Tanulási cél: Olyan eljárás megismerése, melynek segítségével a függvények növekedés, csökkenés és szélsőérték szempontjából vizsgálhatók, valamint az eljárás alkalmazása szöveges feladatokban minimum vagy maximum keresésére.

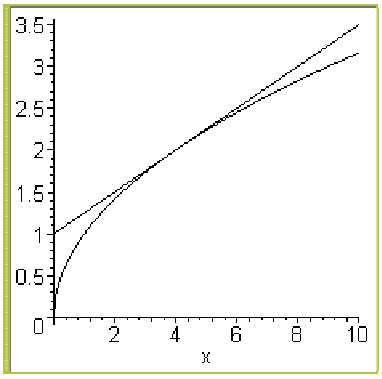
Motivációs példa

Egy telep üresjárási feszültsége U_0, belső ellenállása R_b. Mekkora R_k külső ellenállást kell a telepre kapcsolni, hogy a külső ellenállás teljesítménye P_k maximális legyen? Mekkora ez a maximális teljesítmény?

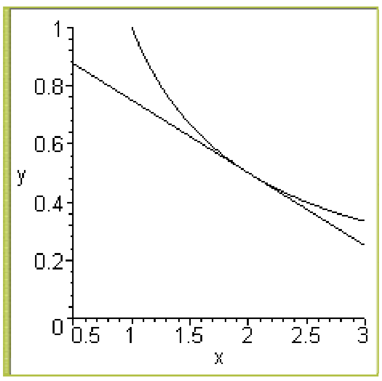
A gyakorlati életben nagyon sok ehhez hasonló problémával találkozunk, amiben valamilyen fizikai, kémia, közgazdasági mennyiségnek maximumát vagy minimumát, azaz szélsőértékét keressük, egy másik mennyiség függvényében. Jelen esetben a P_k teljesítmény függ a külső ellenállástól, azaz R_k-tól. A két mennyiség közötti kapcsolat egy függvénnyel írható le. Ha sikerül megállapítanunk, hogy ez a függvény mikor nő, és mikor csökken, akkor azt is meg tudjuk mondani, hogy hol veszi fel a legnagyobb értékét, tehát a maximumát. Az ehhez hasonló problémák megoldásához fontos számunkra, hogy a függvényeket növekedés és csökkenés, azaz monotonitás szempontjából tudjuk jellemezni. Az alábbiakban olyan módszerrel ismerkedünk meg, aminek segítségével el tudjuk dönteni, hogy egy függvény mely intervallumokon nő, és mely intervallumokon csökken, valamint hol és milyen típusú szélsőértéke van.

Elméleti összefoglaló

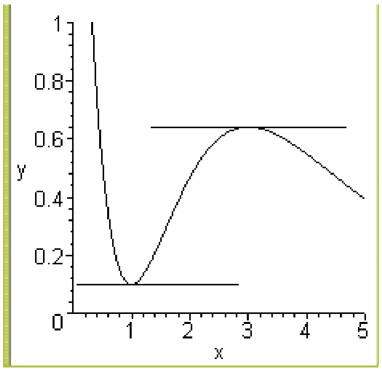
Mivel a derivált értéke minden pontban megadja a grafikon érintőjének meredekségét, ezért a derivált előjeléből következtethetünk arra, hogy hol nő és hol csökken a függvény, valamint hol van szélsőértéke. Szemléletesen ugyanis arra gondolhatunk, hogy ha egy pontban a derivált pozitív, akkor ott az érintő meredeksége pozitív, tehát az érintő úgymond felfelé halad, s mivel ő jól közelíti a függvényt, így a függvény is növekedni fog. Erre látunk példát az alábbi ábrán.



Hasonlóan okoskodhatunk akkor, ha egy pontban a derivált negatív. Ekkor az érintő nyilván lefelé halad, s ekkor a függvény csökkenni fog. Erre mutat példát az alábbi ábra.



Ha pedig egy függvénynek valahol szélsőértéke, azaz maximuma vagy minimuma van, akkor ott az érintőnek vízszintesnek kell lennie, tehát meredeksége 0, s így a derivált értéke itt 0 kell legyen. Erre láthatunk két példát is az alábbi ábrán.



Hangsúlyozzuk, hogy ez csak szemléletes okoskodás. A pontos megfogalmazás majd a most következő definíciókban és tételekben szerepel majd. Elsőként definiáljuk pontosan a lokális növekedés és csökkenés, valamint a szélsőértékek fogalmát.

Definíció: Az f függvény az $x_0 \in D_f$ helyen lokálisan növekvő, ha létezik az x_0-nak olyan környezete, amelybe eső minden $x_1 < x_0 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Az f függvény az $x_0 \in D_f$ helyen lokálisan csökkenő, ha létezik az x_0-nak olyan környezete, amelybe eső minden $x_1 < x_0 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

Definíció: Az f függvénynek az x_0 helyen helyi, másképpen lokális maximuma van, ha megadható x_0-nak olyan környezete, amelybe eső minden x esetén $f(x) \le f(x_0)$.

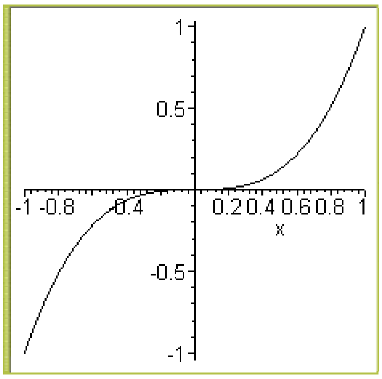
Az f függvénynek az x_0 helyen helyi, másképpen lokális minimuma van, ha megadható x_0-nak olyan környezete, amelybe eső minden x esetén $f(x) \ge f(x_0)$.

Ezek után kimondható az alábbi tétel, melyre a szemléletes okoskodással utaltunk.

Tétel: Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és $f'(x_0) > 0$, akkor a függvény az x_0 helyen lokálisan növekvő.

Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és $f'(x_0) < 0$, akkor a függvény az x_0 helyen lokálisan csökkenő.

A tétel megfordítása azonban sajnos nem igaz. Gondoljunk ugyanis az $f(x) = x^3$ függvényre, amely az $x_0 = 0$ helyen nyilván lokálisan növekvő, azonban deriváltja ott nem pozitív, hanem 0-val egyenlő. Az alábbi ábrán látható az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja, amiről teljesen egyértelmű, hogy a függvény nő az $x_0 = 0$ helyen.



Így nem egészen megfordításként, következő tétel mondható ki.

Tétel: Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és ott lokálisan növekedő, akkor $f'(x_0) \ge 0$.

Ha az f függvény az x_0 helyen differenciálható és ott lokálisan csökkenő, akkor $f'(x_0) \le 0$.

A feladatok megoldása során a lokális növekedés és csökkenés helyett, az intervallumon növekedés és csökkenés fogalmát használjuk.

Definíció: Az f függvény az $(a,\ b)$ intervallumon növekvő, ha minden $x\ \in\ (a,\ b)$ esetén lokálisan növekvő.

Az f függvény az $(a,\ b)$ intervallumon csökkenő, ha minden $x\ \in\ (a,\ b)$ esetén lokálisan csökkenő.

Ezek után feladatokban leginkább a tétel alábbi megfogalmazásra hivatkozunk.

Tétel: Ha f az $(a,\ b)$ intervallumon differenciálható és minden $x\ \in\ (a,\ b)$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f az $(a,\ b)$ intervallumon növekvő.

Ha f az $(a,\ b)$ intervallumon differenciálható és minden $x\ \in\ (a,\ b)$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f az $(a,\ b)$ intervallumon csökkenő.

A lokális szélsőértékekre is több tétel mondható ki. Az első a szélsőérték létezésének szükséges feltétele.

Tétel: Ha f differenciálható az x_0 hely valamely környeztében, és f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x) = 0$.

Gondoljunk bele, a tétel nem azt mondja ki, hogy ahol a derivált 0, ott szélsőérték van. Ez a tétel megfordítása lenne, és ez nem igaz. Példaként megint az $f(x) = x^3$ függvényt említhetjük, amelynek deriváltja az $x_0 = 0$ helyen 0-val egyenlő, de ott nincs szélsőértéke a függvénynek, mert ott lokálisan növekvő. Tehát csak annyit mondhatunk, ahol a derivált 0, ott könnyen elképzelhető, hogy van szélsőérték. Ezért van szükségünk egy másik tételre is, ami már elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.

Tétel: Ha az f függvény differenciálható az x_0 helyen és $f'\left(x_0\right) = 0$, valamint f' előjele megváltozik az x_0-ban, akkor f-nek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van.

A fenti tételek birtokában a következő módon vizsgálhatjuk majd a függvényeket növekedés, csökkenés és szélsőérték szempontjából.

1. Megvizsgáljuk, mi a legbővebb halmaz, amelyen a függvény értelmezhető.
2. Deriváljuk a függvényt.
3. Megoldjuk az $f'(x) = 0$ egyenletet. Ezzel megkapjuk azokat a helyeket, ahol szélsőérték lehet.
4. Az értelmezési tartományt a szakadási helyekkel és a derivált zérushelyeivel részekre bontjuk, s a részeken vizsgáljuk a derivált előjelét. Ezt például úgy hajtjuk végre, hogy mindegyik részből választunk egy számot, melyet a deriváltba helyettesítünk.
5. Az értelmezési tartomány egyes részein a derivált előjeléből következtetünk a növekedésre, csökkenésre.

