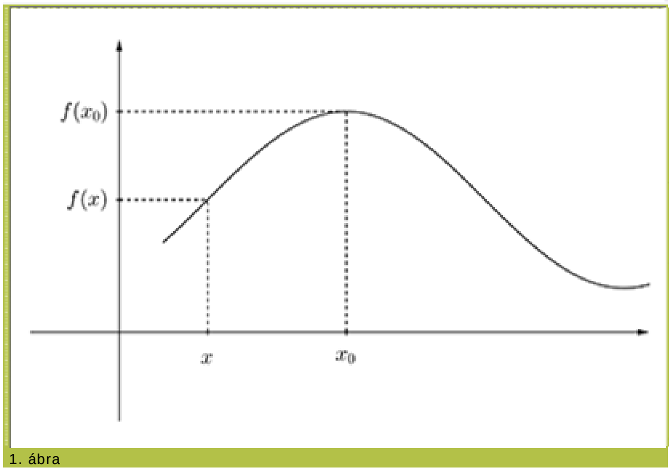
Tanulási cél: a legfontosabb függvénytulajdonságok áttekintése, az elemi függvények ezen tulajdonságok alapján való jellemzése, az arkuszfüggvények megismerése.

Elméleti összefoglaló

A következő részben felsoroljuk azokat a fogalmakat, amelyeket a függvények vizsgálata során a leggyakrabban használunk.

Definíció: Az f függvénynek az x_0 helyen **globális maximuma** van, ha az értelmezési tartományba eső minden x esetén $f(x) \le f(x_0)$ (1. ábra).

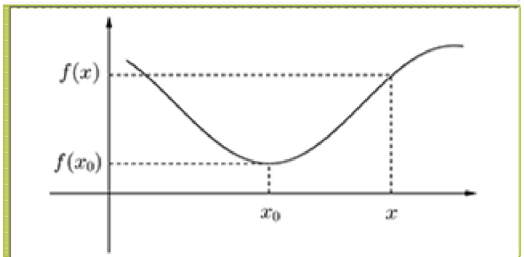
Globális maximum definíciója



1. ábra

Definíció: Az f függvénynek az x_0 helyen **globális minimuma** van, ha az értelmezési tartományba eső minden x esetén $f(x) \ge f(x_0)$ (2. ábra).

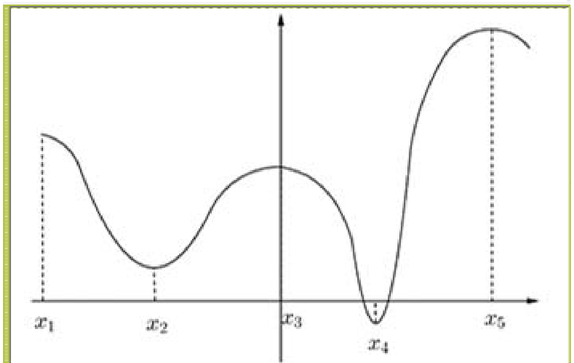
Globális minimum definíciója



2. ábra

Definíció: Az $f(x_0)$ globális maximumot és globális minimumot **globális szélsőértéknek,** az x_0 helyet pedig **globális szélsőértékhelynek** nevezzük. Ha az $f(x_0)$ csak az x_0 hely valamely környezetében maximális, illetve minimális, akkor **lokális maximum**ról, illetve **lokális minimum**ról beszélünk, x_0 pedig lokális maximumhely, illetve lokális minimumhely, közös néven **lokális szélsőértékhely** (3. ábra).

Példa lokális és globális szélsőértékekre

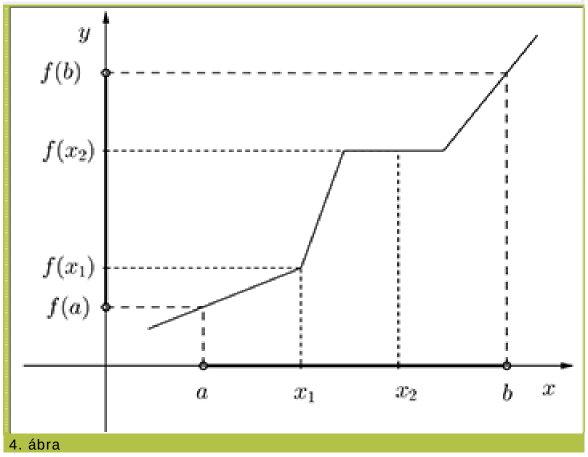


3. ábra

x_2, x_4 lokális minimumhely
x_1, x_3, x_5 lokális maximumhely
x_5 globális maximumhely
x_4 globális minimumhely

Definíció: Az f függvény **monoton nő** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) \le f(x_2)$ (4. ábra).

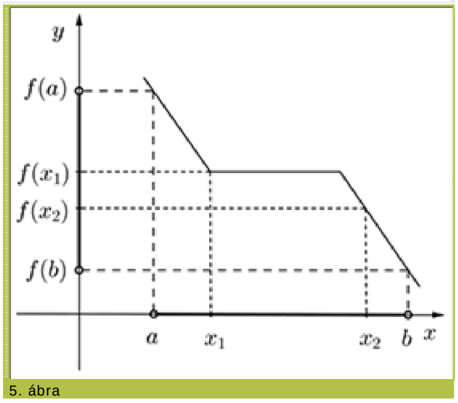
Monoton növekvő függvény definíciója



4. ábra

Definíció: Az f függvény **monoton csökken** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) \ge f(x_2)$ (5. ábra).

Monoton csökkenő függvény definíciója



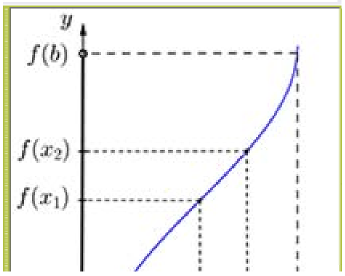
5. ábra

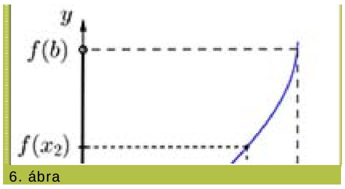
Tehát a monoton növekedés (és monoton csökkenés) definíciója megengedi, hogy a függvény grafikonjában legyenek olyan szakaszok, ahol azok párhuzamosak az x tengellyel (tehát konstansok).

Definíció: Hasonlóképp fogalmazhatóak meg a függvények szigorú monotonitására vonatkozó definíciók is. Az f függvény **szigorúan monoton nő** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) < f(x_2)$ (6. ábra).

Definíció: Az f függvény **szigorúan monoton csökken** az $(a, b) \subset D_f$ intervallumon, ha minden $x_1, x_2 \in (a, b)$ és $x_1 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) > f(x_2)$ (7. ábra).

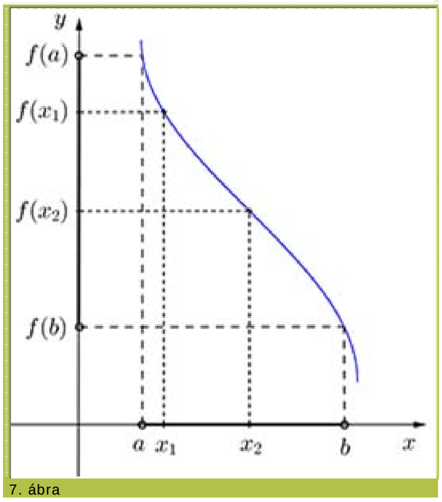
Szigorúan monoton növő függvény definíciója





6. ábra

Szigorúan monoton csökkenő függvény definíciója

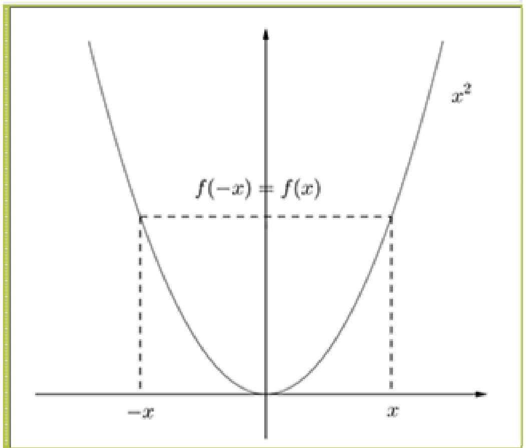


7. ábra

Definíció: Az f függvényt **páros** függvénynek nevezzük, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x$ is az értelmezési tartományban van és $f(-x) = f(x)$ (8. ábra).

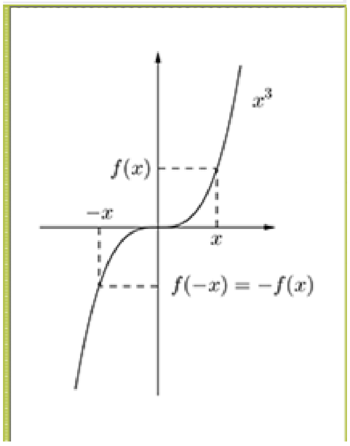
Definíció: Az f függvényt **páratlan** függvénynek nevezzük, ha minden $x \in D_f$ esetén $-x$ is az értelmezési tartományban van és $f(-x) = -f(x)$ (9. ábra).

Páros függvény



8. ábra

Páratlan függvény



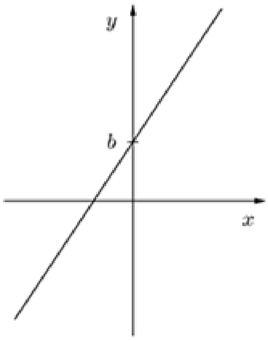
9. ábra

Megjegyzés: A páros függvény görbéje az y tengelyre, a páratlan függvény görbéje az origóra szimmetrikus. Az x^n (ahol n páros), $\cos x$ függvények párosak, az x^n (ahol n páratlan), $\sin x$, $\frac{1}{x}$, $\mathrm{tg} x$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg} x$ függvények páratlanok. A többi elemi függvény se nem páros, se nem páratlan.

Definíció: Minden olyan x_0 érték, amelyre az f függvény helyettesítési értéke 0, azaz $f(x)=0$, az f függvény **zérushelye**. Azaz a zérushely az f függvény x tengellyel való metszéspontjá(i)t adja meg.

