2]$.
- $(0, 2]$.

mehet

4. kérdés: Az $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\sqrt{3-x}$ függvény értelmezési tartománya

- $(-1,\,0)\cup(0,\,3]$.
- $(-1,\,0)\cup(0,\,3)$.
- $(-1,\,3)$.
- $(-1,\,3]$.

mehet

5. kérdés: Mi az értelmezési tartománya az $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{x+3}\right)$ függvénynek?

- $D_f=(-2,\,3)$.
- $D_f=(-3,\,2)$.
- $D_f=(-\infty,\,-3]\cup[2,\,\infty)$.
- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3,\,2\}$.

mehet

Elméleti összefoglaló

A függvényekkel különféle műveleteket végezhetünk. Értelmezzük az f és g egyváltozós valós függvények összegét, különbségét, szorzatát, hányadosát, melyek csak azokban a pontokban értelmezettek, amelyekben f és g is értelmezett (azaz értelmezési tartományuk közös részein).

$$h(x)=f(x)+g(x),\ ahol\ D_h=D_f\cap D_g$$

$$h(x)=f(x)-g(x),\ ahol\ D_h=D_f\cap D_g$$

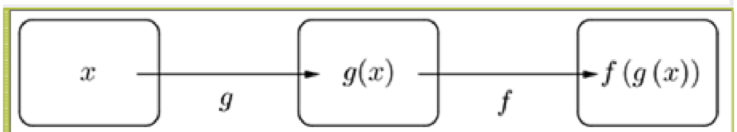
$$h(x)=f(x)g(x),\ ahol\ D_h=D_f\cap D_g$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ ahol\ D_h=D_f\cap D_g\ \text{és}\ g(x)\neq 0$$

A fentieken túlmenően egy újabb művelettel ismerkedünk meg. A függvények kompozícióját tekintjük a legfontosabb függvényműveletnek.

Definíció: Az és g függvényekből $f(g(x))$ módon konstruált függvényt **összetett függvény**nek (f és g kompozíciójának) nevezzük. A $g(x)$-függvényt **belső függvény**nek, az $f(x)$**függvényt külső függvény**nek nevezzük. Az $f(g(x))$ kiértékelésekor először a $g(x)$-et számoljuk ki, majd másodszorra alkalmazzuk f-et $g(x)$-re (10. ábra).

Összetett függvény alkotása



10. ábra

Az összetett függvény másik szokásos jelölése $(f\circ g)(x)$. Mi az első jelölést fogjuk használni.

Ha kettőnél több függvény felhasználásával alkotunk meg egy összetett függvényt, akkor többszörösen összetett függvényről beszélünk. Például f, g, h függvények esetén $f(g(h(x)))$ többszörösen összetett függvény alkotható.

A függvényeket tetszőleges sorrendben is egymásba ágyazhatjuk, azonban ezen összetételek eredménye általában különböző: $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Kidolgozott feladatok

7. feladat: Tekintsük az $f(x) = x + 1$ és a $g(x) = \sqrt{x-1}$ függvényt.

Határozzuk meg a $h = f + g$ összeg függvényt és a $k = f \cdot g$ szorzat függvényt.

Megoldás: Az f függvény mindenütt értelmezve van ($D_f = \mathbb{R}$), a g függvény az 1-nél nagyobb vagy egyenlő számok halmazán ($D_g = [1,\infty)$), ezért

$$D_h = D_k = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [1,\infty) = [1, \infty).$$

A h függvény hozzárendelési utasítása

$$h(x) = f(x) + g(x) = (x+1) + \sqrt{x-1},$$

a k függvény hozzárendelési utasítása pedig

$$k(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+1) \cdot \sqrt{x-1}.$$

8. feladat: Legyen $f(x) = (x+1)^2$ és $g(x) = x - 1$.

Határozzuk meg a $h = f - g$ és a $k = \dfrac{f}{g}$ függvényeket.

Megoldás: Kezdjük a különbséggel. Mivel mindkét függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, így $D_h = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. A hozzárendelési utasítás pedig

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x+1)^2 - (x-1) = x^2 + x + 2.$$

A k függvény értelmezési tartományába a g függvény zérushelye nem tartozik bele, így $D_k = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, \ 1) \cup (1, \infty)$. A hozzárendelési utasítás pedig

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x+1)^2}{x-1}.$$

9. feladat: Tekintsük az $f(x) = x^2 + 3x - 2$ függvényt. Mivel egyenlő $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ és $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$?