Az utolsó két pontban leírtakat célszerű egy táblázatban összefoglalni, mert akkor tömörebben írhatjuk a dolgokat.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az $f(x) = 3x^4 - 8x^3$ függvényt.

Megoldás: A függvény minden valós számra értelmezhető, azaz $D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^3 - 24x^2 = 0$

Emeljünk ki amit csak lehet, így alakítsunk szorzattá.

$12x^2(x - 2) = 0$

Szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Két eset lesz, vagy $x^2 = 0$, amiből $x = 0$ következik, vagy $x - 2 = 0$, amiből $x = 2$ következik. A derivált zérushelyei tehát most a 0 és a 2.

Készítsünk ezután egy táblázatot. Az első sorban az értelmezési tartomány részeit tüntessük fel. A derivált zérushelyei bontják részekre a valós számok halmazát. A zérushelyeknek is készítsünk külön oszlopot, mert ezeket a helyeket kell vizsgálnunk, hogy van-e bennük szélsőérték. A második sorban majd azt jelezzük, hogy az adott részen milyen előjelű a derivált. A harmadik sorban pedig majd azt, hogy azon a részen hogyan viselkedik a függvény. Most egyelőre azonban csak az első sort töltsük ki. Így az induló táblázatunk az alábbi.

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Most vegyünk egy számot a $(-\infty,\ 0)$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a -1.

$$f'(-1) = 12(-1)^3 - 24(-1)^2 = -36$$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a $(-\infty,\ 0)$ intervallumon.

Most vegyünk egy számot a $(0, 2)$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. az 1 .

$$f'(1) = 12 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 = -12$$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a $(0, 2)$ intervallumon.

Végül vegyünk egy számot a $(2, \infty)$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a 3.

$$f'(1) = 12 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3^2 = 108$$

Pozitív számot kaptunk, tehát a derivált pozitív értékeket vesz fel a $(2, \infty)$ intervallumon.

Töltsük ki ezután a táblázat második sorát, beírva a derivált előjelét. A zérushelyeken természetesen azt írjuk be, hogy a derivált ott 0.

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$					

Ezután töltsük ki a harmadik sort is. Ahol a második sorban negatív a derivált, ott a függvény csökken, ahol pedig pozitív a derivált ott a függvény nő. Amelyik zérushelynél nem vált előjelet a derivált, ott nincs szélsőérték, de ahol megváltozik a derivált előjele ott van. Ha negatívból pozitívba vált a derivált, akkor lokális minimum van, hiszen a függvény a szélsőérték előtt csökken, azután pedig nő. Míg ha pozitívból negatívba megy át a derivált, akkor lokális maximum van, mert a függvény a szélsőérték előtt nő, utána pedig csökken.

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. ↘	nincs SZÉ. ↘	csökk. ↘	lokális minimum	nő ↗

A függvény tehát csökken a $(-\infty,\ 2)$ intervallumon, nő a $(2, \infty)$ intervallumon, és lokális minimuma van az $x = 2$ helyen.

Az $x = 0$ helyen nincs szélsőérték, mert ott nem vált előjelet a derivált, s mert a függvény előtte és utána is csökken. Ebből következik, hogy az $x = 0$ helyen is lokálisan csökkenő a függvény.

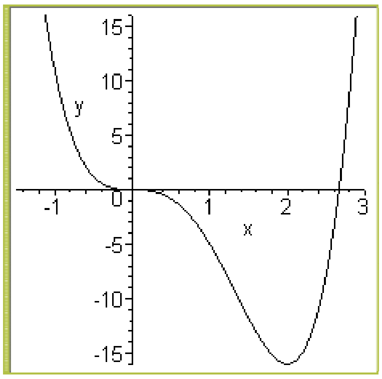
A táblázat alapján bármilyen növekedéssel, csökkenéssel és szélsőértékkel kapcsolatos kérdésre választ tudunk adni.

A szélsőérték nagyságát is megkaphatjuk, ha helyét behelyettesítjük az eredeti függvénybe. Jelen esetben tehát 2-t helyettesítünk az f-be.

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 = -16$$

A függvény minimumának értéke tehát -16.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



2. feladat: Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ függvényt.

Megoldás: A törtek miatt kikötést kell tennünk, $x \neq 0$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-1} + x^{-2}\right)' = (-1) \cdot x^{-2} + (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = 0$$

Célszerű -1-gyel szorozni, és közös nevezőre hozni. Így az alábbit kapjuk:

$$\frac{x+2}{x^3} = 0.$$

Egy tört akkor 0, ha számlálója 0. Így az $x + 2 = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $x = -2$.

A deriváltnak tehát most csak egy zérushelye van. A táblázat készítésekor azonban ne feledkezzünk meg arról, hogy 0-ban nem értelmezett a függvény. Így a 0-t is vegyük be a táblázatba ugyanúgy, mint a derivált zérushelyét. Így az induló táblázat a következő.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$				X	
$f(x)$				X	

A 0 oszlopában az X-ekkel azt jelöltük, hogy ott a függvény nincs értelmezve.

Vegyünk egy számot a $(-\infty, -2)$-ból, mondjuk a -3-at, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-3) = -\frac{1}{(-3)^2} - \frac{2}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Vegyünk egy számot a $(-2, 0)$-ból, mondjuk a -1-et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} - \frac{2}{(-1)^3} = 1$$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy számot a $(0, \infty)$-ból, mondjuk a 1 -et, s helyettesítsük a deriváltba.

$f'(1) = -\frac{1}{1^2} - \frac{2}{1^3} = -3$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Mivel -2 előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az $x = -2$ helyen a függvénynek lokális minimuma van.

Töltsük ki ezután egyből a táblázat második és harmadik sorát is.

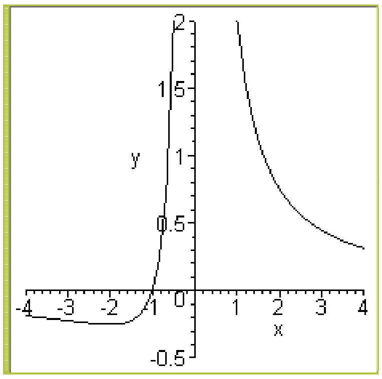
x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	neg. (−)	0	poz. (+)	X	neg. (−)
$f(x)$	csökk. ↘	lokáis minimum	nő ↗	X	csökk. ↘

A függvény tehát csökken a $(-\infty, -2)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon, nő a $(-2, 0)$ intervallumon, és lokális minimuma van az $x = -2$ helyen.

A minimum értéke $f(-2) = \frac{1}{(-2)} + \frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$.

Bár az $x = 0$ helyen megváltozik a derivált előjele, ez mégsem szélsőérték, hiszen itt a függvény nincs értelmezve.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



3. feladat: Hol növekvő az f függvény, ha deriváltja $f'(x) = (x+2)(x-5)^2$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

Megoldás: Első lépésként meg kell vizsgálnunk, mi a legbővebb halmaz, amelyen f' értelmezhető. Mivel nem kell semmilyen kikötést tennünk $D_{f'} = \mathbb{R}$, s ugyanitt értelmezhető f is.

Mivel most ismerjük a függvény deriváltját, így az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásával folytatjuk.

$(x+2)(x-5)^2 = 0$

Mivel szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így az egyenlet két egyszerűbb egyenletre bontható. Vagy $x + 2 = 0$, amiből $x = -2$, vagy $(x-5)^2 = 0$, amiből $x = 5$.

Készítsük most táblázatot, aminek első sorában feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit. Most a derivált két zérushelye a -2 és az 5 bontja részekre a valós számok halmazát.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 5)$	5	$(5, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Vegyünk egy számot a $(-\infty, -2)$-ból, mondjuk a -3-at, s helyettesítsük a deriváltba.

$f'(-3) = (-3+2)(-3-5)^2 = -64$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.

Vegyünk egy számot a $(-2, 5)$-ből, mondjuk a 0-t, s helyettesítsük a deriváltba. (Egy pozitív és egy negatív szám között mindig a 0-t célszerű választani, mert azt a legegyszerűbb helyettesíteni.)

$f'(0) = (0+2)(0-5)^2 = 50$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy számot az $(5, \infty)$-ből, mondjuk a 10-et, s helyettesítsük a deriváltba.

$f'(10) = (10+2)(10-5)^2 = 300$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Mivel -2 előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az $x = -2$ helyen a függvénynek lokális minimuma van.

Az $x = 5$ helyen nem változik a derivált előjele, és a függvény 5 előtt és után is nő, így ezen a helyen nincs szélsőérték. A függvény az $x = 5$ helyen is lokálisan nő.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 5)$	5	$(5, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. ↘	lokáis minimum	nő ↗	nincs SZÉ. ↗	nő ↗

A kész táblázat alapján már csak válaszolnunk kell a kérdésre. Látható, hogy a függvény a $(-2,\infty)$ intervallumon nő.