Elemi függvények

Lineáris függvény



$f(x)=mx+b$, ahol b az y tengellyel való metszéspont, m a meredekség

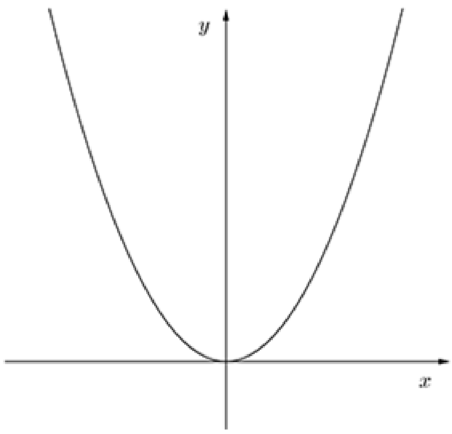
ha $m>0$, akkor szigorúan monoton nő
ha $m<0$, akkor szigorúan monoton csökken

$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}$

nincs globális szélsőérték

Hatványfüggvény



$f(x)=x^n$, n páros pozitív egész

$D_f=\mathbb{R}$

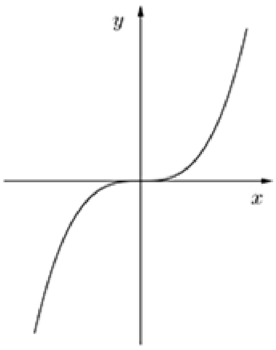
$R_f=\mathbb{R}$

szigorúan monoton csökken $x\in(-\infty,0]$ tartományon
szigorúan monoton nő $x\in[0,\infty)$ tartományon

globális minimum helye $x = 0$, értéke $y = 0$

páros függvény

Hatványfüggvény



$f(x) = x^n$, n páratlan pozitív egész

$D_f = \mathbb{R}$

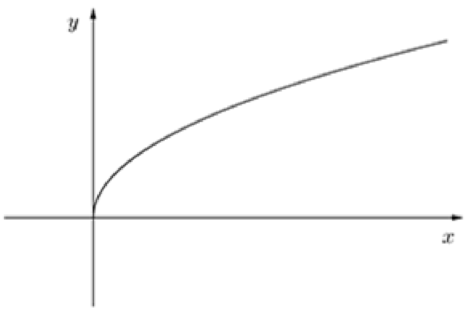
$R_f = \mathbb{R}$

szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en

nincs globális szélsőértéke

páratlan függvény

Gyökfüggvény



$f(x) = \sqrt[n]{x}$, n páros pozitív egész

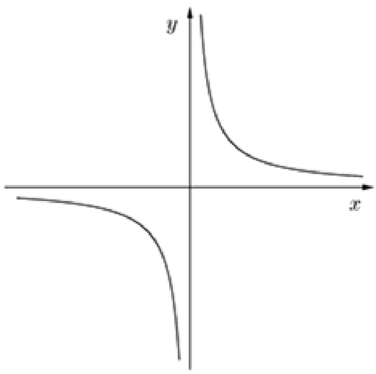
$D_f = [0,\infty)$

$R_f = [0,\infty)$

szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon

globális minimum helye $x = 0$, értéke $y = 0$

Törtfüggvény



$f(x) = \frac{1}{x^n}, n$ páratlan pozitív egész

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

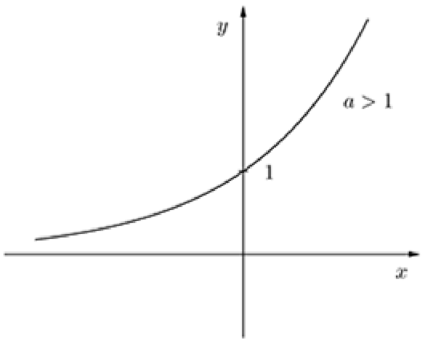
$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

szigorúan monoton csökken a $(-\infty, 0)$ és a $(0,\infty)$ tartományokon

nincs globális szélsőértéke

páratlan függvény

Exponenciális függvény



$f(x) = a^x, a > 1$

$D_f = \mathbb{R}$

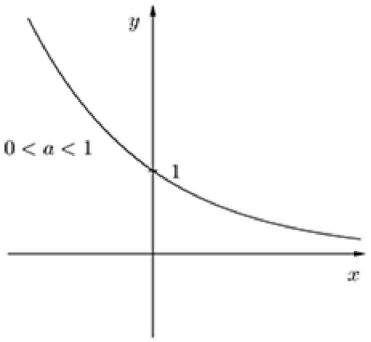
$R_f = (0,\infty)$

szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en

nincs globális szélsőértéke

Fontos kiemelni az e alapú exponenciális függvényt (más néven természetes alapú exponenciális függvény), ahol e egy irracionális szám, melynek értéke 2,7182818284..., jelölése: e^x.

Exponenciális függvény



$f(x) = a^x, 0 < a < 1$

$D_f = \mathbb{R}$

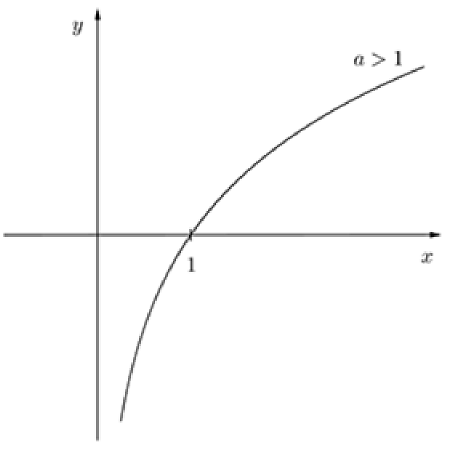
$R_f = (0,\infty)$

szigorúan monoton csökken $\mathbb{R}$-en

nincs globális szélsőértéke

Példa: radioaktív elemek felezési ideje exponenciális függvényt követ, a Föld légkörében a nyomás a magasság függvényében exponenciálisan csökken

Logaritmus függvény



$f(x) = \log_a x, a > 1$

$D_f = (0,\infty)$

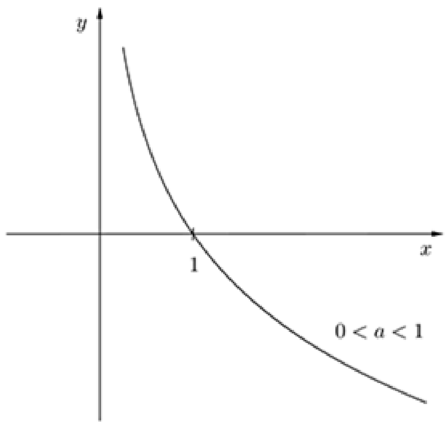
$R_f = \mathbb{R}$

szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon

nincs globális szélsőértéke

Fontos kiemelni a természetes logaritmus függvényt (más néven *e* alapú logaritmus függvény), ahol a logaritmus alapja az exponenciális függvénynél már látott e irracionális szám. Jelölése: $\ln x$ (más jelöléssel $\log_e x$)

Logaritmus függvény



$f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$

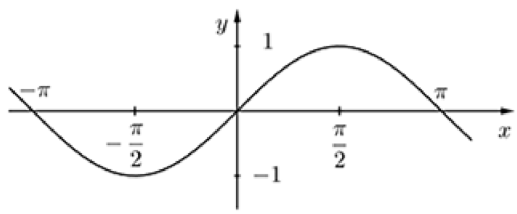
$D_f = (0,\infty)$

$R_f = \mathbb{R}$

szigorúan monoton csökken az értelmezési tartományon

nincs globális szélsőértéke

Szinusz függvény



$f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = [-1, 1]$

szigorúan monoton nő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$

szigorúan monoton csökken a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$

periodikus 2π szerint

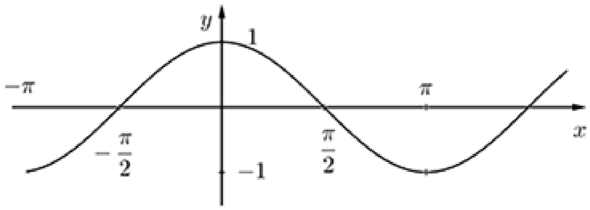
globális maximum helye $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, értéke $y = 1$

globális minimum helye $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, értéke $y = -1$

páratlan függvény

Példa: harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő grafikonja szinusz függvény

Koszinusz függvény



$f(x) = \cos x$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = [-1, 1]$

szigorúan monoton nő a $[\pi, 2\pi] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$

szigorúan monoton csökken a $[0,\pi] + k2\pi$ tartományokon, $k \in \mathbb{Z}$

periodikus 2π szerint

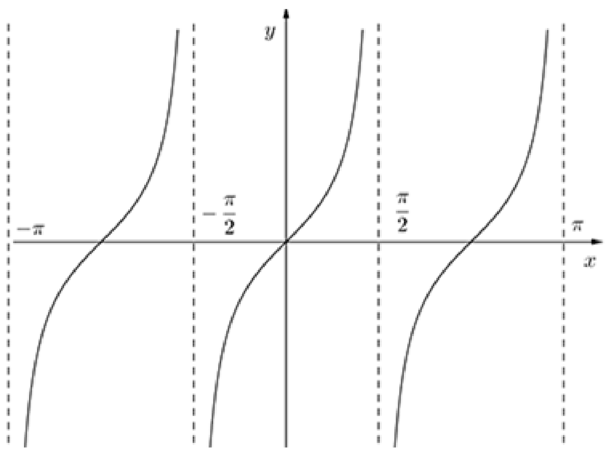
globális maximum helye $x = 0 + 2k\pi$, értéke $y = 1$

globális minimum helye $x = \pi + 2k\pi$, értéke $y = -1$

páros függvény

Példa: harmonikus rezgőmozgás sebesség-idő grafikonja koszinusz függvény

Tangensfüggvény



$f(x) = \operatorname{tg} x$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$R_f = \mathbb{R}$