Megoldás: Egy függvény hozzárendelési utasítása mondja meg, hogy az mit rendel az argumentumához.

Most a hozzárendelési utasítás azt mondja, hogy az argumentum négyzetéhez hozzá kell adni az argumentum háromszorosát és abból levonni kettőt. Bármi is az argumentum, feltéve persze, hogy az értelmezési tartományban van. Ez most a valós számok halmaza, ezzel tehát nem lehet gond. Ezért

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x - 2.$$

Hasonlóan, feltéve, hogy $x \neq 0$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{x}\right) - 2 = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 2.$$

10. feladat: Tekinsük az $f(x) = x - 1$ és a $g(x) = \sqrt{x} - 1$ függvényeket. Határozzuk meg a $g(f(x))$ és az $f(g(x))$ függvények hozzárendelési utasítását.

Megoldás: A $g(f(x))$ kompozícióban a g függvény az $f(x)$-re, azaz az $x-1$-re fejti ki hatását. Mivel a g függvény hatása az, hogy gyököt von az argumentumából és abból még levon 1-et, azt kapjuk, hogy

$$g(f(x)) = g(x-1) = \sqrt{x-1} - 1.$$

Megjegyezzük, hogy így is számolhattunk volna:

$$g(f(x)) = \sqrt{f(x)} - 1 = \sqrt{x-1} - 1.$$

Hasonlóan

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x} - 1) - 1 = \sqrt{x} - 2,$$

mivel az f úgy hat, hogy az argumentumából levon1 -et.

Mindez a másik felírási móddal:

$$f(g(x)) = g(x) - 1 = (\sqrt{x} - 1) - 1 = \sqrt{x} - 2.$$

11. **feladat:** Legyen $f(x) = e^{x-1}$ és $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Írjuk fel mind a két sorrendű kompozíció képletét.

Megoldás:

$$g(f(x)) = g\left(e^{x-1}\right) = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}},$$

vagy a másik felírási móddal

$$g(f(x)) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}}.$$

Hasonlóan

$$f(g(x)) = f\left(x + \frac{1}{x}\right) = e^{x+\frac{1}{x}-1},$$

vagy

$$f(g(x)) = e^{g(x)-1} = e^{x+\frac{1}{x}-1}.$$

A kétfajta felírási mód közül használja az olvasó a számára természetesebbet. Mi a továbbiakban csak az egyiket adjuk meg.

12. feladat: Legyen $f(x) = x^2 + x + 2$. Határozzuk meg $f(f(x))$ képletét.

Megoldás:

$$f(f(x)) = f\left(x^2 + x + 2\right) = \left(x^2 + x + 2\right)^2 + \left(x^2 + x + 2\right) + 2 = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 8.$$

13. feladat: Tekintsük az $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ és a $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ függvényeket. Írjuk fel $g(f(x))$ képletét.

Megoldás:

$$g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} - 1}{\frac{x+1}{x-1} + 1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)+(x-1)} = \frac{1}{x}.$$

Noha a kompozíció általában bonyolultabb függvény, mint a külső és a belső függvény, a példánk mutatja, hogy ez fordítva is lehet.

14. feladat: Tudjuk, hogy $f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 + 3x - 1$. Mivel egyenlő $f(x)$?

Megoldás: Az a feladatunk, hogy kifejezzük $x^2 + 3x - 1$-et az $\frac{x}{2}$ függvényeként. Amit $\frac{x}{2}$-vel csinálni kell, hogy belőle $x^2 + 3x - 1$ legyen, az a keresett hozzárendelési utasítás.

Mivel könnyen látható, hogy

$$x^2 + 3x - 1 = 4\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{2}\right) - 1,$$

ezért a keresett hozzárendelési utasítás:

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 1.$$

15. feladat: Ha $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, mivel egyenlő $f(x)$?

Megoldás: Most azt keressük, hogy mit kell az $x + \frac{1}{x}$ -szel csinálni, hogy belőle $x^2 + \frac{1}{x^2}$ legyen.

Vegyük észre, hogy

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

ahonnan

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

Tehát

$$f(x) = x^2 - 2.$$

16. feladat: Bontsuk fel két függvény kompozíciójára $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvényt.

Megoldás: Az egyik lehetséges megoldás a következő:

Legyen $f(x) = x^2 + 1$ és $g(x) = \sqrt{x}$. Ekkor

$$h(x) = g(f(x)),$$

hiszen

$$g(f(x)) = g\left(x^2 + 1\right) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

De eljárhattunk volna máshogy is.