4. feladat: Hol csökkenő az f függvény, ha deriváltja $f'(x) = \dfrac{3-x}{x+4}$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

Megoldás: A feladat nagyon hasonlít az előzőhöz, így ugyanúgy járhatunk el. Első lépésként határozzuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. A nevező nem lehet zérus, így $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Ezután oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{3-x}{x+4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3-x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

Nézzük ezután, milyen részekre kell bontanunk az értelmezési tartományt. Az előzőekben szerepelt, hogy a derivált zérushelyei bontják részekre az értelmezési tartományt, mert általában ezeken a helyeken változik meg a derivált előjele. De nem csak zérushelyen változhat egy függvény előjele, hanem olyan helyen is, ahol nincs értelmezve. Gondoljunk pl. az $\dfrac{1}{x}$ függvényre, amely nincs értelmezve az $x = 0$ helyen. A negatív x értékekre negatív ez a függvény, a pozitív x-ekre pedig pozitív. Nincs tehát zérushely a 0-ban, hisz a függvény itt nem is értelmezett, de a függvény előjele mégis változik. Amikor készítjük a táblázatot, akkor tehát nem csak a derivált zérushelyével kell részekre bontani az értelmezési tartományt, hanem az értelmezési tartományban levő szakadási hellyel is. Készítsük el most a táblázatot, egyelőre az első sorát kitöltve. A szakadási helyen azonban a második és a harmadik sorban jelölhetjük, hogy ott a derivált nem értelmezett, így a függvényről sem tudunk semmit mondani.

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$		X			
$f(x)$		X			

Ezután vizsgáljuk meg az értelmezési tartomány részein a derivált előjelét, és ebből határozzuk meg, nő vagy csökken ott a függvény.

Vegyünk egy -4-nél kisebb számot. Legyen pl. -5, s helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(-5) = \frac{3-(-5)}{-5+4} = -8$$

Negatív értéket kaptunk, tehát $x < -4$ esetén negatív a derivált, ebből következően itt csökken a függvény.

Vegyünk egy -4 és 3 közé eső számot. Legyen pl. 0, s ezt is helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(0) = \frac{3-0}{0+4} = \frac{3}{4}$$

Pozitív értéket kaptunk, tehát ha $-4 < x < 3$, akkor pozitív a derivált, s így itt nő a függvény.

Végül vegyünk egy 3-nál nagyobb számot is. Legyen pl. 4, és helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(4) = \frac{3-4}{4+4} = -\frac{1}{8}$$

Negatív értéket kaptunk, így ha $3 < x$ akkor negatív a derivált, tehát ekkor csökken függvény.

Mivel a derivált értéke az $x = 3$ helyen előjelet vált, így ezen a helyen van lokális szélsőértéke a függvénynek. Mert a derivált pozitívból negatívba megy át, így ezen a helyen lokális maximum van.

Ezután kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	X	poz. $(+)$	0	neg. $(-)$
$f(x)$	csökk. $\searrow$	X	nő $\nearrow$	lokális maximum	csökk. $\searrow$

A kitöltött táblázat alapján válaszolhatunk a feladat kérdésére. A függvény csökken a $(-\infty, -4)$ és $(3, \infty)$ intervallumokon.

5. feladat: Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az f függvénynek, ha deriváltja $f'(x) = (x-2)^2 \ln x$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

Megoldás: Az előző feladatok megoldásából láthattuk, hogy egy függvény szélsőértékeinek meghatározásához is azokra a lépésekre van szükség, mint a növekedés és a csökkenés vizsgálatához. Így járjunk el hasonlóan, mint az előzőekben. Elsőként vizsgáljuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. Most a $\ln x$ miatt ki kell kötnünk, hogy x csak pozitív értékeket vehet fel, így $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Ezután oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$(x-2)^2 \ln x = 0$$

Arra hivatkozunk, hogy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője 0. Így az egyenletet egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

$(x-2)^2 = 0$ vagy $\ln x = 0$

Az első egyenlet megoldása nyilván $x = 2$.

A második egyenlet mindkét oldalát tekintsük úgy mint kitevőt, s az e számot emeljük fel ezen kitevőkre. Így a bal oldalon olyan kompozíciót kapunk, amiben egy függvény és inverze szerepel, így ott egyszerűen x áll.

$$\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln x} = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

A derivált zérushelyei tehát az 1 és a 2.

Ezután elkészíthetjük a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve. Figyeljünk oda, hogy az értelmezési tartomány most csak a pozitív valós számok halmaza. Így az első részben nem a $(-\infty, 1)$ intervallum áll, hanem ott a $(0, 1)$ intervallumnak kell szerepelni.

x	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$					

$f(x)$					

Ezután vizsgáljuk a derivált előjelét az egyes részeken, s ebből következtessünk a növekedésre vagy a csökkenésre.

A $(0, 1)$ intervallumban található pl. az 0.5. Helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(0.5) = (0.5 - 2)^2 \ln 0.5 \approx -1.56$$

A derivált értéke itt negatív, tehát ezen az intervallumon csökken a függvény.

Az $(1, 2)$ intervallumban található pl. az 1.5, amit behelyettesítünk a deriváltba.

$$f'(1.5) = (1.5 - 2)^2 \ln 1.5 \approx 0.101$$

A derivált értéke ezen a helyen pozitív, ebből következően ezen az intervallumon nő a függvény.

Végül a $(2, \infty)$ intervallumban van pl. az 3, amit a deriváltba helyettesítünk.

$$f'(3) = (3 - 2)^2 \ln 3 \approx 1.10$$

A derivált pozitív ezen a helyen, így itt is nő a függvény.

Az $x = 1$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt a függvénynek lokális szélsőértéke van. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.

Az $x = 2$ helyen a derivált nem vált előjelet, így ezen a helyen nincs szélsőértéke a függvénynek. Mivel előtte és utána is növekvő a függvény, így ezen a helyen is lokálisan növekvő a függvény.

Töltsük ki ezután a táblázat második és harmadik sorát is.

x	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f'(x)$	neg. $(-)$	0	poz. $(+)$	0	poz. $(+)$
$f(x)$	csökk. ↘	lokális minimum	nő ↗	nincs SZÉ. ↗	nő ↗

A függvénynek tehát csak az $x = 1$ helyen van lokális szélsőértéke, ahol lokális minimuma van.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Hol növekvő az $f(x) = 3x^4 + 12x^3$ függvény?

- A $(-\infty, -3)$ intervallumon.
- A $(-\infty, 0)$ intervallumon.
- A $(-3, \infty)$ intervallumon.
- A $(0, \infty)$ intervallumon.

mehet

2. kérdés: Hol csökkenő az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény?

- A $(-\infty, -1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon.
- A $(-\infty, -1)$ és $(0, 1)$ intervallumokon.
- A $(-1, 0)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon.

A $(-1, 0)$ és $(0, 1)$ intervallumokon.

mehet

3. kérdés: Hol növekvő az f függvény, ha deriváltja $f'(x) = (x-1)^3(x+8)$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

A $(-\infty, -8)$ és $(1,\infty)$ intervallumokon.

A $(-\infty, 1)$ intervallumon.

A $(-8,\infty)$ intervallumon.

A $(-8, 1)$ intervallumon.

mehet

4. kérdés: Hol csökkenő az f függvény, ha deriváltja $f'(x) = \dfrac{x-5}{(x+2)^2}$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

A $(-\infty, -2)$ és $(2, 5)$ intervallumokon.

A $(-\infty, 5)$ intervallumon.

A $(-2, 5)$ és $(5,\infty)$ intervallumokon.

A $(-2,\infty)$ intervallumon.

mehet

5. kérdés: Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az f függvénynek, ha deriváltja $f'(x) = (x-7)^3 \ln x$? Az f ugyanott értelmezhető ahol f'.

Az $x = 1$ és $x = 7$ helyeken lokális minimuma van.

Az $x = 1$ helyen lokális minimuma, az $x = 7$ helyen lokális maximuma van.

Az $x = 1$ és $x = 7$ helyeken lokális maximuma van.

Az $x = 1$ helyen lokális maximuma, az $x = 7$ helyen lokális minimuma van.

mehet

Elméleti összefoglaló

Az eddigiekben megismertük azt a módszert, mellyel függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából vizsgálni tudunk. Most foglalkozzunk azzal, hogyan tudjuk alkalmazni ezt a módszert a lecke elején vázolt problémákhoz hasonló esetekben, melyeket szöveges szélsőérték feladatoknak nevezhetünk. Az ilyen feladatokban első lépésként fel kell írnunk, egy általunk választott független változó függvényében azt a mennyiséget, aminek a szélsőértékét keressük. Ezután meg kell határozni a feladat feltételeiből, hogy a független változó milyen értékeket vehet fel. Az így kapott, szöveg szerinti értelmezési tartományon kell aztán megkeresnünk a függvény szélsőértékeit a korábban megismert módon. A módszerrel az alábbi kidolgozott feladatokon keresztül ismerkedünk meg. Megoldjuk majd a lecke elején vázolt problémát is, de előbb egyszerűbb feladatokkal foglalkozunk.

Kidolgozott feladatok

6. feladat: Mekkorának kell választani egy 20 cm kerületű téglalap oldalait, hogy területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?

Megoldás: Jelöljük a téglalap egyik oldalát x-szel, a másikat pedig y-nal.

Ekkor a téglalap területe: $T = xy$.

Így felírva a területet, két változó mennyiség szerepel. Azonban a két változó között kapcsolat van, hiszen a kerület 20 cm. Írjuk fel a kerületet az oldalakkal.

$K = 20 = 2x + 2y$

Ebből az összefüggésből az egyik változó, pl. y kifejezhető.

$y = 10 - x$

Ha pedig ezután behelyettesítünk y helyére a területet leíró összefüggésben, akkor már egyváltozós függvényt kapunk. Ekkor már jelölhetjük azt is, hogy a terület az x változó függvénye.

$T(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

Ezzel olyan függvényt kaptunk, ami a terület változását írja le az egyik oldal függvényében.