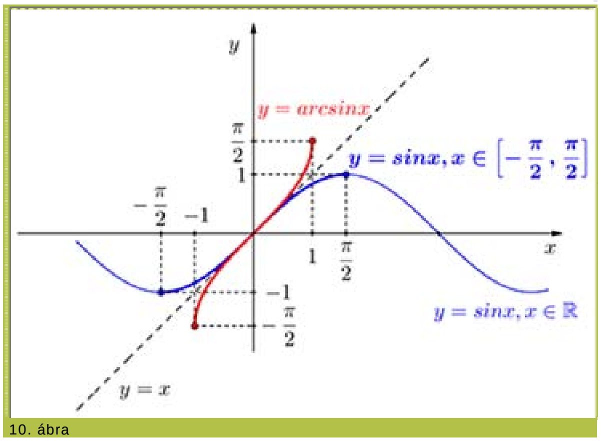
szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon

periodikus π szerint

páratlan függvény

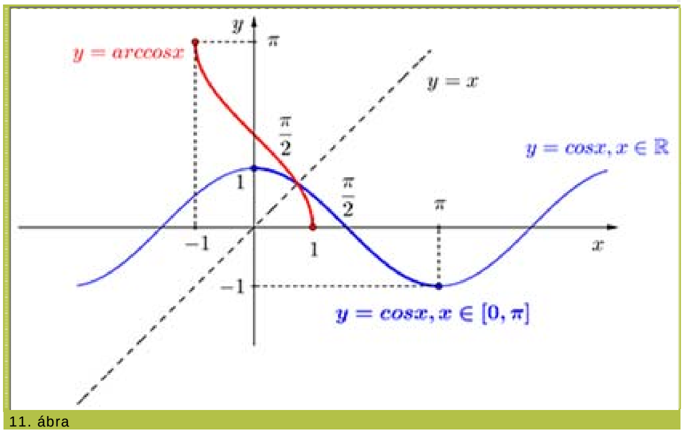
A trigonometrikus függvények periodikusak, ezért a teljes értelmezési tartományon nem invertálhatóak. Azonban a szigorúan monoton intervallumokon invertálhatóak. Az ilyen módon kapott inverz függvényeket **arkuszfüggvényeknek** (vagy ciklometrikus függvényeknek) nevezzük. Nézzük a trigonometrikus függvények értelmezési tartományának leszűkítését és invertálását ábrák segítségével (10-12. ábra). (Érdemes megfigyelni, hogy az arkuszfüggvények a trigonometrikus függvények leszűkítéséből az $y = x$ tengelyre való tükrözéssel megkaphatóak. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében az inverz fogalmának bevezetésekor.)

Arcsin$x$ függvény származtatása a sin$x$ függvényből



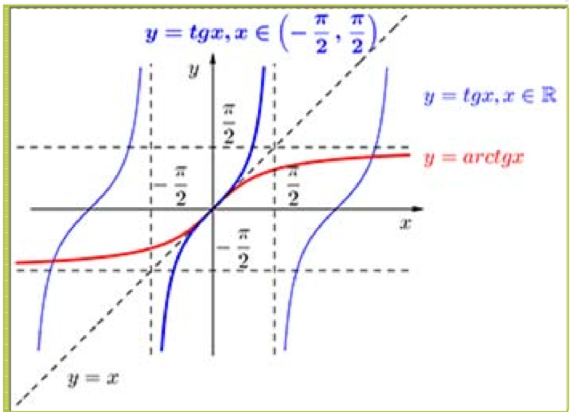
10. ábra

Arccos$x$ függvény származtatása a cos$x$ függvényből



11. ábra

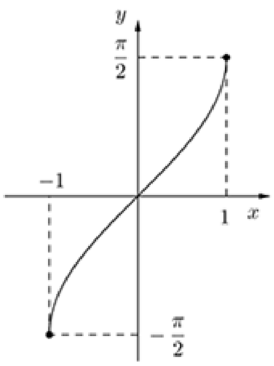
Arctg$x$ függvény származtatása a függvényből



12. ábra

Tekintsük át tulajdonságaikat.

Arkuszszinusz függvény



$f(x) = \arcsin x$

$D_f = [-1, 1]$

$R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(Érdemes megfigyelni az $\arcsin x$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és a $\sin x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete közötti összefüggést. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében.)

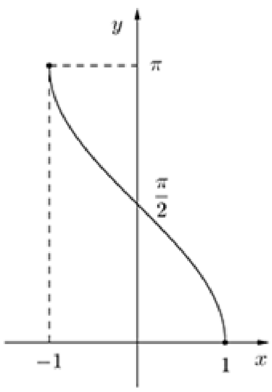
szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon

globális minimum helye $x = -1$, értéke $y = -\frac{\pi}{2}$

globális maximum helye $x = 1$, értéke $y = \frac{\pi}{2}$

páratlan függvény

Arkuszkoszinusz függvény



$f(x) = \arccos x$

$D_f = [-1, 1]$

$R_f = [0, \pi]$

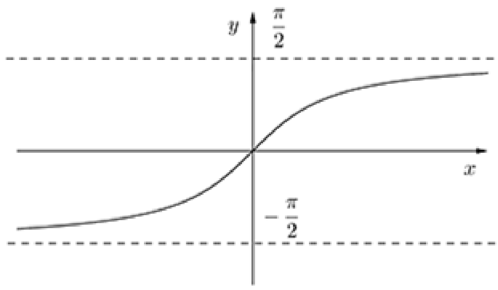
(Érdemes megfigyelni az $\arccos x$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és a $\cos x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete közötti összefüggést. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében.)

szigorúan monoton csökken az értelmezési tartományon

globális minimum helye $x = 1$, értéke $y = 0$

globális maximum helye $x = -1$, értéke $y = \pi$

Arkusztangens függvény



$f(x) = \text{arctg}x$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(Érdemes megfigyelni az $\text{arctg}x$ függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és a $\text{tg}x$ függvény értelmezési tartománya és értékkészlete közötti összefüggést. Emlékeztető a Függvénytani alapismeretek című leckében.)

szigorúan monoton nő az értelmezési tartományon

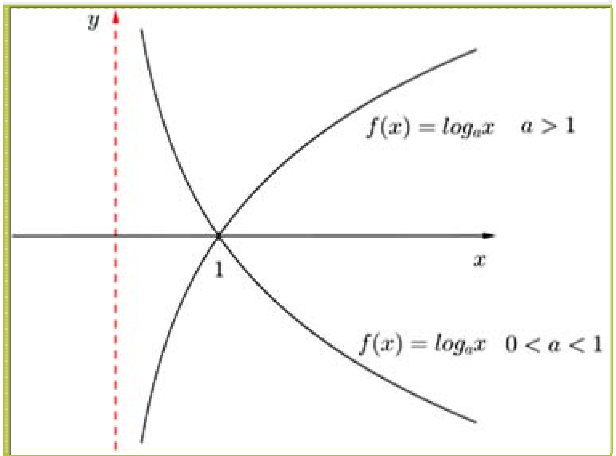
nincs globális szélsőértéke

páratlan függvény

Definíció: Az **aszimptota** egy olyan görbe, többnyire egyenes, amelyet egy függvény grafikonja tetszőlegesen megközelít (hozzásimul), de soha el nem éri.

Például: Az $f(x) = \log_a x$ függvénynek függőleges aszimptotája a $x = 0$ egyenletű egyenes (13. ábra).

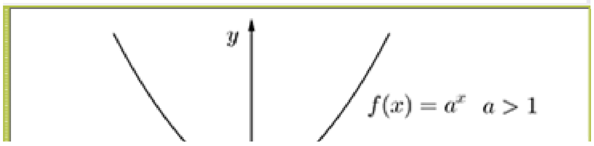
Logaritmus függvény függőleges aszimptotája

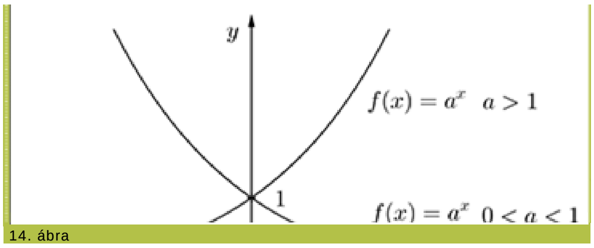


13. ábra

Az $f(x) = a^x$ függvénynek vízszintes aszimptotája az $y = 0$ egyenletű egyenes (14. ábra).

Exponenciális függvény vízszintes aszimptotája

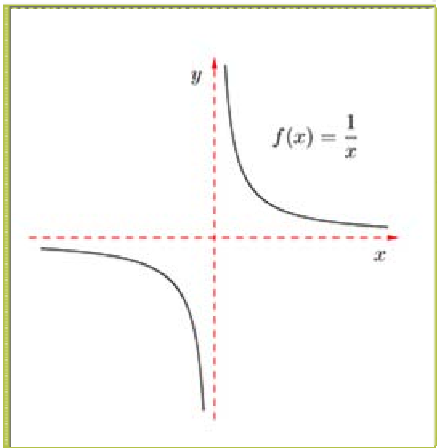




14. ábra

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek két aszimptotája van, a függőleges $x = 0$-ban, a vízszintes aszimptota $y = 0$-ban (15. ábra).

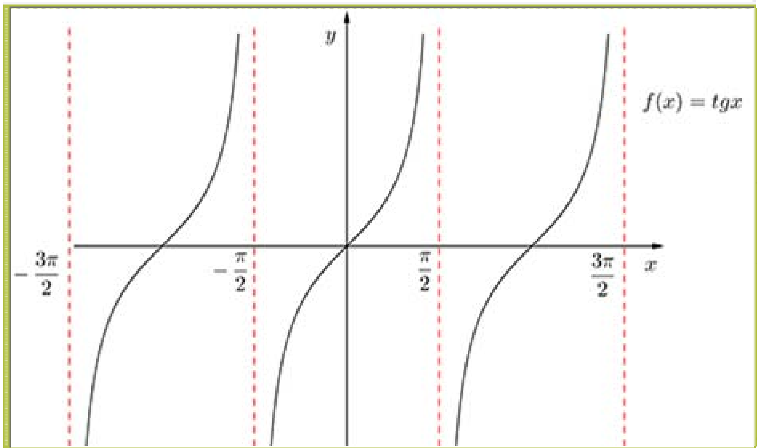
Tört függvény aszimptotái



15. ábra

Az $f(x) = \mathrm{tg}x$ függvénynek végtelen sok függőleges aszimptotája van az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ pontokban (16. ábra).