Legyen $u(x) = x^2$ és $v(x) = \sqrt{x + 1}$.

Ekkor

$$h(x) = v(u(x)),$$

hiszen

$$v(u(x)) = \sqrt{u(x) + 1} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Látjuk tehát, hogy összetett függvényt általában többféleképpen lehet egyszerűbb függvények kompozíciójára bontani. Hogy a lehetőségek közül melyiket célszerű választani, azt az dönti el, hogy a továbbiakban mire akarjuk használni a felbontást.

Ez az eljárás, tehát egy összetett függvény felbontása egyszerűbb függvények kompozíciójára, a későbbiekben igen fontos lesz, és nagyon gyakran fog szerepelni.

17. feladat: Bontsuk fel a $h(x) = e^{x^3} - x$ függvényt két függvény kompozíciójára.

Megoldás: Először egy jelöléssel kapcsolatos megjegyzés. Az a^{b^c} alakú hatványoknál felmerül, hogy ez $a^{(b^c)}$, vagy $\left(a^b\right)^c$ rövidítése-e, ez a kettő ugyanis nem ugyanaz. Például $2^{\left(3^2\right)} = 2^9 = 512$, de $\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$. Az a konvenció, hogy

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}.$$

Most már egy lehetséges felbontás

$$f(x) = x^3,$$

$$g(x) = e^x - \sqrt[3]{x}.$$

Ekkor valóban

$$h(x) = g(f(x)),$$

hiszen

$$g(f(x)) = g\left(x^3\right) = e^{x^3} - \sqrt[3]{x^3} = e^{x^3} - x.$$

(Az volt itt a lényeg, hogy mivel az eredeti függvényben x^3 és x is szerepel, kifejeztük az x-et x^3-bel.)

18. feladat: Bontsuk fel az $u(x) = \sqrt{2 - \sin^2 x}$ függvényt három függvény kompozíciójára.

Megoldás: Most is több megoldás van, ezek közül talán a legtermészetesebb az alábbi.

Legyen $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = 2 - x$ és $h(x) = \sqrt{x}$.

Ekkor $u(x) = h(g(f(x)))$,

hiszen

$$h(g(f(x))) = h\left(g\left(\sin^2 x\right)\right) = h\left(2 - \sin^2 x\right) = \sqrt{2 - \sin^2 x}.$$

Ellenőrző kérdések

6. kérdés: Legyen $f(x) = 2x - 5$. Ekkor $f\left(\frac{x}{2}\right) =$

- $x - \frac{5}{2}$.
- $x - 5$.
- $2x - \frac{5}{2}$.
- $x - 10$.

mehet

7. kérdés: Legyen $f(x)=2x+5$. Ekkor $f\left(\frac{2}{x}\right)=$

- $\frac{1}{x}+5.$
- $\frac{4}{x}+\frac{5}{2}.$
- $\frac{1}{x}+\frac{5}{2}.$
- $\frac{4}{x}+5.$

mehet

8. kérdés: Legyen $f(x)=3x-2$. Ekkor $f(f(x))=$

- $9x-8.$
- $9x-2.$
- $9x^2-8.$
- $9x^2-4.$

mehet

9. kérdés: Legyen $f(x)=1-\sqrt{x}$ és $g(x)=\sqrt{x+1}$. Ekkor $g(f(x))=$

- $\sqrt{2-\sqrt{x}}.$
- $\sqrt{x-\sqrt{x}+2}.$
- $\sqrt{2}-\sqrt{x}.$
- $\sqrt{2}-\sqrt[4]{x}.$

mehet

10. kérdés: Legyen $f(x)=\sin(1-x)$ és $g(x)=(1-x)^2$. Ekkor $g(f(x))=$

- $\sin(1-x)^2.$
- $1-2\sin(1-x)+\sin^2(1-x).$
- $\sin^2(1-x).$
- $\sin\left(2x-x^2\right).$

mehet

11. kérdés: Ha $g(f(x))=\sqrt{x^2-5}$ és $g(x)=\sqrt{x-5}$, akkor $f(x)=$

- $x^2.$
- $x-5.$

- $(x-5)^2$.
- $x+5$.

mehet

12. kérdés: Ha $g(f(x)) = x$ és $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$, akkor $f(x) =$