Határozzuk meg ezután, hogy milyen határok között vehet fel értékeket a változó. Nyilvánvaló, hogy az $x > 0$ feltételnek teljesülni kell, hiszen egy téglalap oldala csak pozitív lehet. Az x-nek azonban 10 -nél kisebbnek is kell lennie, hiszen a téglalap másik oldala

$10 - x$, és ennek is pozitívnak kell lenni. Így a változóra a $0 < x < 10$ feltételt kapjuk. Ezen a halmazon kell keresnünk a fenti $T(x)$ függvény maximumát. Ehhez állítsuk elő a függvény deriváltját.

$T'(x) = 10 - 2x$

Megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet.

$10 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$

A deriváltnak a zérushelye a $(0, 10)$ intervallumba esik, így szóba jöhet, mint lehetséges maximum hely. Annak eldöntésére, hogy az $x = 5$ helyen valóban maximuma van-e a területnek, célszerű elkészíteni a szokásos táblázatot.

Az első sor kitöltésekor vegyük figyelembe a $0 < x < 10$ feltételt.

A derivált előjelének vizsgálatát immár nem részletezzük, mert nyilvánvaló, hogy melyik intervallumon pozitív ill. negatív a derivált.

x	$(0, 5)$	5	$(5, 10)$
$T'(x)$	+	0	–
$T(x)$	↗	lok. max.	↘

Az $x = 5$ helyen tehát lokális maximuma van a függvénynek. Sőt ez a $0 < x < 10$ feltétel mellett nem csak lokális maximum, hanem ezen a halmazon ez globális maximum is, hiszen $x < 5$ esetén végig nő a függvény, $x > 5$ esetén pedig végig csökken.

A terület tehát akkor lesz maximális, ha az egyik oldal 5 cm hosszúságú. Persze ekkor a másik oldal hossza is 5 cm, azaz a téglalap ekkor négyzet.

A maximális területet kell még meghatároznunk. Helyettesítsük be a maximum helyét a függvénybe.

$T_{max} = T(5) = 5(10 - 5) = 25$

A terület maximumának értéke tehát 25 cm^2.

Megjegyzés: Az ilyen feladatokban nem egyértelmű, hogy mit lesz majd a legjobb független változónak tekinteni. Jelen feladatban elég egyértelmű volt, hogy a téglalap egyik oldalát célszerű választani, de eljárhattunk volna más módon is. Mivel a két oldal összege 10, így az egyik oldal ugyanannyival rövidebb 5-nél, mint amennyivel a másik hosszabb 5-nél. Választhattuk volna változónak ezt a mennyiséget is, amivel az oldalak az 5-től eltérnek. Természetesen ekkor másik függvény írja le területet, és más a szöveg szerinti értelmezési tartomány is. Ennek megmutatása végett megoldjuk most a feladatot másik módon is.

Jelölje a téglalap két oldalát a és b. Tegyük fel, hogy a a nem rövidebb oldal, b pedig a nem hosszabb oldal, azaz $a \geq b$.

Jelölje x az oldalak hosszának 5-től való eltérését.

Ekkor $a = 5 + x$, $b = 5 - x$.

A téglalap terület: $T = ab$, amibe behelyettesítve a fentieket, egy függvényt kapunk, aminek változója x lesz.

$T(x) = (5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$

Ne feledkezzünk el annak vizsgálatáról, hogy a szöveg milyen értékeket enged meg a változóra. Jelen esetben $0 \leq x$, hiszen egy eltérés nem lehet negatív, $x < 5$, mert a b oldalnak, azaz $5 - x$-nek is pozitívnak kell lenni. Ez együttesen $0 \leq x < 5$, vagy $x \in [0, 5)$ formában írható. Amint látható, most olyan intervallumon keressük a maximumot, aminek egyik vége zárt, másik vége nyitott.

Vegyük a területfüggvény deriváltját.

$T'(x) = -2x$

Itt kell felhívnunk azonban a figyelmet arra, hogy a derivált csak a T függvény értelmezési tartományának belső pontjaiban értelmezhető, így a derivált esetén már $0 < x < 5$, azaz $x \in (0, 5)$.

Ha megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet, ami $-2x = 0$, akkor abból $x = 0$ következik.

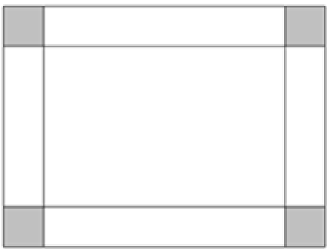
Ez azonban nem eleme T' értelmezési tartományának. Ennek ellenére olyan érzésünk támadhat, hogy ha van szélsőérték, akkor az most csak az $x = 0$ esetén lehet. Ennek igazolására készítsünk táblázatot. Az $x = 0$ értéket kezeljük külön, és itt a derivált sorában azt tüntetjük fel, hogy az nem értelmezett.

x	0	$(0, 5)$
$T'(x)$	nem értelmezett	neg.$(-)$
$T(x)$	maximum	$\searrow$

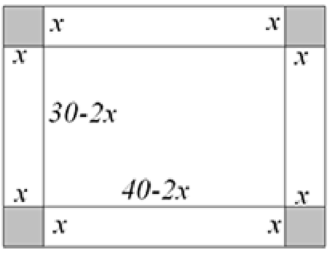
A táblázatból leolvasható, hogy a függvény végig csökken, s ebből következően a maximumát az értelmezési tartomány alsó határán, azaz $x = 0$ esetén veszi fel. Megkaptuk tehát most is, hogy akkor van szélsőérték, ha a téglalap négyzet.

Megjegyezzük, hogy ha a második megoldásunk során nem éltünk volna az $a \geq b$ feltevéssel, akkor x negatív értékeket is felvehetett volna. Ekkor egyrészt a $-5 < x$ feltételnek kellett volna teljesülni amiatt, hogy az a oldalnak, azaz $x + 5$-nek pozitívnak kell lenni. Másrészt az $x < 5$ feltételnek kell fennállni, mert a b oldalnak, azaz $5 - x$-nek pozitívnak kell lenni. A kettőből együttesen kapjuk, hogy $-5 < x < 5$, azaz $x \in (-5, 5)$. Ekkor ugyanúgy az értelmezési tartomány belső pontjában kapjuk a szélsőértéket, mint az első megoldásunkban. A fentiekből jól látható, hogy a független változó megválasztása nagyban befolyásolja a feladat megoldásának további részét. Arra is felhívjuk a figyelmet, hogy a szélsőértéket nagyon sok esetben a derivált alkalmazása nélkül is meghatározhatjuk. Ha például a második megoldásunkban kapott területet leíró függvényt $T(x) = 25 - x^2$ vizsgáljuk, akkor egyértelműen $x = 0$ esetén van maximuma a függvénynek. Ennek oka, hogy egy konstansból vonunk x^2-et, aminek legkisebb értéke a 0, az $x = 0$ esetben. Így amikor x^2 a legkisebb, akkor lesz $25 - x^2$ a legnagyobb. Sok esetben viszont nem találunk ilyen elemi megoldást, s így ilyenkor nem tudjuk elkerülni a derivált alkalmazását.

7. feladat: Egy téglalap alakú lemezből, melynek oldalai 30 cm és 40 cm hosszúak, mindegyik sarkánál négyzet alakú darabokat vágunk ki az ábrán látható módon. A megmaradt lemez füleit felhajtjuk, és az éleket összehegesztve felül nyitott téglatest alakú dobozt kapunk. Mekkorának válasszuk a kivágott négyzetek oldalát, ha azt szeretnénk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?



Megoldás: Jelöljük a kivágott kis négyzetek oldalát x-szel, és tekintsük az alábbi ábrát.



Ezen láthatjuk, hogy dobozunk alapja egy $30-2x$, és $40-2x$ oldalú téglalap, magassága pedig x. Téglatest térfogata a három oldal szorzatából kapható, így felírhatjuk a doboz térfogatát az x változó függvényében.

$$V(x) = (30-2x)(40-2x)x = 1200x - 140x^2 + 4x^3$$

Határozzuk meg, hogy milyen intervallumon belül mozoghat x értéke. Egyrészt nyilván $0 < x$, másrészt $x < 15$, mert a doboz alapjának rövidebb oldala, azaz $30-2x$ pozitív kell legyen. A függvényünk szöveg szerinti értelmezési tartománya tehát $0 < x < 15$, azaz $x \in (0, 15)$. A szélsőértéket csak ezen a halmazon keressük.

Deriváljuk a függvényt.

$$V'(x) = 1200 - 280x + 12x^2$$

Oldjuk meg a $V'(x) = 0$ egyenletet.

$$1200 - 280x + 12x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 70x + 300 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet, melynek gyökei az alábbiak.

$$x_{1,2} = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4\cdot 3\cdot 300}}{2\cdot 3} = \frac{70 \pm \sqrt{1300}}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{35+\sqrt{325}}{3} = \dfrac{35+5\sqrt{13}}{3} \approx 17.68 \\ x_2 = \dfrac{35-\sqrt{325}}{3} = \dfrac{35-5\sqrt{13}}{3} \approx 5.66 \end{cases}$$

A két megoldás közül csak $x_2 = \dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}$ esik a $(0, 15)$ intervallumba ezt kell vizsgálni.

Készítsük el a szokásos táblázatot.

x	$\left(0, \dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}\right)$	$\dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}$	$\left(\dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}, 15\right)$
$V'(x)$	+	0	–
$V(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A $V'(x)$ sorában az előjeleket például a következő módon kaphattuk meg. Választunk egy számot a $\left(0, \dfrac{35-5\sqrt{13}}{3}\right)$ intervallumból, mondjuk az 1 -et, mert azzal könnyű lesz számolni. Ezt behelyettesítjük $V'(x)$-be.