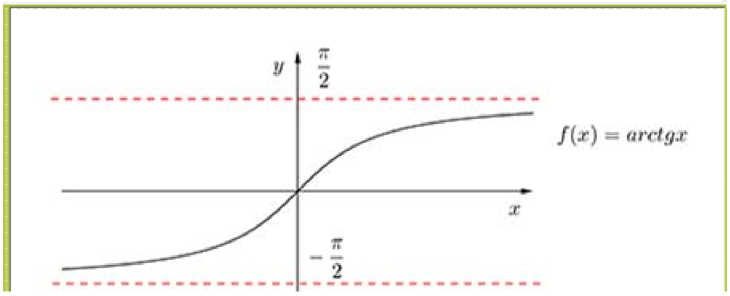
Tangens függvény függőleges aszimptotái



16. ábra

Az $f(x) = \mathrm{arctg}x$ függvénynek két vízszintes aszimptotája van $y = -\frac{\pi}{2}$ és $y = \frac{\pi}{2}$-ben (17. ábra).

Arkusztangens függvény vízszintes aszimptotái



17. ábra

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \arcsin(2x - 5)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Az $\arcsin(x)$ függvény értelmezési tartománya a $[-1,\ 1]$ intervallum, tehát az argumentumra a feltétel

$$-1 \le 2x - 5 \le 1.$$

Megoldjuk ezt a kettős egyenlőtlenséget. Az ezekre vonatkozó ekvivalens átalakítási lehetőségek hasonlóak az egyenlőtlenségekre vonatkozókhoz. Szabad például minden "oldalhoz" hozzáadni ugyanazt a számot. Ötöt hozzáadva minden "oldalhoz" azt kapjuk, hogy

$$4 \le 2x \le 6.$$

Kettővel végigosztva

$$2 \le x \le 3.$$

Így tehát

$$D_f = [2, 3].$$

2. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \arccos\left(\frac{3x-4}{2}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Most is az a feltétel, hogy

$$-1 \le \frac{3x-4}{2} \le 1.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve kapjuk, hogy

$$-2 \le 3x - 4 \le 2,$$

$$2 \le 3x \le 6,$$

$$\frac{2}{3} \le x \le 2.$$

Így végül

$$D_f = \left[\frac{2}{3},\ 2\right].$$

3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{x-1}\right)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Két kikötést kell tennünk, egyrészt a nevező, másrészt az arcsin miatt. Az osztás miatt a nevezőben $x - 1 \ne 0 \quad \Rightarrow \quad x \ne 1.$

Az arcsin miatti feltétel az, hogy

$$-1 \le \frac{2}{x-1} \le 1.$$

Mivel a nevező nem állandó előjelű, két esetet kell vizsgálni, ha pozitív és ha negatív. (A nullát már kizártuk.)

+	−

Ha $x-1>0$, vagyis $x>1$, akkor a nevezővel beszorozva az eredeti kettős egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $-(x-1)\le 2\le x-1$.	Ha $x-1<0$, vagyis $x<1$, akkor a nevezővel beszorozva az eredeti kettős egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $-(x-1)\ge 2\ge x-1$. (Ha negatív számmal szorzunk megfordulnak az egyenlőtlenségek irányai.)
Ennek megoldáshalmazát jelölje H_1.	Ennek megoldáshalmazát jelölje H_2.
Ennek a két halmaznak az uniója adja D_f-et. $D_f=H_1\cup H_2$	

Foglalkozzunk először H_1 meghatározásával.

Ekkor, az $x>1$ feltételen túl, annak kell teljesülni, hogy

$-x+1\le 2$,

azaz $x\ge -1$,

és

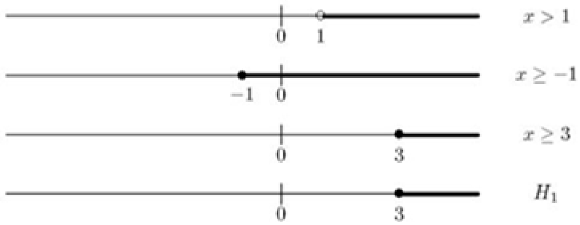
$2\le x-1$,

azaz $x\ge 3$.

Ez a három egyenlőtlenség egyszerre teljesül, ha $x\ge 3$, tehát

$H_1=[3,\infty)$.

Ezt mutatja az alábbi ábra.



H_2 esetén, az $x<1$ feltételen túl, annak kell teljesülni, hogy

$-x+1\ge 2$,

azaz $x\le -1$,

és

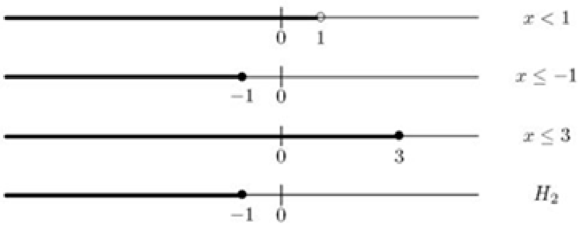
$2\ge x-1$,

azaz $x\le 3$.

Ez a három egyenlőtlenség egyszerre teljesül, ha $x<-1$, tehát

$H_2=(-\infty,\ -1)$.

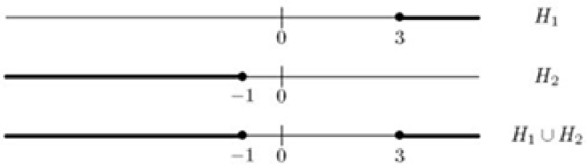
Grafikusan mindez.



Ezek alapján végül

$D_f = H_1 \cup H_2 = (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

Az unió grafikus előállítását mutatja az alábbi ábra.



4. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{\arcsin(3x) - 4}{2}$ függvény inverzét.

Megoldás: Mivel az arcsin$x$ függvény szigorúan monoton függvény az értelmezési tartományán, így van inverz függvénye. Rendezzük a következő egyenletet x-re.

$$y = \frac{\arcsin(3x) - 4}{2}$$

$$2y = \arcsin(3x) - 4$$

$$2y + 4 = \arcsin(3x)$$

Mindkét oldalnak vesszük a szinuszát:

$$\sin(2y + 4) = \sin(\arcsin(3x)).$$

Mivel az inverz függvény inverzét vesszük a jobb oldalon, így a jobb oldal:

$$\sin(2y + 4) = 3x,$$

amiből $\dfrac{\sin(2y + 4)}{3} = x$.

Felcserélve a változókat kapjuk, hogy

$$y = \frac{\sin(2x + 4)}{3},$$

amiből az inverz függvény

$$f^{-1} = \frac{\sin(2x + 4)}{3}.$$

5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = 7 - 4\mathrm{arctg}(x + 1)$ függvény inverzét.

Megoldás: Mivel az arctg$x$ függvény szigorúan monoton függvény $\mathbb{R}$-en, így van inverz függvénye. Rendezzük a következő egyenletet x-re.

$$y = 7 - 4\mathrm{arctg}(x + 1)$$

$$y - 7 = -4\mathrm{arctg}(x + 1)$$

$$\frac{y - 7}{-4} = \mathrm{arctg}(x + 1)$$

Mindkét oldalnak vesszük a tangensét:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{y - 7}{-4}\right) = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x + 1))$$

Mivel az inverz függvény inverzét vesszük a jobb oldalon, így a jobb oldal:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{y - 7}{-4}\right) = x + 1,$$

amiből $\mathrm{tg}\left(\frac{y-7}{-4}\right)-1=x$.

Felcserélve a változókat kapjuk, hogy

$$y=\mathrm{tg}\left(\frac{x-7}{-4}\right)-1,$$

amiből az inverz függvény

$$f^{-1}=\mathrm{tg}\left(\frac{x-7}{-4}\right)-1.$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Az $f(x)=\arcsin\left(\frac{2-x}{3}\right)$ értelmezési tartománya

- (x) $[-1, 5]$.
- ( ) $(-1, 5)$.
- ( ) $[1, 5]$.
- ( ) $[-5, -1]$.

mehet

2. kérdés: Az $f(x)=\arccos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ függvény értelmezési tartománya

- (x) $(-\infty, 0]\cup[2, \infty)$.
- ( ) $[0, 2]$.
- ( ) $(-2, 0)$.
- ( ) $[2, \infty)$.

mehet

3. kérdés: Mi az inverz függvénye az $f(x)=1-\frac{\arccos(4x)}{2}$ függvénynek?

- ( ) $f^{-1}=\frac{\cos(2x+2)}{4}$.
- ( ) $f^{-1}=2\cos(4x)-2$.
- (x) $f^{-1}=\frac{1}{4}\cos(2-2x)$.
- ( ) $f^{-1}=\frac{\cos(x-1)}{2}$.

mehet

4. kérdés: Az inverz függvénye az $f(x)=\mathrm{arctg}\left(1-\frac{x}{5}\right)+6$ függvénynek

- ○ $f^{-1} = 5\mathrm{tg}(x-6) - 5.$
- ○ $f^{-1} = \dfrac{\mathrm{tg}(x-6)}{5} - 1.$
- ○ $f^{-1} = \dfrac{\mathrm{tg}(x-6) - 1}{5}.$
- ◉ $f^{-1} = 5 - 5\mathrm{tg}(x-6).$

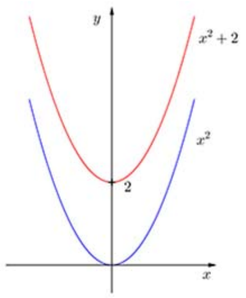
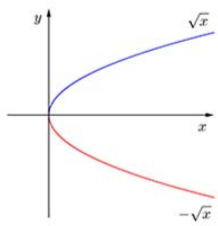
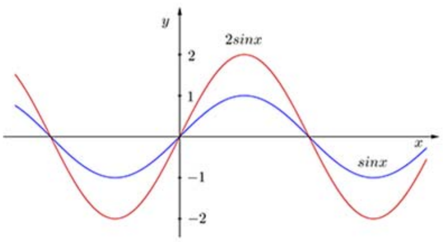
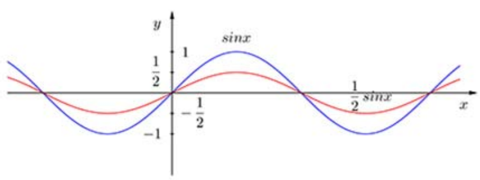
mehet

Elméleti összefoglaló

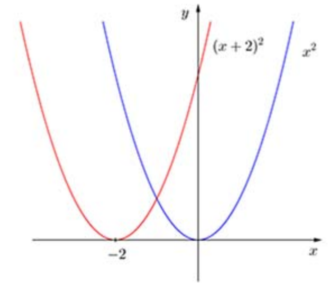
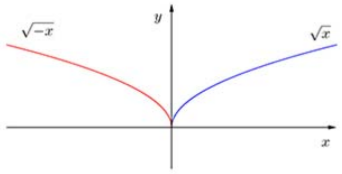
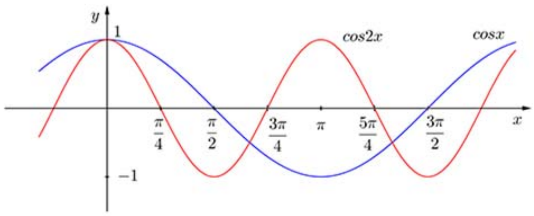
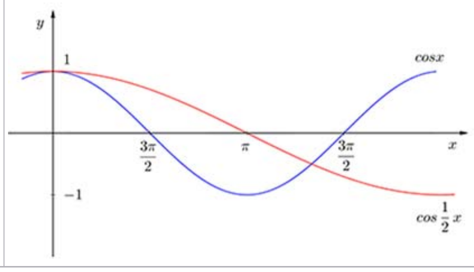
Sokszor egy-egy függvény ábráját egy már ismert elemi függvény görbéjéből eltolással, tükrözéssel, nyújtással vagy zsugorítással, azaz transzformációval kapjuk meg.