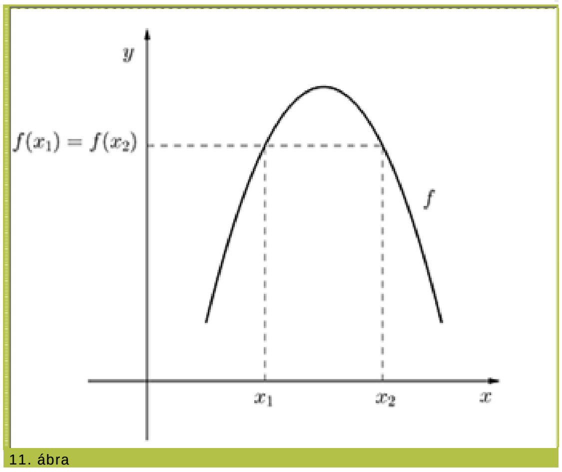
- $\frac{1}{x+1}$.
- $\frac{1}{x} + 1$.
- $\frac{1}{x-1}$.
- $\frac{1}{x} - 1$.

mehet

Elméleti összefoglaló

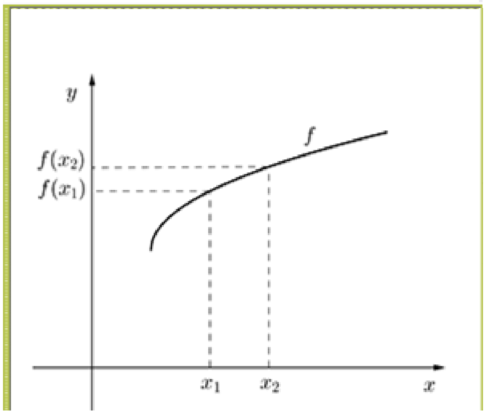
Definíció: Egy f függvény **kölcsönösen egyértelmű,** ha bármely $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ (11-12. ábra).

Nem kölcsönösen egyértelmű függvény



11. ábra

Kölcsönösen egyértelmű függvény



12. ábra

Példa néhány értékre kiszámítva a fenti függvények:

$f(x)=-(x-3)^2+5$	$f(x)=\sqrt{x-1}+2$
$x_1=2, f(x_1)=f(2)=-(2-3)^2+5=6$	$x_1=2, f(x_1)=f(2)=\sqrt{2-1}+2=3$
$x_2=4, f(x_2)=f(4)=-(4-3)^2+5=6$	$x_2=3, f(x_2)=f(3)=\sqrt{3-1}+2=\sqrt{2}+2\approx 3,41$
$f(x_1)=f(2)=6=f(x_2)=f(4)$	$f(x_1)=f(2)=3\neq f(x_2)=f(3)\approx 3,41$

A szigorúan monoton függvények kölcsönösen egyértelmű függvények.

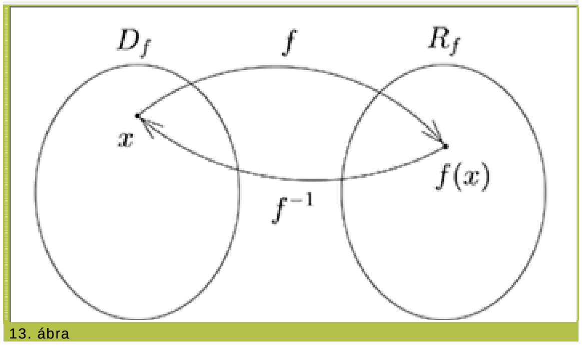
Definíció: Ha az f függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor létezik f^{-1}-gyel jelölt **inverz függvénye**, amely az f értékkészletét képezi le az f értelmezési tartományára, tehát

$f: D_f \to R_f$

$f^{-1}: R_f \to D_f$

továbbá teljesül, hogy $f^{-1}(f(x))=f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ bármely $x\in D_f$ esetén (13. ábra).

Inverz függvény definíciója



13. ábra

Tehát az inverz függvény értelmezési tartománya az eredeti függvény értékkészlete, és értékkészlete az eredeti függvény értelmezési tartománya.

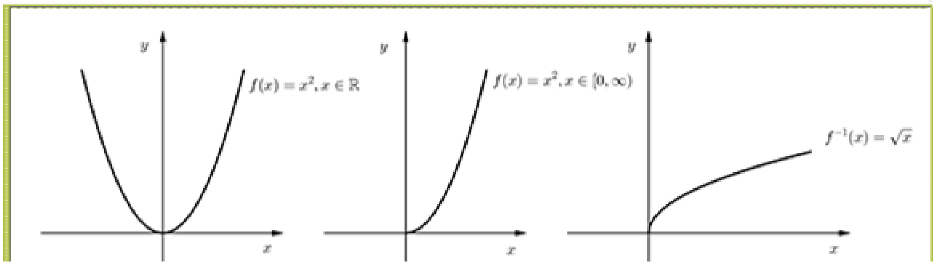
$R_f=D_{f^{-1}}\,D_f=R_{f^{-1}}$

Megjegyzés: Az f^{-1} jelölés könnyen megtévesztő lehet. Ha a egy szám, akkor a^{-1}-gyel az $\frac{1}{a}$ reciprokot szoktuk jelölni, de az $f^{-1}(x)$ nem $\frac{1}{f(x)}$-et jelöl.