$V'(1) = 1200 - 280 \cdot 1 + 12 \cdot 1^2 = 932 > 0$

Hasonlóan választunk egy számot a $\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{3},\ 15\right)$ intervallumból. Legyen ez mondjuk a 10, mert ezzel is könnyű lesz számolni.

$V'(10) = 1200 - 280 \cdot 10 + 12 \cdot 10^2 = -2800 < 0$

Ezután már kijelenthetjük, hogy az $x = \frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ helyen lokális maximuma van a $V(x)$ függvénynek. A $(0, 15)$ intervallumon ez nem csak lokális, hanem globális maximum is, hiszen $x = \frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ előtt végig nő a függvény, $x = \frac{35-5\sqrt{13}}{3}$ után pedig végig csökken.

8. feladat: Két pozitív szám szorzata 100. Melyik ez a két szám, ha összegük minimális? Mekkora a minimális összeg?

Megoldás: Legyen a két szám x és y. Tudjuk, hogy $xy = 100$. Fejezzük ki ebből y-t.

$$y = \frac{100}{x}$$

Írjuk a két szám összegét ezután x függvényeként.

$$f(x) = x + \frac{100}{x}$$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a minimumát a $(0, \infty)$ intervallumon.

Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x) = \left(x + \frac{100}{x}\right)' = \left(x + 100x^{-1}\right)' = 1 + 100(-1)x^{-2} = 1 - \frac{100}{x^2}$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$1 - \frac{100}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 10$$

Minimum szempontjából nyilván csak az $x = 10$ esettel kell foglalkoznunk, hiszen most $x > 0$.

Készítsük el a már jól ismert táblázatot.

x	$(0, 10)$	10	$(10, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

Az $f'(x)$ sorában az előjeleket például $x = 1$ és $x = 100$ deriváltba történő helyettesítésével kaphatjuk.

$$f'(1) = 1 - \frac{100}{1^2} = -99 < 0$$

$$f'(100) = 1 - \frac{100}{100^2} = 0.99 > 0$$

Amint látható, a függvénynek az $x = 10$ helyen lokális minimuma van, ami pozitív x-ekre egyben globális minimum is.

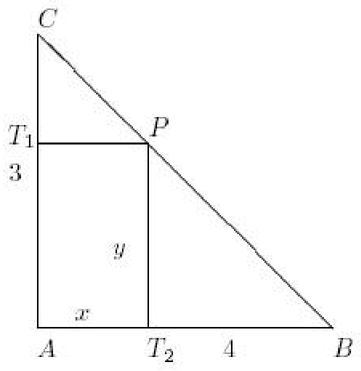
Határozzuk meg ezután a másik számot, tehát y-t is.

$$y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10} = 10$$

Az összeg tehát akkor lesz minimális, ha mindkét szám 10. Ekkor az összegük 20, ez a minimális összeg.

9. feladat: Adott egy 3 és 4 egység befogójú derékszögű háromszög. Tekintsük azokat a háromszögbe írható téglalapokat, amelyeknek egyik csúcsa a háromszög derékszöge, az ezzel szemközti csúcs pedig az átfogóra esik. A legnagyobb területű ilyen téglalapnak mekkorák az oldalai?

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a háromszögről és a belé írt téglalapról.



A téglalap x-szel és y-nal jelölt oldala között most hasonlóság alapján lehet összefüggést találni. A PT_2B és CAB derékszögű háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{y}{4-x}=\frac{3}{4}$$

Rendezzük ezt y-ra.

$$y=\frac{3}{4}(4-x)=3-\frac{3}{4}x$$

Ezt felhasználva felírhatjuk a téglalap területét az x függvényében.

$$T(x)=x\left(3-\frac{3}{4}x\right)=3x-\frac{3}{4}x^2$$

Az x változó most nyilván a $(0,4)$ intervallumba esik, így ezen a halmazon keressük a függvény maximumát.

Deriváljuk a függvényt.

$$T'(x)=3-\frac{3}{2}x$$

Megoldjuk a $T'(x)=0$ egyenletet.

$$3-\frac{3}{2}x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$$

A szokásos táblázat segítségével megvizsgáljuk, hogy ezen a helyen valóban van-e maximuma a függvénynek.

x	$(0,2)$	2	$(2,4)$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

A második sorban T' előjelét például $x=1$ és $x=3$ helyettesítésével vizsgálhattuk.

$$T'(1)=3-\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}>0$$

$T'(3) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2} < 0$

Amint látható, az $x = 2$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami egyben globális maximum is.

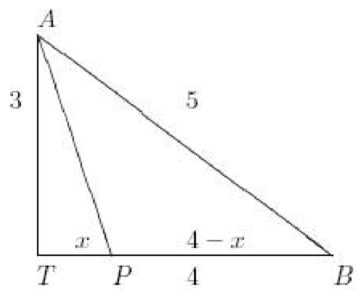
Már csak a téglalap másik oldalát kell kiszámolnunk.

$y = 3 - \frac{3}{4}x = 3 - \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

A maximális területű téglalap oldalai tehát 2 és $\frac{3}{2}$ hosszúságúak.

10. feladat: Egy ember 3 km-re van egy csónakban az egyenes tóparttól. Egy parton elhelyezkedő, tőle 5 km távolságban lévő helyre akar a lehető legrövidebb idő alatt eljutni. Evezni $v_1 = 3$ km/h, gyalogolni $v_2 = 6$ km/h sebességgel tud. Mennyi az a legrövidebb idő, ami alatt eljuthat a céljába?

Megoldás: Készítsünk egy ábrát!



Az ember helyét a csónakkal a tavon A jelöli, az egyenes tópart a T és B pontok által meghatározott egyenes, melynek B pontjába szeretne emberünk eljutni. Egy lehetőség a

B pontba jutásra, hogy emberünk az AB szakasz mentén egyenes odaevez B-be. De valószínűleg nem ez lesz időben a legrövidebb. Mivel a parton gyorsabban halad mint a vízen, várhatóan jobban jár, ha a partnak valamilyen közelebbi P pontjáig evez, majd onnan gyalog folytatja az utat. A partra érkezés helye, azaz a P pont a legrövidebb idő esetén nyilvánvalóan a T és B pontok közé esik.

Válasszuk független változónak a P pont T-től való távolságát, és jelöljük ezt x-szel. Próbáljuk meg ezzel kifejezni az A pontból B pontba jutás idejét.

Elsőként határozzuk meg a TB szakasz hosszát. Ez a Pitagorasz-tétel alapján nyilván 4 km. (A 3, 4, 5 a legismertebb pitagoraszi számhármas.)

Bontsuk az utat két szakaszra, első az evezés, a második a gyaloglás.

Az első szakasz hosszát ismét a Pitagorasz-tételből kapjuk, amit az ATP derékszögű háromszögben az AP átfogóra írunk fel. AP hosszát jelölje s_1.

$s_1 = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}$

Az ennek megtételéhez szükséges időt, amit jelöljünk t_1-gyel, megkapjuk, ha ezt osztjuk az evezés sebességével.

$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$

Ezzel órában mérve kapjuk meg AP szakaszon végigevezés idejét.

Most nézzük az út második szakaszát. Az itt megtett távolság a PB szakasz hossza, amit jelöljön s_2, nyilván $4 - x$ km. Az ennek megtételéhez szükséges időt jelölje t_2. Az út gyalogos részének megtételéhez szükséges idő is az út és sebesség hányadosként kapható, de nyilván most a gyaloglás sebességével kell osztanunk.

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4-x}{6}$$

A két időt összeadva felírhatjuk a teljes út megtételéhez szükséges időt az x változó függvényében.

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{4-x}{6}$$

Ennek a függvénynek keressük a minimumát a $0 \le x < 4$ halmazon.

Állítsuk elő a függvény deriváltját.

$$t'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{4-x}{6}\right)' = \left(\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6}x\right)' =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(x^2+9\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{6}$$

Megoldjuk $t'(x) = 0$ egyenletet.

$$\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{6} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \sqrt{x^2+9} \quad \Rightarrow$$
$$4x^2 = x^2+9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

A $-\sqrt{3}$ hamis gyök, így csak a $\sqrt{3}$-mal kell foglalkoznunk.

Elkészítjük a szokásos táblázatot.

x	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 4)$
$t'(x)$	$-$	0	$+$
$t(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A második sorban az előjeleket például $x = 1$ és $x = 2$ helyettesítésével kapjuk.

$$t'(1) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1^2+9}} - \frac{1}{6} \approx -0.06 < 0$$

$$t'(2) = \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{4^2+9}} - \frac{1}{6} \approx 0.018 > 0$$

A függvénynek tehát lokális minimuma van az $x = \sqrt{3}$ helyen, ami egyben globális minimum is a $(0, 4)$ intervallumon.

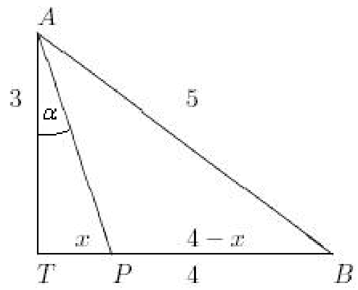
Még a legrövidebb időt kell kiszámolnunk.

$$t_{\min} = t(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+9}}{3} + \frac{4-\sqrt{3}}{6} \approx 1.53$$

Tehát emberünknek az A pontból B pontba eljutás legalább 1.53 óráig tart.