Tekintsük át a leggyakrabban előforduló függvény transzformációkat, s azok hatását a függvénygörbére.

Érték transzformáció

Transzformált függvény	Transzformáció hatása a függvénygörbére	
$f(x)+a$	eltolás a-val az y tengely irányában a előjelének megfelelően	
$-f(x)$	tükrözés x tengelyre	
$cf(x)$ $c>0$	y tengely irányú c-szeres nyújtás	
$cf(x)$ $c<0$	y tengely irányú c-szeres zsugorítás	

Változó transzformáció

Transzformált függvény	Transzformáció hatása a függvénygörbére	
$f(x+a)$	eltolás a-val x tengely mentén a előjelével ellentétes irányban	
$f(-x)$	tükrözés y tengelyre	
$f(cx)$ $c>1$	x tengely irányú $\frac{1}{c}$ szeres zsugorítás	
$f(cx)$ $0<c<1$	x tengely irányú $\frac{1}{c}$-szeres nyújtás	

Érdemes megjegyezni, hogy ha egy függvény esetében több transzformációt kell elvégezni, akkor először a változó transzformációkat, majd az érték transzformációkat kell elvégezni. A változó transzformációk az értelmezési tartományra, míg az érték transzformációk az értékkészletre hatnak, s azt változtatják meg.

Korábbi leckében láttuk, hogy a függvényekkel különféle műveleteket lehet végezni. Gyakran előfordul, hogy két függvény (f és g) összegét, különbségét, szorzatát vagy hányadosát kell ábrázolni, azaz

$$y=f(x)+g(x),\ y=f(x)-g(x),\ y=f(x)g(x),\ y=\frac{f(x)}{g(x)}$$

egyenletű görbéket. Ilyenkor az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell összeadni, kivonni, szorozni vagy osztani. Nézzünk minden műveletre egy példát. Legyen $f(x)=\sin x,\ g(x)=x.$

Általában néhány nevezetes pontban vett helyettesítési érték kiszámításával felrajzolható a jelleggörbe.

Nézzünk néhány konkrét x-re kiszámolva a helyettesítési értékeket

ha $x=0$, akkor $y=f(0)+g(0)=\sin 0+0=0$

ha $x=\frac{\pi}{2}$, akkor $y=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\approx 1+1,57\approx 2,57$

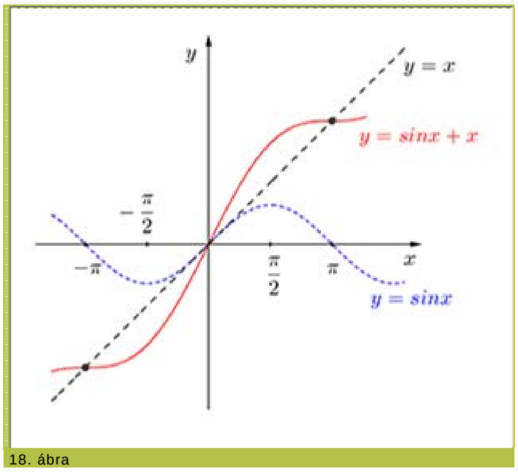
ha $x=\pi$, akkor $y=f(\pi)+g(\pi)=\sin\pi+\pi\approx 3,14$

ha $x=-\frac{\pi}{2}$, akkor $y=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)+g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\approx -2,57$

ha $x=-\pi$, akkor $y=f(-\pi)+g(-\pi)=\sin(-\pi)-\pi\approx -3,14$

Ábrázoljuk az eredeti függvényeket és a kiszámolt néhány helyettesítési érték alapján az összeg függvényt (18. ábra).

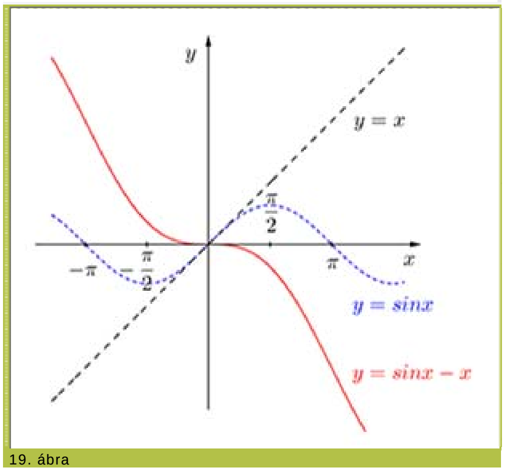
$f(x)=\sin x+x$ **függvény ábrája**



18. ábra

Hasonlóan az előző feladathoz, néhány helyettesítési érték kiszámolásával felrajzolható a jelleggörbe. A függvények különbségekor az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell kivonni egymásból (19. ábra).

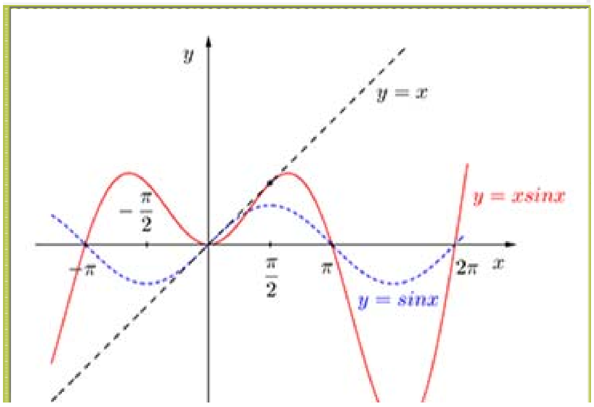
$f(x)=\sin x-x$ **függvény ábrája**



19. ábra

A függvények szorzatakor az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell összeszorozni egymással (20. ábra).

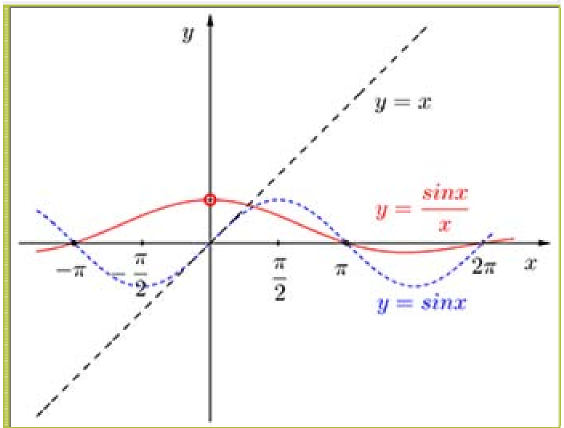
$f(x)=x\sin x$ **függvény ábrája**



20. ábra

A függvények hányadosa esetében az f és g függvények azonos x értékhez tartozó y értékeit kell egymással elosztani (21. ábra).

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ **függvény ábrája**



21. ábra

Vizsgáljuk meg az értelmezési tartományokat.

$f(x) = \sin x \; D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = x \; D_g = \mathbb{R}$

Korábban láttuk, hogy a függvényekkel végzett műveletek esetén az új értelmezési tartomány az eredeti függvények értelmezési tartományainak metszete.

Így $D_{f+g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$, s hasonlóan $D_{f-g} = \mathbb{R}$, $D_{fg} = \mathbb{R}$. A két függvény hányadosa esetében viszont a $g(x) \neq 0$, azaz $x \neq 0$. Ennek megfelelően $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mely a 21. ábrán is látható.

Két függvény szorzatára gyakorlati példa a csillapított rezgést leíró függvény. A valóságban a testek ritkán végeznek időben állandósult harmonikus rezgőmozgást, mivel a rugó által kifejtett visszatérítő erőn kívül is hat még fékező erő (ez lehet súrlódás, közegellenállás).

A csillapított rezgőmozgást leíró egyenlet megoldása nem túl nagy csillapítás esetén $\left(\beta < \omega_0\right)$

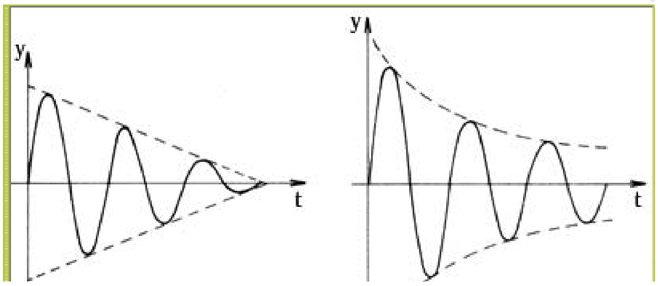
$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin\left(\omega' t + \phi_0\right),$

ahol $\beta = \frac{k}{2m}$, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, ω_0 saját-körfrekvencia, A amplitúdó, ϕ_0 kezdőfázis.

Itt egy exponenciális és egy szinusz függvény szorzata adja a csillapított rezgőmozgást leíró függvényt.

Súrlódásos csillapítás esetén az amplitúdók egy egyenesre illeszkednek, míg közegellenállásos csillapításkor a maximum kitérés az idővel exponenciálisan csökken (22. ábra).