Ha az f függvény nem kölcsönösen egyértelmű, de az értelmezési tartományának van olyan részhalmaza, ahol e feltétel teljesül, akkor az f függvény ezen a részhalmazon értelmezett leszűkítésének a definíció alapján létezik inverze.

Erre példa az $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$ függvény, amely nem invertálható, de például $x\in[0,\infty)$ leszűkített intervallumon már létezik inverze (mert itt már szigorúan monoton), mely a $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ függvény lesz (14. ábra).

665 függvény értelmezési tartományának leszűkítése, majd invertálása



14. ábra

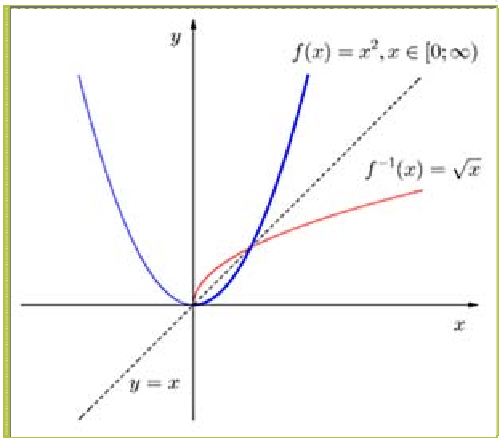
Technikailag az inverz függvény képletét az $f(x) = y$ egyenlet x-re való rendezésével lehet előállítani. Fontos még megjegyezni, hogy az inverz függvény inverze az eredeti függvény.

Mivel az f és f^{-1} függvényeknél az értelmezési tartomány és az értékkészlet helyet cserél, ezért a függvény ábrázolásánál a koordinátatengelyek is szerepet cserélnek. Ennek következtében az $f(x)$ és $f^{-1}(x)$ görbék egymás tükörképei, az $y = x$ egyenesre nézve.

Az elemi függvények között több függvény- inverz függvény pár található (15-17. ábra).

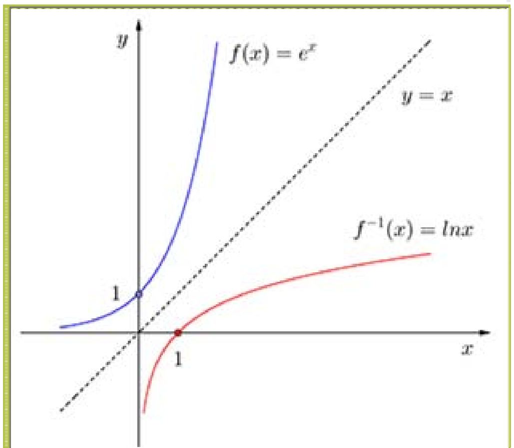
Néhány példa:

Hatványfüggvény és gyökfüggvény



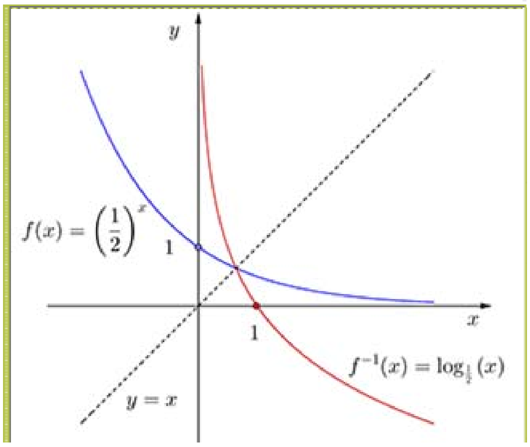
15. ábra

Exponenciális és logaritmus függvény ($a > 1$)



16. ábra

Exponenciális és logaritmus függvény ($1 > a > 0$)



17. ábra

Kidolgozott feladatok

19. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2x - 3$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: Először az eredeti függvény értelmezési tartományát és az értékkészletét határozzuk meg, amiből az inverz függvény értelmezési tartományára és értékkészletére következtetünk, valamint megvizsgáljuk a függvény monotonitását, amiből az inverz függvény létezésére következtetünk (ahogy láttuk csak szigorúan monoton függvényeknek van inverze).