Vázlatosan megoldjuk a feladatot egy másik úton is.

Válasszuk most független változónak az ATP derékszögű háromszög A csúcsnál lévő szögét, és jelöljük ezt α-val.



A TP szakasz hossza, ami az evezéssel megtett út, ekkor $s_1 = \frac{3}{\cos\alpha}$. Az ennek megtételéhez szükséges idő $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\frac{3}{\cos\alpha}}{3} = \frac{1}{\cos\alpha}$.

A PB szakasz hossza, ami a gyalogolva megtett út, ekkor . (Az x távolság az ATP derékszögű háromszögből kifejezhető, s .)

A gyaloglásra fordított idő $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{4 - 3\mathrm{tg}\alpha}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$.

Az út megtételéhez szükséges teljes idő az alábbi:

$$t(\alpha) = t_1 + t_2 = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$$

Az α radiánban mért szög nyilván 0 és a $TAB\sphericalangle = \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3} \approx 0.93$ közé esik. Ezen értékek között keressük a $t(\alpha)$ függvény minimumát.

Deriváljuk a függvényt.

$$t'(\alpha) = \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha\right)' = \frac{0 \cdot \cos\alpha - 1(-\sin\alpha)}{(\cos\alpha)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\cos\alpha)^2} =$$

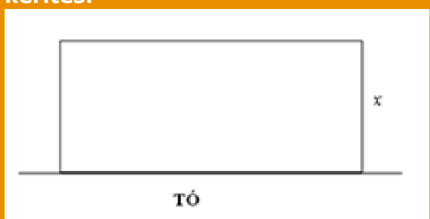
$$= \frac{\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\cos\alpha)^2} = \frac{\sin\alpha - \frac{1}{2}}{(\cos\alpha)^2}$$

Ebből következik, hogy $t'(\alpha) = 0$ akkor teljesül, ha $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, amiből $\alpha = \frac{\pi}{6}$ következik.

A megoldás befejezéshez el kell készíteni a táblázatot, amelyből megállapítható, hogy ezen a helyen valóban minimuma van a függvénynek, majd kiszámolható a legrövidebb idő is. Ezeket a lépéseket már nem hajtjuk végre, hanem az olvasóra bízzuk. Természetesen így is ugyanarra az eredményre jutunk.

Ellenőrző kérdések

6. kérdés: Egy tó egyenes partján szeretnénk elkeríteni egy téglalap alakú telket. Ehhez 200 m drótfonat áll rendelkezésünkre. A legnagyobb területű téglalapot szeretnénk elkeríteni úgy, hogy a tó felőli oldalon nem lesz kerítés.



Ha a téglalap tópartra merőleges oldalát választjuk változónak, és x-szel jelöljük, akkor az alábbi függvénnyel írható le a terület:

- $T(x) = 200x - x^2$
- $T(x) = 200x - 2x^2$
- $T(x) = 200x + x^2$
- $T(x) = 200x + 2x^2$

mehet

7. kérdés: Az előző kérdésben a maximális területű telek oldalai az alábbiak:

- A partra merőleges oldal 40 m, a parttal párhuzamos oldal 120 m.
- A partra merőleges oldal 50 m, a parttal párhuzamos oldal 100 m.
- A partra merőleges oldal 55 m, a parttal párhuzamos oldal 90 m.
- A partra merőleges oldal $\frac{200}{3}$ m, a parttal párhuzamos oldal $\frac{200}{3}$ m.

mehet

8. kérdés: Két pozitív szám összege 1. A szorzatuk maximumát keressük. Ekkor a következő függvényt kell vizsgálnunk:

- $f(x) = (x-1)x$
- $f(x) = x - x^2$
- $f(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$
- $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$

mehet

9. kérdés: Az előző kérdésben a két szám szorzatának maximuma az alábbi:

- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}}$

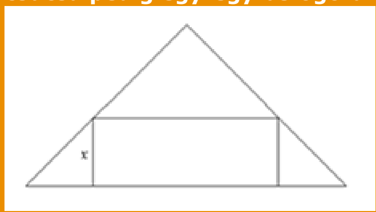
mehet

10. kérdés: A $[0, 1]$ intervallumot egy belső pontjával két részre bontjuk, és mindegyik rész fölé négyzetet emelünk. A négyzetek területösszegének minimumát szeretnénk meghatározni. Melyik függvényt kell vizsgálnunk, ha független változónak az egyik szakasz hosszát választjuk?

- $f(x) = x^2 - 2x + 2$
- $f(x) = 2x^2 - 2x + 2$
- $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$
- $f(x) = 2x^2 + 1$

mehet

11. kérdés: Egy egységnyi befogójú, egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójára téglalapot írunk úgy, hogy két csúcsa az átfogóra, a másik két csúcsa pedig egy-egy befogóra esik.



Keressük a legnagyobb területű ilyen téglalapot. Ha a téglalap átfogóra merőleges oldalát választjuk független változónak, és jelöljük x-szel, akkor melyik függvényt kell vizsgálnunk?

- $f(x) = (1 - x)x$
- $f(x) = (1 - 2x)x$
- $f(x) = (\sqrt{2} - x)x$
- $f(x) = (\sqrt{2} - 2x)x$

mehet

12. kérdés: Az előző kérdésben a téglalap maximális területe:

- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- $\frac{\sqrt{2}}{3}$

mehet

További kidolgozott feladatok

11. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ függvényt!

Megoldás: Amikor egy függvényt valamilyen szempontból vizsgálunk, akkor elsőként mindig az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Jelen esetben ki kell kötnünk, hogy a nevező nem lehet 0, s ebből az következik, hogy $x \neq -1$. A függvény értelmezési tartománya tehát: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

.

A monotonitás vizsgálata azt jelenti, hogy meghatározzuk, hol nő, hol csökken a függvény. Ehhez elő kell állítanunk a függvény deriváltját. Alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1)^2 - x^2 \cdot 2(x+1)}{\left((x+1)^2\right)^2}$$

Ez ilyen formában nagyon csúnyán néz ki, ezért próbáljunk alakítani rajta. Emeljünk ki a számlálóban, amit csak lehet, a nevezőt pedig írjuk egyetlen hatványként.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)[(x+1)-x]}{(x+1)^4}$$

Ezután egyszerűsítsünk, és a szögletes zárójelen belül vonjunk össze.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^3}$$

A derivált minél egyszerűbb alakra hozása azért fontos, mert ezután meg kell oldanunk az $f'(x) = 0$ egyenletet, valamint vizsgálnunk kell majd a derivált előjelét. Ha a derivált bonyolult alakban van felírva, akkor mind az egyenlet megoldása, mind az előjel vizsgálata nehézségekbe ütközik. Általában elmondhatjuk, hogy ha lehetőség van kiemelésre, akkor ezzel a lehetőséggel élni kell, s törtek esetében egyszerűsítsünk, ha erre lehetőség van.

Most oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet, hogy megkapjuk, hol lehet szélsőértéke a függvénynek.

$$\frac{2x}{(x+1)^3} = 0$$

Tört csak úgy lehet egyenlő 0-val, ha számlálója 0, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Ezután a szokásos módon táblázatot készíthetünk. Elsőként csak az első sort töltsük ki, melyben feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit, melyeken belül már nem változik a derivált előjele. Az értelmezési tartományt a derivált zérushelye és az értelmezési tartományban levő szakadás bontja részekre. A szakadási hely oszlopában X-ekkel jelölhetjük, hogy ott a függvény nem értelmezett.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$		X			
$f(x)$		X			

Most vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes részeken. A derivált tört, így külön vizsgálhatjuk a számláló és a nevező előjelét, amiből következtethetünk a tört előjelére.

Ha $x < -1$, akkor a számláló, azaz $2x$ negatív, és a nevező, azaz $(x+1)^3$ is negatív, így a derivált ekkor pozitív. Ebben az esetben tehát nő a függvény.

Ha $-1 < x < 0$, akkor $2x$ negatív, de $(x+1)^3$ pozitív, így negatív lesz a derivált. A függvény tehát ekkor csökken.

Ha $0 < x$, akkor $2x$ is pozitív, és $(x+1)^3$ is pozitív, azaz pozitív lesz a derivált. Ebből következően itt nő a függvény.

Az $x = 0$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt szélsőértéke van a függvénynek. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.

Készítsük el a teljes táblázatot.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$

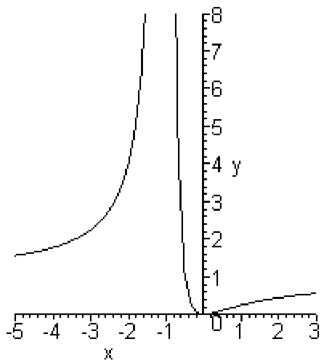
$f'(x)$	+	X	−	0	+
$f(x)$	↗	X	↘	lok. min.	↗

A táblázattal így megadtuk, hogy hol nő, és hol csökken a függvény, valamint hol, milyen jellegű szélsőértéke van. Már csak egyetlen feladatunk van, megadni a szélsőérték nagyságát. Helyettesítsük be a függvénybe azt a helyet, ahol szélsőértéke van.

$$f(0) = \frac{0^2}{(0+1)^2} = 0$$

A lokális minimum értéke tehát 0.

A függvény grafikonja az alábbi ábrán látható.



12. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = x^2 e^{-2x}$ függvényt!

Megoldás: Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. Nem kell kikötést tennünk, így $D_f = \mathbb{R}$.