Súrlódásos és közegellenállásos csillapítás esetében a rezgőmozgás



22. ábra

Kidolgozott példák

6. feladat: Ábrázolja az $f(x) = \dfrac{3x+1}{2}$ függvényt.

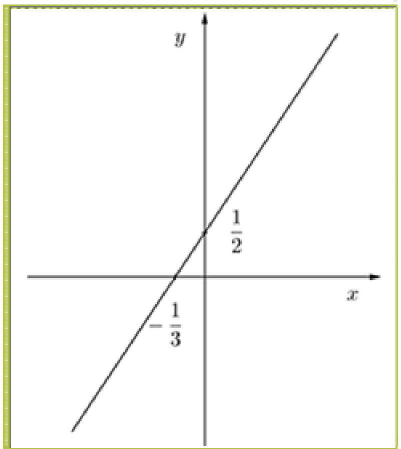
Megoldás: Függvényábrázoláskor érdemes először az értelmezési tartományt megvizsgálni a tanult módon, s az ábrázolást követően pedig ellenőrizni, hogy az ábra valóban megfelel az értelmezési tartomány miatt tett kikötéseknek. Ebben az esetben a lineáris függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tenni, a függvény a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezve van.

Az ábrázolás előtt egy átalakítást kell elvégezni

$$f(x) = \frac{3x+1}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Ebből az alakból már látható, hogy egy lineáris egyenes lesz a függvény képe. Az x együtthatója adja a meredekséget ($m = \dfrac{3}{2}$), és a konstans tag pedig, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt (y tengely menti eltolás pozitív irányba $\dfrac{1}{2}$-del). Ezek alapján a függvényt a 23. ábra mutatja.

$f(x) = \dfrac{3x+1}{2}$ **függvény ábrája**



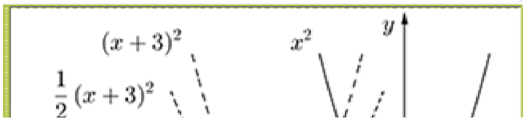
23. ábra

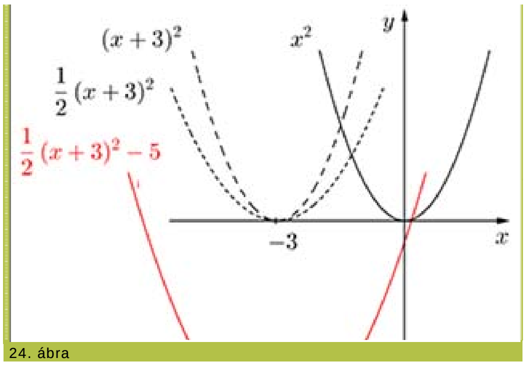
7. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+3)^2 - 5$ függvényt.

Megoldás: A másodfokú függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tenni, a függvény a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezve van. A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. x^2
2. $(x+3)^2$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 3-mal balra eltoljuk)
3. $\dfrac{1}{2}(x+3)^2$ (Az előző görbét az y tengely mentén felére zsugorítjuk)
4. $\dfrac{1}{2}(x+3)^2 - 5$ (Az előző görbét az y tengely mentén negatív irányba 5-tel eltoljuk) (24. ábra)

Függvény transzformáció több lépésben





24. ábra

8. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ függvényt.

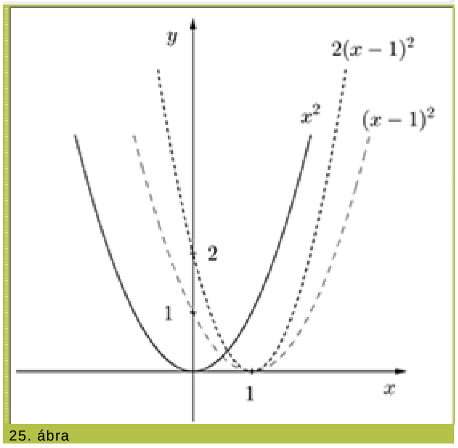
Megoldás: A másodfokú függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Ez a másodfokú függvény az előző függvény felírásától abban különbözik, hogy nem olvashatóak le róla közvetlenül a függvény transzformációs lépések (a függvényben több helyen szerepel az x változó). Ehhez először teljes négyzetté kell alakítanunk:

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 6 = -2\left(x^2 - 2x - 3\right) = -2\left((x-1)^2 - 4\right) = -2(x-1)^2 + 8$$

Ez alapján a függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

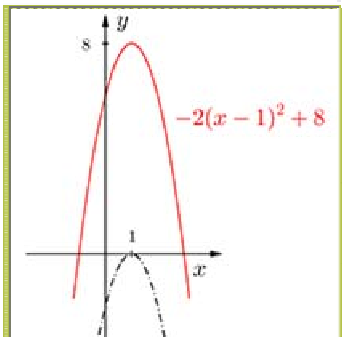
1. x^2
2. $(x-1)^2$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 1 -gyel jobbra eltoljuk)
3. $2(x-1)^2$ (Az előző görbét az y tengely mentén kétszeresére nyújtjuk)
4. $-2(x-1)^2$ (Az előző görbét az x tengelyre tükrözzük)
5. $-2(x-1)^2 + 8$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 8-cal eltoljuk) (25-26. ábra)

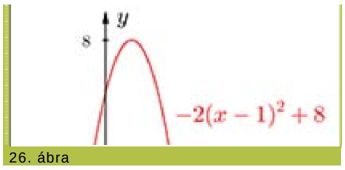
Függvény transzformáció első három lépése



25. ábra

Függvény transzformáció utolsó két lépése





26. ábra

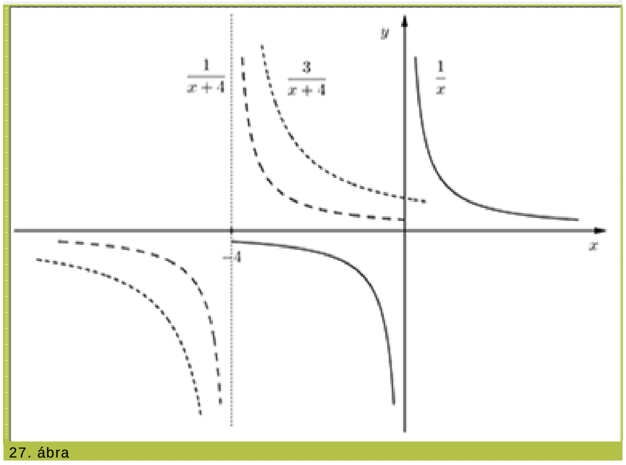
9. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x+4}$ függvényt, majd az ábráról olvassa le, hogy hol van a függvénynek aszimptotája.

Megoldás: A törtfüggvény esetében a nevezőre kikötést kell tennünk, mégpedig a nevező nem lehet 0, azaz $x + 4 \neq 0$, amiből $x \neq -4$. Tehát az értelmezési tartomány $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\dfrac{1}{x}$
2. $\dfrac{1}{x+4}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 4-gyel balra eltoljuk)
3. $\dfrac{3}{x+4}$ (Az előző görbét az y tengely mentén háromszorosára nyújtjuk)
4. $-\dfrac{3}{x+4}$ (Az előző görbét az x tengelyre tükrözzük)
5. $2 - \dfrac{3}{x+4}$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 2-vel eltoljuk) (27-28. ábra)

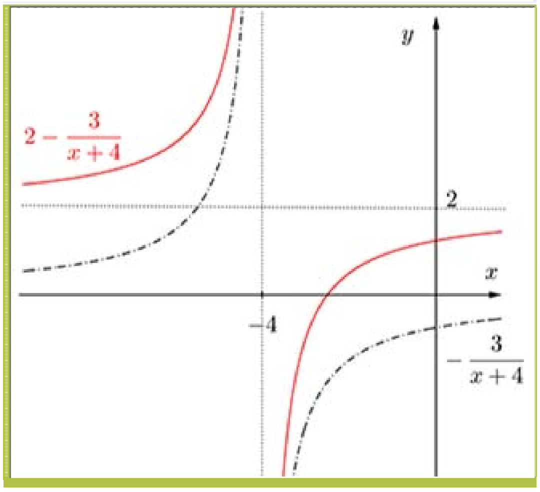
Az 28. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban nincs az $x = -4$-ben értelmezve, függőleges aszimptotája van ott. Valamint vízszintes aszimptotát látunk az $y = 2$-ben.

Függvény transzformáció első három lépése



27. ábra

Függvény transzformáció utolsó két lépése



28. ábra

10. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ függvényt.

Megoldás: A törtfüggvény esetében a nevezőre itt is kikötést kell tennünk, mégpedig a nevező nem lehet 0, azaz $x-3\neq 0$, amiből $x\neq 3$. Tehát az értelmezési tartomány $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ez a tört függvény az előző függvény felírásától abban különbözik, hogy nem olvashatóak le róla közvetlenül a függvény transzformációs lépések (a függvényben több helyen szerepel az x változó). Ehhez először a következő átalakításokra van szükség (a nevezőt kialakítjuk a számlálóban, majd egyszerűsítünk):

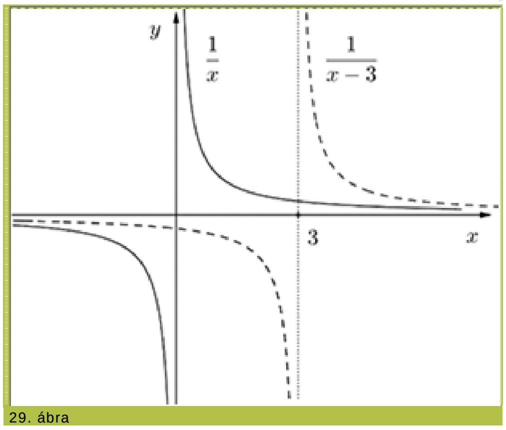
$$f(x)=\frac{x+2}{x-3}=\frac{(x-3)+5}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}+\frac{5}{x-3}=1+\frac{5}{x-3}$$

Erről a felírásból már egyértelműen leolvashatóak a függvény transzformációs lépések, melyeket a következő sorrendben érdemes elvégezni:

1. $\dfrac{1}{x}$
2. $\dfrac{1}{x-3}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén 3-mal jobbra eltoljuk)
3. $\dfrac{5}{x-3}$ (Az előző görbét az y tengely mentén ötszörösére nyújtjuk)
4. $1+\dfrac{5}{x-3}$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 1-gyel eltoljuk) (29-30. ábra)

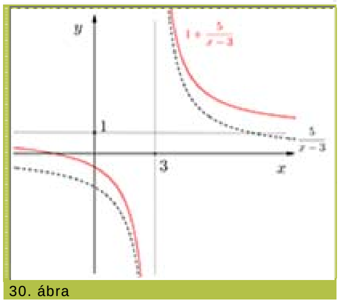
A 30. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban nincs az $x=3$-ban értelmezve, függőleges aszimptotája van ott.