Ebben az esetben az f értelmezési tartománya a valós számok halmaza, szigorúan monoton növő (grafikonja egy emelkedő egyenes), értékkészlete szintén a valós számok halmaza. Így létezik az inverz függvénye és az is a valós számok halmazán van értelmezve. Az inverz függvény képletének előállításához megoldjuk az

$$y = 2x - 3$$

egyenletet x-re, hiszen most azt keressük, hogy mit kell az $y = f(x) = 2x - 3$-mal csinálni, hogy belőle visszakapjuk az x-et.

Rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{y+3}{2}.$$

Ebből az inverz függvény képletét úgy kapjuk, hogy az y helyére x-et írunk, mivel a függvények argumentumát x-szel szoktuk jelölni. Tehát az inverz függvény képlete:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

20. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^3 + 1$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: Az x^3 függvény elemi alapfüggvény, mind az értelmezési tartománya, mind az értékkészlete a valós számok halmaza, és szigorúan monoton növő.

Ugyanezek igazak az $x^3 + 1$ függvényre is.

Létezik tehát az inverz függvény, ami szintén minden valós számra értelmezett. Előállítjuk a képletét. Megoldjuk x-re az

$$y = x^3 + 1$$

egyenletet. Kapjuk, hogy

$$x^3 = y - 1,$$

$$x = \sqrt[3]{y-1}.$$

Innen az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}.$$

21. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{x+2}$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: Először is $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, hiszen a nevező nem lehet nulla. Az értékkészlet meghatározása egy kicsit bonyolultabb.

Egy függvény értékkészlete azokból az y számokból áll, amelyekhez található olyan D_f-beli x, hogy $f(x) = y$.

A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy y benne van az értékkészletben, ha megoldható x-re az

$y = \dfrac{1}{x+2}$ egyenlet. Persze csak olyan x jöhet szóba, amelyre $x \neq 2$.

Az látszik, hogy y nem lehet nulla, hiszen a törtünk számlálója soha nem nulla. De y bármely nullától különböző szám lehet. (Egy tört értéke akkor lehet 0, ha a számlálója 0. Itt a számláló 1, így a tört értéke nem lehet 0. A nevező bármilyen nullától különböző értéket felvehet, így a tört étéke (y) is bármilyen nullától különböző érték lehet.)

Ezért $R_f = (-\infty, \ \ 0) \cup (0, \infty)$.

Az f függvény nem szigorúan monoton, de kölcsönösen egyértelmű, létezik tehát az inverz függvény. Hátra van még a képletének előállítása. Ennek érdekében megoldjuk x-re az

$$y = \frac{1}{x+2}$$

egyenletet, feltételezve, hogy $y \neq 0, \quad x \neq -2$. Kapjuk, hogy

$$x = \frac{1}{y} - 2.$$

Ebből az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2.$$

22. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 2^{x-1} + 3$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: A függvényünk mindenütt értelmezett és értékkészlete $R_f = (3, \infty)$, továbbá szigorúan monoton növő. Létezik tehát az inverz függvény. Az inverz képletének előállításához megoldjuk az

$$y = 2^{x-1} + 3$$

egyenletet, feltéve, hogy $y > 3$.

Ekkor

$$2^{x-1} = y - 3,$$

majd mindkét oldal kettes alapú logaritmusát véve, és felhasználva a logaritmus egyik azonosságát ($\log_a(x^n) = n\log_a x$) azt kapjuk, hogy

$$\log_2\left(2^{x-1}\right) = \log_2(y-3),$$

$$(x-1)\log_2(2) = \log_2(y-3),$$

$$x - 1 = \log_2(y-3),$$

$$x = \log_2(y-3) + 1.$$

Végül is az inverz függvény képlete

$$f^{-1}(x) = \log_2(x-3) + 1.$$

23. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = -\ln(x+7) - 3$ függvény inverz függvényét.

Megoldás: A logaritmus argumentumára kell kikötést tennünk, $x + 7 > 0$.

Ezt rendezve $x > -7$ kell, hogy teljesüljön, azaz $D_f = (-7, \infty)$. Ez lesz az inverz függvény értékkészlete. A logaritmus függvény értékkészlete R, így az inverz függvény értelmezési tartománya is ez lesz.

Megoldjuk x-re az $y = -\ln(x+7) - 3$ egyenletet.