Deriváljuk a függvényt. Alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt, és ne feledkezzünk el arról, hogy szorzat második tényezője összetett függvény.

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2 e^{-2x} \cdot (-2)$$

Emeljük ki amit lehet.

$$f'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$2xe^{-2x}(1-x) = 0$$

Egy három tényezős szorzat egyenlő 0-val, ami csak úgy lehetséges, ha valamelyik tényező 0. Így három egyszerűbb egyenletet kapunk.

$x = 0$, vagy $e^{-2x} = 0$, vagy $(1-x) = 0$.

Az első egyenlettel semmit sem kell tenni, a harmadiknak pedig $x = 1$ megoldása.

A második egyenletnek nincs megoldása, mert exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel, azaz $e^{-2x} > 0$ minden x esetén, így $e^{-2x} \neq 0$.

A derivált zérushelyeinek ismertében készítsük el a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$					
$f(x)$					

Vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes intervallumokon.

$(-\infty,\ 0)$: $f'(-1) = 2(-1)e^{-2(-1)}(1-(-1)) = -4e^2 < 0$

$(0,\ 1)$: $f'(0.5) = 2 \cdot 0.5e^{-2 \cdot 0.5}(1-0.5) = 0.5e^{-1} > 0$

$(1,\ \infty)$: $f'(2) = 2 \cdot 2e^{-2 \cdot 2}(1-2) = -4e^{-4} < 0$

Megjegyezzük, hogy a derivált előjelét a szorzat egyes tényezőinek előjeléből is könnyen vizsgálhatjuk. Például a $(-\infty,\ 0)$ intervallumon x nyilván negatív, az e^{-2x} mindig pozitív, az $1-x$ szintén pozitív. Mivel a három tényezőből csak egy negatív, így negatív lesz a szorzat is.

Hasonlóan járhatunk el a másik két intervallumon is.

Most töltsük az egész táblázatot.

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

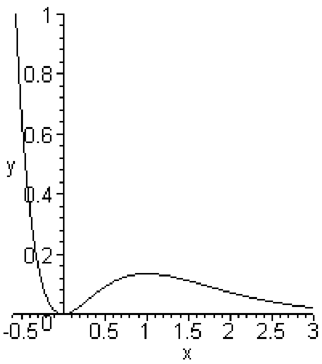
A táblázatból látható, hogy a függvény a $(-\infty,\ 0)$ és $(1,\ \infty)$ intervallumokon csökken, a $(0,\ 1)$ intervallumon pedig nő. Az $x = 0$ helyen lokális minimuma, az $x = 1$ helyen pedig lokális maximuma van.

Határozzuk meg a minimum és maximum értékét is.

A lokális minimum értéke: $f(0) = 0^2 e^{-2 \cdot 0} = 0.$

A lokális maximum értéke: $f(1) = 1^2 e^{-2 \cdot 1} = e^{-2} \approx 0.135.$

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.



13. feladat: Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = x^2 \ln\left(x^2\right)$ függvényt!

Megoldás: Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. A logaritmus miatt kell kikötést tennünk. Mivel csak pozitív számoknak létezik logaritmusa, így kikötjük, hogy $x^2 > 0$. Ez minden 0-tól különböző szám esetén teljesül, így $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Előállítjuk a függvény deriváltját. Szorzatot deriválunk, melynek második tényezője összetett függvény.

$$f'(x) = 2x\ln\left(x^2\right) + x^2 \frac{1}{x^2} 2x = 2x\ln\left(x^2\right) + 2x$$

Emeljük ki amit lehet.

$$f'(x) = 2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right)$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$2x\left(\ln\left(x^2\right)+1\right)=0$$

Vizsgáljuk külön a szorzat tényezőit, hogy mikor egyenlők 0-val.

Első tényező: $x = 0$. Ez nem eleme a függvény értelmezési tartományának.

Második tényező: $\ln\left(x^2\right)+1=0$. Ez átrendezve $\ln\left(x^2\right)=-1$ lesz.

A -1-et írjuk fel $\ln\left(e^{-1}\right)$ formában, így az $\ln\left(x^2\right)=\ln\left(e^{-1}\right)$ egyenletet kapjuk.

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt elhagyhatjuk az egyenlet két oldaláról a logaritmust. Így kapjuk $x^2=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Ennek megoldásai: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Most készítsük el a szokásos táblázatunkat. Ez most egy kicsit hosszabb lesz mint az eddigiek, hiszen a deriváltnak két zérushelye is van, és a függvény értelmezési tartományában is van szakadás. Egyelőre csak az első sort töltsük ki, és a szakadást jelöljük.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$
$f'(x)$				X			
$f(x)$				X			

Határozzuk meg f' előjelét az egyes intervallumokon.

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right): f'(-1)=2\cdot(-1)\left(\ln\left((-1)^2\right)+1\right)=-2(0+1)=-2<0$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right): f'\left(-\frac{1}{e}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{e}\right)\left(\ln\left(\left(-\frac{1}{e}\right)^2\right)+1\right)=-\frac{2}{e}(-2+1)=\frac{2}{e}>0$$

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right): f'\left(\frac{1}{e}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{e}\right)\left(\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2\right)+1\right)=\frac{2}{e}(-2+1)=-\frac{2}{e}<0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right): f'(1)=2\cdot 1\left(\ln\left(1^2\right)+1\right)=2(0+1)=2>0$$

Most töltsük ki a teljes táblázatot.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	X	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	X	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

A táblázatból látható, hogy a függvény csökken a $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ és $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ intervallumokon, nő a $\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$ intervallumokon. Két lokális minimuma van az $x=\pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ helyeken.

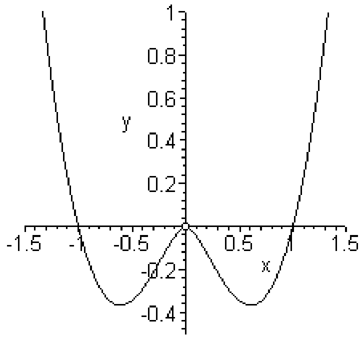
Határozzuk meg a lokális minimumok értékét is.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot(-1)=-\frac{1}{e}\approx-0.368$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot(-1)=-\frac{1}{e}\approx-0.368$$

A két minimum értéke megegyezik.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható. Az origóban az üres karika jelzi a függvény szakadását.

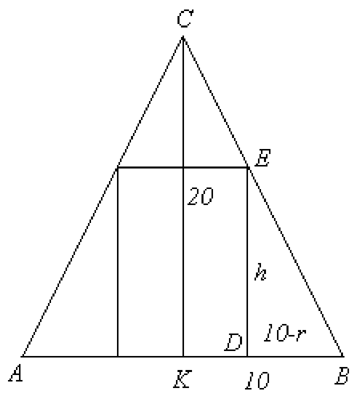


14. feladat: Egy 10 cm sugarú, 20 cm magasságú egyenes körkúpba hengert írunk úgy, hogy forgástengelye megegyezik a kúp forgástengelyével, alapköre a kúp alapkörére esik, fedőköre pedig érinti a kúp palástját. Mekkora legyen a henger sugara és magassága, hogy térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?

Megoldás: Jelöljük a henger sugarát r-rel, magasságát pedig h-val. Ekkor a henger térfogata, aminek szélsőértéke kell, hogy legyen, az alábbi módon írható fel:

$$V_{henger} = \pi r^2 h$$

Ebben két változó van, hiszen ha változik a henger sugara, akkor a magasság is változik. Amint azt korábbi feladatban tettük, itt is összefüggést keresünk a két változó között. Ehhez szükségünk lesz egy ábrára. Képzeletben vágjuk el a kúpot és a hengert egy a közös forgástengelyre illeszkedő síkkal, és a síkmetszetről készítsünk ábrát. Ezen metszeten a kúp nyilván egyenlő szárú háromszögnek látszik majd, a henger pedig egy olyan téglalapnak, amely ezen háromszögbe van írva úgy, hogy két csúcsa az alapra, másik két csúcsa pedig egy-egy szárra esik.



Az ábráról nyilvánvaló, hogy a KBC derékszögű háromszög hasonló a DBE derékszögű háromszöghöz, így a két háromszögben megegyezik a befogók aránya. Írjuk ezt fel.

$$\frac{h}{10 - r} = \frac{20}{10} = 2$$

Fejezzük ki ebből h-t az r-rel.

$$h = 20 - 2r$$

Helyettesítsük be ezt a henger térfogatába, s így olyan függvényt kapunk, amiben már csak r lesz a változó.

$$V(r) = \pi r^2 (20 - 2r) = 20\pi r^2 - 2\pi r^3$$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a maximumát. A változóra nyilván a $0 < r < 10$ feltételnek kell teljesülni. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy szigorú egyenlőtlenségek vannak, mert egyenlőség esetén a henger elfajulna. Az $r = 0$ esetben egy szakasszá, a kúp magasságává válna a henger, az $r = 10$ esetben pedig egy körlappá, a kúp alapkörévé válna.

Ezután a szokott módon határozzuk meg a szélsőértéket. Állítsuk elő a térfogatfüggvény deriváltját.

$V'(r) = 40\pi r - 6\pi r^2$

Oldjuk meg a $V'(r) = 0$ egyenletet. Ehhez célszerű a deriváltat szorzattá alakítani.