Függvény transzformáció első három lépése



29. ábra

Függvény transzformáció utolsó két lépése



30. ábra

11. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x)=\dfrac{1}{3}\ln(-x)-4$ függvényt.

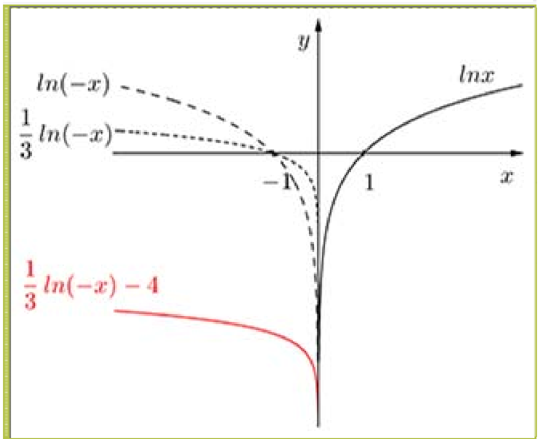
Megoldás: A logaritmus függvény argumentumára kikötést kell tennünk, mégpedig az argumentumnak 0-nál nagyobbnak kell lennie, azaz $-x > 0$, amiből $x < 0$. Tehát az értelmezési tartomány $x \in (-\infty, 0)$.

A logaritmus függvény ábrázolásakor mindig meg kell néznünk a logaritmus alapját, mert az alap határozza meg a függvény monotonitását. Itt a logaritmus alapja *e*, ami 1-nél nagyobb ($e \approx 2,71$), így a logaritmus függvény ebben az esetben szigorúan monoton növekvő lesz. A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\ln(x)$
2. $\ln(-x)$ (Az alapfüggvényt az y tengelyre tükrözzük)
3. $\frac{1}{3}\ln(-x)$ (Az előző görbét az y tengely mentén $\frac{1}{3}$-szorosára zsugorítjuk)
4. $\frac{1}{3}\ln(-x) - 4$ (Az előző görbét az y tengely mentén negatív irányba 4-gyel eltoljuk) (31. ábra)

A 31. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban csak negatív értékekre van értelmezve, s az $x = 0$-ban függőleges aszimptotája van.

Függvény transzformáció több lépésben



31. ábra

12. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x) = -5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 1$ függvényt. Hol metszi a függvény az y tengelyt?

Megoldás: Az exponenciális függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tennünk, így a függvény a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezve van.

Az exponenciális függvény esetében is hasonlóan a logaritmus függvényhez mindig meg kell vizsgálnunk az alapot, mert az alap itt is meghatározza a függvény monotonitását. Ebben az esetben az exponenciális kifejezés alapja $\frac{1}{3}$, ami 1 -nél kisebb, de 0-nál nagyobb, így az exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő lesz.

A függvényt a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén felére zsugorítjuk)
3. $5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (Az előző görbét az y tengely mentén ötszörösére nyújtjuk)
4. $-5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ (Az előző görbét az x tengelyre tükrözzük)

5. $-5\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+1$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 1 -gyel eltoljuk) (32. ábra)

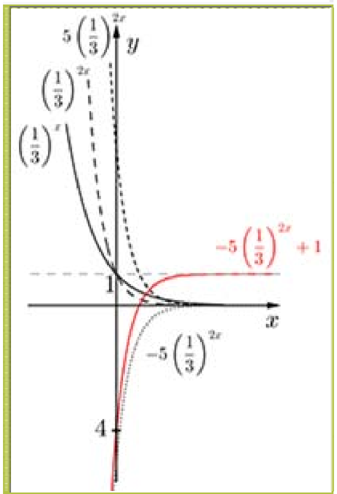
A 32. ábráról leolvasható, hogy a függvény az $y=-4$-ben metszi az y tengelyünket. (Egyszerűen végiggondolható, hogy miért. Az alapfüggvény az $y=1$-ben metszi az y tengelyt. A 2. transzformációs lépés ezt a metszéspontot nem változtatja, míg a következő lépésben az ötszörösét kell venni, azaz felkerül a metszéspont az $y=5$-be. A tükrözés során $y=-5$-be kerül, s az utolsó lépésben 1-et hozzáadva $y=-4$-et kapunk.)

Egy lépéssel kevesebbet is végezhettünk volna, ha egy hatványazonosságot alkalmazunk az ábrázolás előtt, mégpedig

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right)^{x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x}.$$

Ezzel az átalakítással a második transzformációs lépés kihagyható, s alapfüggvényként az $\left(\frac{1}{9}\right)^{x}$ kerül ábrázolásra, a többi lépés megegyezik az előzővel.

Függvény transzformáció több lépésben



32. ábra

13. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x)=\sqrt{3x+6}+5$ függvényt. Az ábráról olvassuk le a globális szélsőértéket.

Megoldás: A gyökfüggvény esetében a gyök alatti kifejezésnek nemnegatívnak kell lennie, azaz $3x+6\geq 0$, amiből $x\geq -2$. Tehát az értelmezési tartomány $x\in[-2,\infty)$.

Az ábrázolás előtt az argumentumon átalakítást kell végezni a következőképp

$$f(x)=\sqrt{3x+6}+5=\sqrt{3(x+2)}+5$$

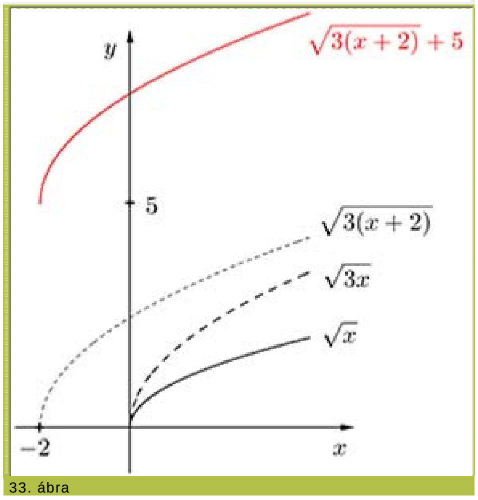
Ezt követően már leolvashatóak a függvény transzformációs lépések:

1. $\sqrt{x}$
2. $\sqrt{3x}$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén harmadára zsugorítjuk)
3. $\sqrt{3(x+2)}$ (Az előző görbét az x tengely mentén 2-vel balra eltoljuk)
4. $\sqrt{3(x+2)}+5$ (Az előző görbét az y tengely mentén pozitív irányba 5-tel eltoljuk) (16. ábra)

A 33. ábrán jól látszik, hogy a függvény valóban csak az $x\geq -2$ értékekre van értelmezve.

A 33. ábráról leolvasva a globális minimum helye $x=-2$, értéke $y=5$. (Egyszerűen végiggondolható, hogy miért. Az alapfüggvénynek az origóban van globális minimuma. Az első transzformációs lépés nem változtat ezen, a következő viszont eltolja balra 2-vel, azaz átkerül az $x=-2$, $y=0$-ba. Az utolsó transzformáció során a felfelé tolással az y értéke változik a minimumnak, így lesz a minimum helye $x=-2$, értéke $y=5$.)

Függvény transzformáció több lépésben



33. ábra

14. feladat: Ábrázolja lineáris függvény transzformációk segítségével az $f(x)=\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)-1$ függvényt.

Megoldás: A koszinusz függvény értelmezési tartományára nem kell kikötést tennünk, így az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$.

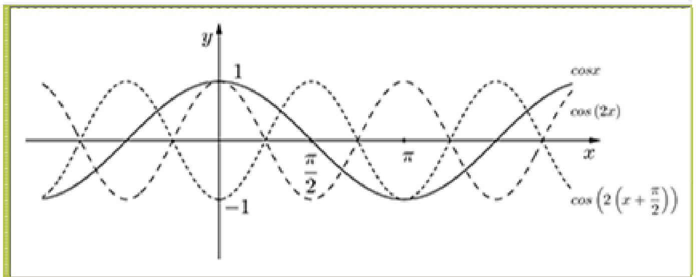
Az ábrázolás előtt itt is az argumentumon átalakítást kell végezni a következőképp

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)-1=\frac{1}{2}\cos\left(2(x+\frac{\pi}{2})\right)-1$$

A függvényt ilyen alakban már a következő transzformációs sorrendben érdemes ábrázolni:

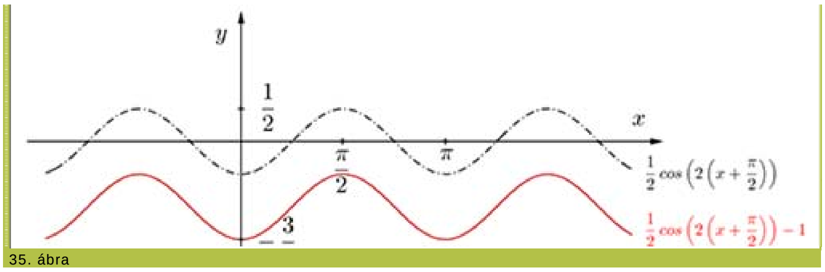
1. $\cos x$
2. $\cos 2x$ (Az alapfüggvényt az x tengely mentén felére zsugorítjuk)
3. $\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ (Az előző görbét az x tengely mentén $\frac{\pi}{2}$-vel balra eltoljuk)
4. $\frac{1}{2}\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ (Az előző görbét az y tengely mentén felére zsugorítjuk)
5. $\frac{1}{2}\cos\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)-1$ (Az előző görbét az y tengely mentén negatív irányba 1 -gyel eltoljuk) (34-35. ábra)

Függvény transzformáció első három lépése



34. ábra

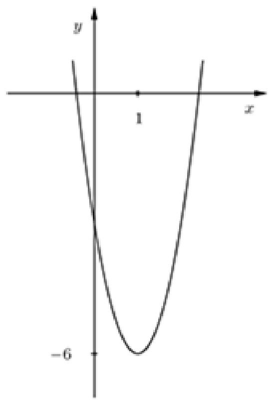
Függvény transzformáció utolsó két lépése

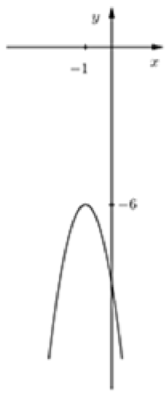


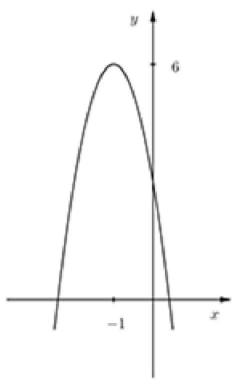
35. ábra

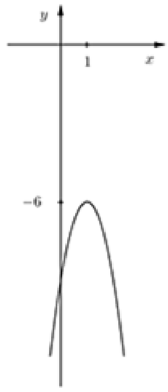
Ellenőrző kérdések

5. kérdés: Melyik ábra tartozik az $f(x) = -3x^2 + 6x - 9$ függvényhez?









mehet

6. kérdés: Hol van globális szélsőértéke az $f(x) = 4(x-5)^2 - 1$ függvénynek?