$y+3=-\ln(x+7)$

$-y-3=\ln(x+7)$

Mindkét oldalt *e* alapra emeljük és logaritmus azonosságot $\left(a^{\log_a b}=b\right)$ alkalmazva kapjuk, hogy

$e^{-y-3}=e^{\ln(x+7)}$

$e^{-y-3}=x+7$

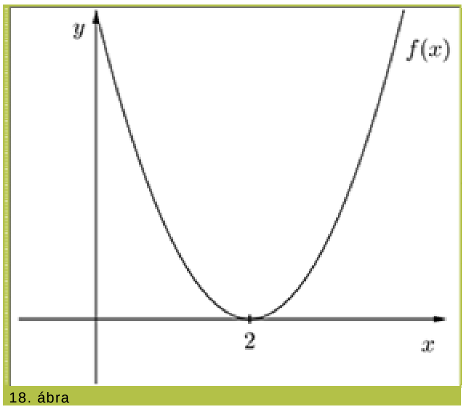
$e^{-y-3}-7=x$

Ez alapján az inverz függvény

$f^{-1}(x)=e^{-y-3}-7$

24. feladat: Tekinsük az $f(x)=x^2-4x+4$ függvényt. Határozzuk meg egy alkalmas megszorításának az inverz függvényét.

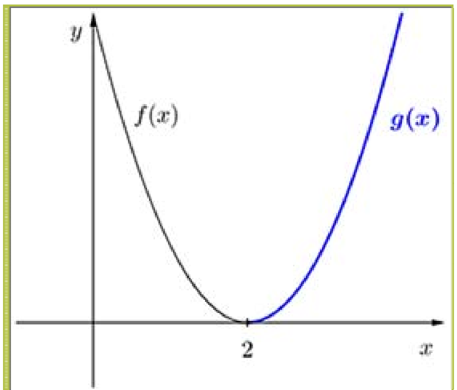
Megoldás: Az $x^2-4x+4=(x-2)^2$ felírásból látszik, hogy a függvénynek egy zérushelye van ($(x-2)^2=0$ egyenlet megoldásából), mégpedig az $x=2$-ben. Mivel a főegyüttható pozitív, így a függvény képe egy felfelé nyíló parabola, mely a 18. ábrán látható.



18. ábra

Látszik, hogy a függvény nem szigorúan monoton az egész értelmezési tartományán, de ha megszorítjuk a kettőnél nagyobb, vagy egyenlő számokra, a megszorítás már az lesz.

Tekintsük tehát a $g(x)=x^2-4x+4,\ D_g=[2,\infty)$ függvényt (amely az eredeti függvény megszorítása) (19.ábra), és ennek határozzuk meg az inverzét.



19. ábra

A 9. ábra alapján g értékkészlete $R_g=[0,\infty)$. Ez lesz az inverz értelmezési tartománya.

Megoldjuk az $y\geq 0,\ x\geq 2$ feltételek mellett *x*-re az

$y=x^2-4x+4$ egyenletet.

$(x-2)^2 = y,$

$x-2 = \sqrt{y}$, (tudjuk, hogy $x-2 \geq 0$, ezért nem kell itt $|x-2|$-t írnunk),

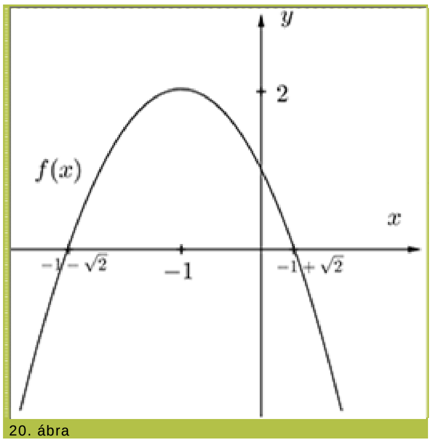
$x = \sqrt{y} + 2.$

A g inverz függvénye tehát

$g^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2.$

25. feladat: Tekintsük az $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ függvényt és alkalmas megszorításának határozzuk meg az inverzét.