$V'(r) = 2\pi r(20 - 3r) = 0$

Így nyilvánvaló, hogy az egyenletnek két megoldása van, az egyik $r = 0$, a másik pedig$r = \frac{20}{3}$. Az $r = 0$ nem felel meg a $0 < r < 10$ feltételnek, így csak a másik zérushellyel kell foglalkoznunk. Készítsük el a megszokott táblázatot, melyet töltsünk most ki egyből teljesen. A derivált előjelét például a következő módon kaphatjuk meg a két intervallumon.

$\left(0, \frac{20}{3}\right)$: $V'(1) = 40\pi \cdot 1 - 6\pi \cdot 1^2 = 34\pi > 0$

$\left(\frac{20}{3}, 10\right)$: $V'(8) = 40\pi \cdot 8 - 6\pi \cdot 8^2 = -64\pi < 0$

x	$\left(0, \frac{20}{3}\right)$	$\frac{20}{3}$	$\left(\frac{20}{3}, 10\right)$
$V'(x)$	+	0	–
$V(x)$	↗	lok. max.	↘

Látható, hogy az $r = \frac{20}{3}$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami a $0 < r < 10$ feltétel mellett globális maximum is.

A henger térfogat tehát akkor maximális, ha $r = \frac{20}{3}$.

Ekkor a henger magassága a következő:

$h = 20 - 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{20}{3}$.

Végül a maximális térfogat:

$V_{max} = V\left(\frac{20}{3}\right) = \pi\left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{20}{3} = \pi\frac{8000}{27} \approx 930.84.$

Utolsó feladatként pedig, amint azt korábban ígértük, visszatérünk a lecke elején vázolt probléma megoldásához.

15. feladat: Egy telep üresjárási feszültsége U_0, belső ellenállása R_b. Mekkora R_k külső ellenállást kell a telepre kapcsolni, hogy a külső ellenállás teljesítménye P_k maximális legyen? Mekkora ez a maximális teljesítmény?

Megoldás: Amint az a középiskolai fizika anyagból ismert, az R_k külső ellenállás teljesítménye a raja átfolyó áram erősségének négyzete szorozva az ellenállással, azaz $P = I^2 R_k$.

Az áram erősségét az Ohm-törvényből kapjuk.

$I = \frac{U_0}{R_k + R_b}$

Ezután a külső ellenállás teljesítménye:

$$P = \left(\frac{U_0}{R_k + R_b}\right)^2 R_k = U_0^2 \frac{R_k}{(R_k + R_b)^2}$$

Mivel U_0 és R_b konstansok, ebben csak az R_k külső ellenállás a változó, azaz a fenti összefüggés pontosan a teljesítményt írja le az R_k függvényében. Ezt jelölésben is hangsúlyozzuk.

$$P(R_k) = U_0^2 \frac{R_k}{(R_k + R_b)^2}$$

Az R_k külső ellenállás nyilván a $(0, \infty)$ intervallumba esik, így itt keressük ennek a függvénynek a maximumát.

Mivel a feladatban most nem szerepelnek konkrét számadatok, kicsit jobban kell figyelnünk arra, hogy melyik betű jelenti a változót az összefüggésben, és melyek konstansok. Ha valakit zavar ilyen formában a jelölés, akkor változtassa meg, és közelítse a szokásos matematika jelölésekhez. A R_k helyett használjon x-et, $P(R_k)$ helyett $f(x)$-et, az U_0 és R_b konstansok helyett pedig a-t és b-t. Így a következőt kapja: $f(x) = a^2 \frac{x}{(x+b)^2}$. Mi most nem kívánunk élni ezzel, hanem szeretnénk az eredeti jelöléssel végigvinni a megoldást.

Deriváljuk most a $P(R_k)$ függvényt az R_k változó szerint. A konstans szorzót emeljük ki a deriválás során, s alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

$$P'(R_k) = \left(U_0^2 \frac{R_k}{(R_k + R_b)^2}\right)' = U_0^2 \left(\frac{R_k}{(R_k + R_b)^2}\right)' =$$

$$= U_0^2 \frac{R_k' \cdot (R_k + R_b)^2 - R_k \cdot \left((R_k + R_b)^2\right)'}{\left((R_k + R_b)^2\right)^2} =$$

$$= U_0^2 \frac{1 \cdot (R_k + R_b)^2 - R_k \cdot 2(R_k + R_b)}{(R_k + R_b)^4}$$

Emeljünk ki a számlálóban $(R_k + R_b)$-t, és egyszerűsítsünk.

$$P'(R_k) = U_0^2 \frac{(R_k + R_b)\left((R_k + R_b) - 2R_k\right)}{(R_k + R_b)^4} = U_0^2 \frac{R_b - R_k}{(R_k + R_b)^3}$$

Ezután határozzuk meg, hogy a $P'(R_k)$ derivált mikor 0.

$$U_0^2 \frac{R_b - R_k}{(R_k + R_b)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_b - R_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_k = R_b$$

A megszokott táblázatunk segítségével ellenőrizzük le, hogy ezen a helyen a $P(R_k)$ függvénynek valóban maximuma van. Töltsük ki egyből a teljes táblázatot. A második sorban az előjeleket például az alábbiakból kaphatjuk.

$$(0, R_b)\colon P'\left(\frac{R_b}{2}\right) = U_0^2 \frac{R_b - \frac{R_b}{2}}{\left(\frac{R_b}{2} + R_b\right)^3} = U_0^2 \frac{\frac{1}{2}R_b}{\left(\frac{3}{2}R_b\right)^3} = U_0^2 \frac{\frac{1}{2}R_b}{\frac{27}{8}R_b^3} = \frac{4}{27}\frac{U_0^2}{R_b^2} > 0$$

$$(R_b, \infty)\colon P'(2R_b) = U_0^2 \frac{R_b - 2R_b}{(2R_b + R_b)^3} = U_0^2 \frac{-R_b}{(3R_b)^3} = U_0^2 \frac{-R_b}{27R_b^3} = -\frac{1}{27}\frac{U_0^2}{R_b^2} < 0$$

R_k	$(0, R_b)$	R_b	(R_b, ∞)
$P'(R_k)$	+	0	–
$P(R_k)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

Amint látható, amikor a külső ellenállás megegyezik a belső ellenállással akkor valóban maximuma lesz a külső ellenállás teljesítményének.

A maximális teljesítmény a következő:

$$P_{max} = P(R_b) = U_0^2 \frac{R_b}{(R_b + R_b)^2} = U_0^2 \frac{R_b}{4R_b^{\,2}} = \frac{U_0^{\,2}}{4R_b}.$$

Ellenőrző kérdések

13. kérdés: Hol nő az $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ függvény?

- A $(-\infty, -2)$ és $(0, 2)$ intervallumokon.
- A $(-2, 0)$ és $(2, \infty)$ intervallumokon.
- A $(-2, 0)$ és $(0, 2)$ intervallumokon.
- A $(-\infty, -2)$ és $(2, \infty)$ intervallumokon.

mehet

14. kérdés: Hol van szélsőértéke az $f(x) = \frac{6x}{x^2+2}$ függvénynek?

- Az $x = -2$ és az $x = 2$ helyeken.
- Az $x = -\sqrt{2}$ és az $x = 0$ helyeken.
- Az $x = 0$ és az $x = \sqrt{2}$ helyeken.
- Az $x = -\sqrt{2}$ és az $x = \sqrt{2}$ helyeken.

mehet

15. kérdés: Hol és milyen szélsőértéke van az $f(x) = xe^x$ függvénynek?

- Az $x = -\frac{1}{2}$ helyen minimuma van.
- Az $x = -\frac{1}{2}$ helyen maximuma van.
- Az $x = 2$ helyen minimuma van.
- Az $x = 2$ helyen maximuma van.

mehet

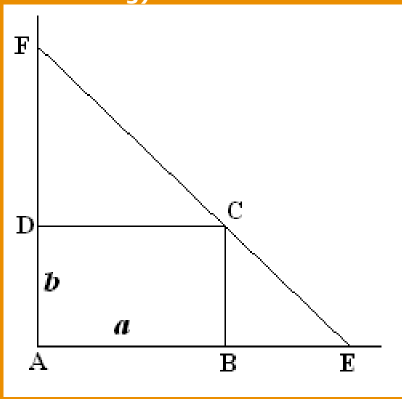
16. kérdés: Hol csökken az $f(x) = x\ln\left(x^2\right)$ függvény?

- A $\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$ és $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$ intervallumokon.
- A $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ és $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ intervallumokon.
- A $(-\infty, -e)$ és (e, ∞) intervallumokon.

A $(-e,\ 0)$ és $(0, e)$ intervallumokon.

mehet

17. kérdés: Tekintsük a koordinátarendszerben azt a téglalapot, melynek csúcsai: $A(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $C(a;\ b)$, $D(0;\ b)$. A C csúcson áthaladó egyenessel derékszögű háromszöget vágunk le az első síknegyed sarkánál. (AEF háromszög)



Azt szeretnénk, hogy a háromszög területe minimális legyen. Ha az AE oldal hosszát választjuk független változónak, és x-szel jelöljük, akkor az alábbi függvényt kell vizsgálnunk szélsőérték szempontjából:

- $f(x) = \frac{a}{2}\frac{x^2}{x-b}$
- $f(x) = \frac{a}{2}\frac{(x-b)^2}{x}$
- $f(x) = \frac{b}{2}\frac{x^2}{x-a}$
- $f(x) = \frac{b}{2}\frac{(x-a)^2}{x}$

mehet

18. kérdés: Az előző kérdésben a minimális területű háromszög AE oldalának hossza:

- $\sqrt{2}\,a$
- $2a$
- $\sqrt{2}\,(a+b)$
- $2(a+b)$

mehet