- lokális maximum helye $x = 5$, értéke $y = 1$
- lokális minimum helye $x = 5$, értéke $y = -1$
- lokális minimum helye $x = -1$, értéke $y = -5$
- lokális maximum helye $x = -1$, értéke $y = 5$

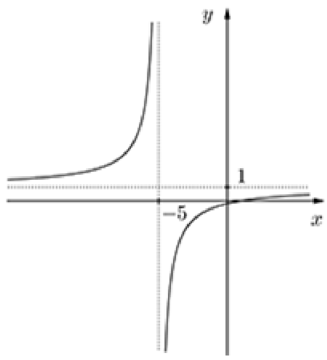
mehet

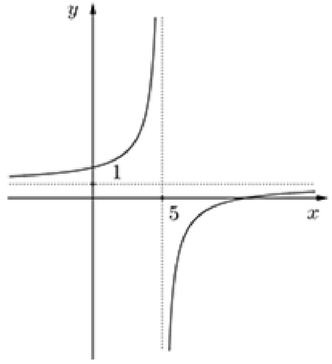
7. kérdés: Hol van aszimptotája az $f(x) = 8 + \frac{2}{x-4}$ függvénynek?

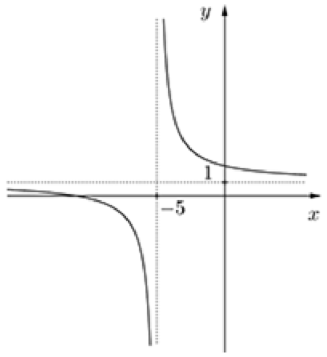
- $x = 4$-ben függőleges aszimptotája, $y = 8$-ban vízszintes aszimptotája
- $x = -4$-ben függőleges aszimptotája, $y = 8$-ban vízszintes aszimptotája
- $x = 4$-ben függőleges aszimptotája, $y = -8$-ban vízszintes aszimptotája
- $x = -4$-ben függőleges aszimptotája, $y = -8$-ban vízszintes aszimptotája

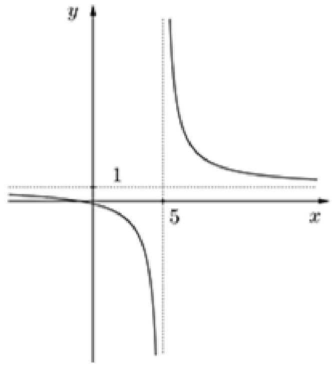
mehet

8. kérdés: Melyik ábra tartozik az $f(x) = \frac{x-1}{x+5}$ függvényhez?



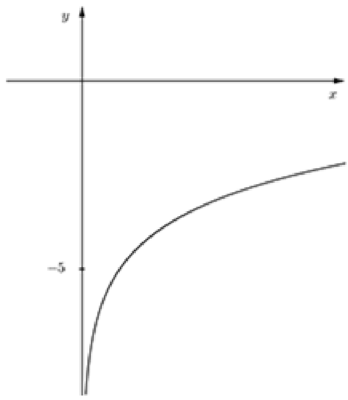


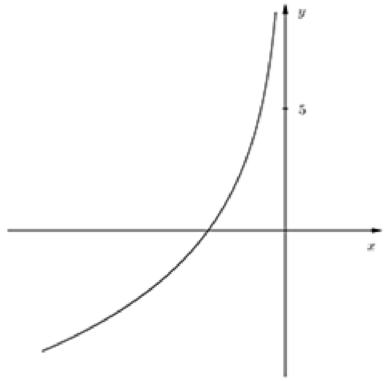


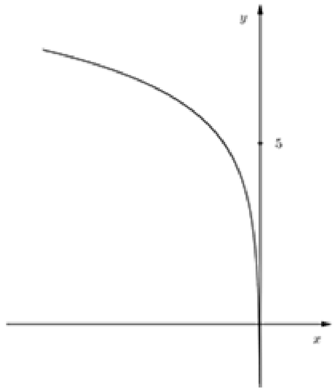


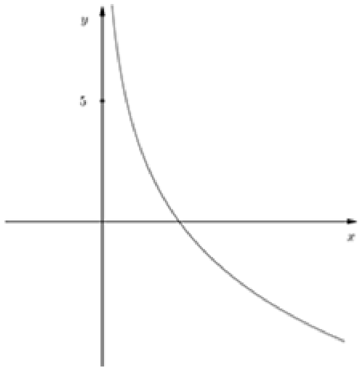
mehet

9. kérdés: Melyik ábra tartozik az $f(x) = 3\log_2(-x) + 5$ függvényhez?









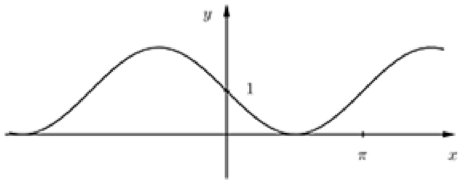
mehet

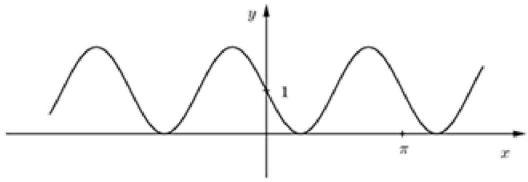
10. kérdés: Hol metszi az $f(x) = 4e^{-2x}$ függvény az y tengelyt?

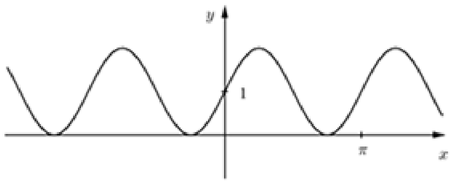
- $y = 2$
- $y = -2$
- $y = 4$
- $y = -4$

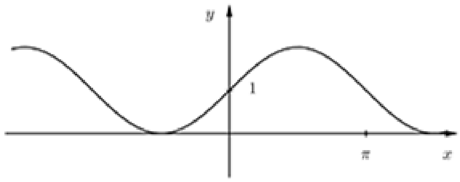
mehet

11. kérdés: Melyik ábra tartozik az $f(x) = \sin(2x - 2\pi) + 1$ függvényhez?



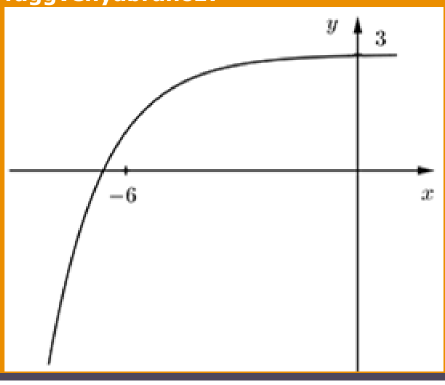






mehet

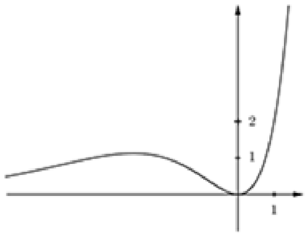
12. kérdés: Melyik hozzárendelési szabály tartozik a következő függvényábrához?

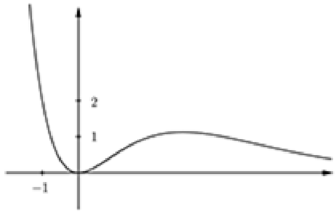


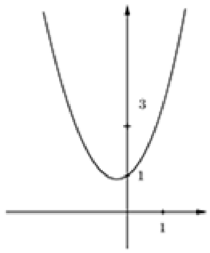
- $f(x)=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$
- $f(x)=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$
- $f(x)=3-2^{x+5}$
- $f(x)=3-2^{x-5}$

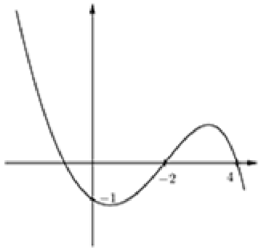
mehet

13. feladat: Melyik ábra tartozik az $f(x)=x^2-2^x$ függvényhez?



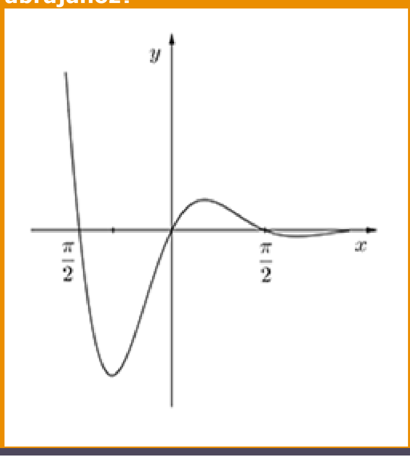






mehet

14. kérdés: Melyik hozzárendelési utasítás tartozik a következő függvény ábrájához?



- $f(x) = e^{-x}\sin 2x$
- $f(x) = e^{-x} + \sin 2x$
- $f(x) = e^{x} - \sin 2x$

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{e^x}$$

mehet