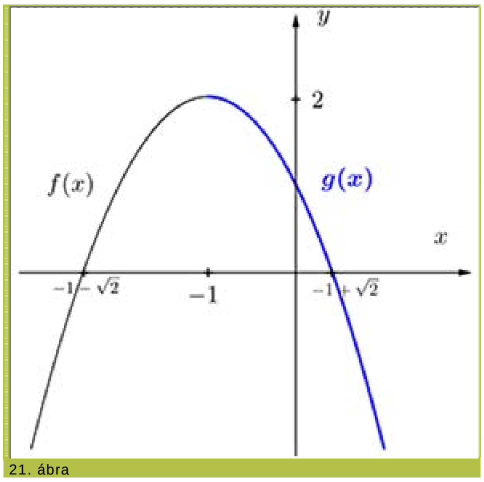
Megoldás: A függvény ábrázolásához először a megoldóképlet segítségével kiszámítjuk a gyököket: $x_1 = -1-\sqrt{2} \approx -2,41$, $x_2 = -1+\sqrt{2} \approx 0,41$. Ezek lesznek a függvény zérushelyei. Mivel a függvény főegyütthatója negatív, így egy lefelé nyíló parabola lesz a függvényünk grafikonja (20. ábra). A parabola csúcsának x koordinátája a gyökök átlaga, mivel azonos távolságra található a két zéruhelytől. A csúcs y koordinátája pedig a függvény képletébe való helyettesítéssel kapható meg: $f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 2.$ (Megjegyzés: az ábrázolás egyszerűbb módjáról a Függvény transzformációk című leckében tanulunk majd.)



20. ábra

A 20. ábra alapján látszik, hogy ha megszorítjuk a függvényünket a -1-nél nagyobb, vagy egyenlő számokra, akkor egy szigorúan monoton csökkenő függvényt kapunk.

Tekintsük tehát a $g(x) = 2-(x+1)^2$, $D_g = [-1, \infty)$ függvényt (mely az eredeti függvény megszorítása) és határozzuk meg az inverzét (21. ábra).



21. ábra

A 21. ábra alapján világos, hogy $R_g = (-\infty, 2]$.

Megoldjuk tehát az $y \leq 2$, $x \geq -1$ feltételek mellett x-re az

$y = 2-(x+1)^2$

egyenletet.

$(x+1)^2 = 2-y,$

$x+1 = \sqrt{2-y},$

(az abszolút értéket megint nem kell kitenni, hiszen a feltételek miatt $x+1 \geq 0$).

Ebből

$x = \sqrt{2-y} - 1.$

Ez alapján az inverz függvény

$g^{-1}(x) = \sqrt{2-x} - 1.$

Ellenőrző kérdések

13. kérdés: Az $f(x) = 2-3x$ függvény inverz függvénye

- ( ) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$
- (•) $f^{-1}(x) = \frac{-x}{3} + \frac{2}{3}.$
- ( ) $f^{-1}(x) = \frac{2x}{3} - \frac{1}{3}.$
- ( ) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$

mehet

14. kérdés: Az $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$ függvény inverz függvénye

- (•) $f^{-1}(x) = x^5 + 1.$
- ( ) $f^{-1}(x) = (x+1)^5.$
- ( ) $f^{-1}(x) = 1 - x^5.$
- ( ) $f^{-1}(x) = x^{-5} + 1.$

mehet

15. kérdés: Az $f(x) = \frac{2}{x-1}$ függvény inverz függvénye

- ( ) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 1.$
- ( ) $f^{-1}(x) = \frac{2}{x} - 1.$
- ( ) $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{x}.$
- (•) $f^{-1}(x) = \frac{2+x}{x}.$

mehet

16. kérdés: Mi az $f(x)=e^{1-x}-2$ függvény inverz függvénye?

- $f^{-1}(x)=\ln(x+2)+1.$
- $f^{-1}(x)=1+\ln(x-2).$
- $f^{-1}(x)=1-\ln(x+2).$
- $f^{-1}(x)=\ln(1-x)+2.$

mehet

17. kérdés: Mi az $f(x)=2\log_6(3x)-4$ függvény inverz függvény-e?

- $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}6^{\frac{1}{2}y+2}$
- $f^{-1}(x)=2^{\frac{1}{2}y+2}$
- $f^{-1}(x)=\frac{6^{y+4}}{3}$
- $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}6^{\frac{1}{2}y}+4$

mehet

18. kérdés: Az $f(x)=x^2-6x+10$ függvény szigorúan monoton növő az alábbi intervallumon:

- $[3,\infty).$
- $[-1,4].$
- $(-\infty,6).$
- $(-\infty,3).$

mehet

19. kérdés: Az $f(x)=x^2+4x+2,\ D_f=[-2,\infty)$ függvény inverze az alábbi függvény:

- $f^{-1}(x)=\sqrt{x+2}-2.$
- $f^{-1}(x)=\sqrt{x}+2.$
- $f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+2.$
- $f^{-1}(x)=\sqrt{x+2}+2.$

mehet