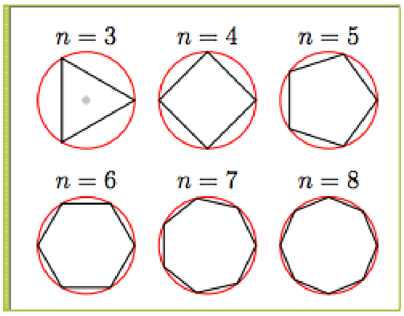
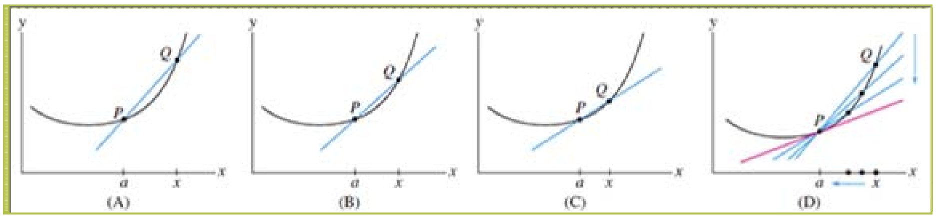
Tanulási cél: megismerni a határérték fogalmát, begyakorolni határértékek kiszámolását.

Elméleti összefoglaló

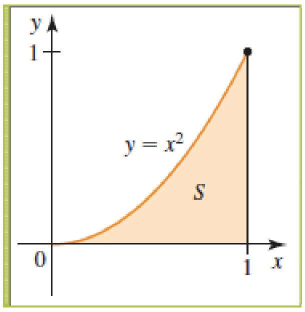
A határérték, határátmenet a matematika egyik legfontosabb fogalma. Már az ókori matematikában is felbukkan (a határérték az, amihez egy változó mennyiség egyre jobban és jobban közeledik), ma is használatos pontos megfogalmazása Augustin-Louis Cauchy és Karl Weierstrass érdeme.



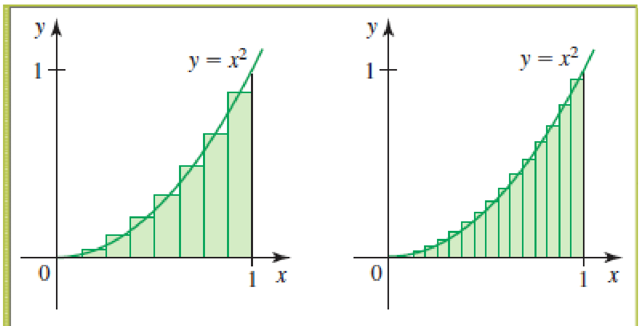
Például a körbe írt szabályos sokszögek egyre közelebb vannak a körhöz, ha az oldalszámot növeljük. Ez a határátmenet lehetővé teszi a kör kerületének és területének meghatározását.



Egy görbe P pontban húzható érintője a P és Q pontokon átmenő szelők határhelyzete, ha a Q pont minden határon túl közeledik a P ponthoz. Az itteni határátmenet segítségével felírható az érintő egyenlete.



Az ábrán látható S síkidomot (amelynek a területét a geometriában tanult módszerekkel nem lehet kiszámolni) egyre jobban megközelítik az alábbi ábrán látható kis téglalapok uniója, így a területét a téglalapok területének összege.



(a) $n = 8$ **(b)** $n = 16$

A két legfontosabb probléma, amely a határérték fogalmának kidolgozásához vezetett az érintő problémája, és a terület problémája.

A határérték intuitív fogalma

A határérték legegyszerűbb fajtája az egyváltozós függvény határértéke, ezzel foglalkozunk a továbbiakban.

Tekintsük az $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}$ függvényt. Ez a függvény nincs értelmezve az $a=1$ helyen. Az érdekelne minket, hogy hogyan viselkedik az $f(x)$ érték, ha x közel van 1-hez. Ennek érdekében kiszámoljuk a függvény értékét néhány 1-hez közeli helyen. A számításokat az alábbi táblázat tartalmazza.

(a_n)	0.5	0.9	$b_n \to A$	0.999	1.001	(a_n)	1.1	1.5
$c \in \mathbb{R}$	0.75	0.95	$N(c) \in \mathbb{N}$	0.9995	1.0005	$n \geq N(c)$	1.05	1.25

Ezekből a számokból is látható, hogy ha x egyre közelebb van egyhez, akár balról, akár jobbról, $f(x)$ is közelebb lesz 1-hez. Ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy $f(x)$ határértéke 1, ha x közeledik 1-hez. Ez elvezet a határérték alábbi, matematikai szempontból nem precíz definíciójához.

Definíció (intuitív): Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya tartalmaz egy olyan nyílt intervallumot, amelynek az a szám a közepe, kivéve esetleg az a számot. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **határértéke** az a helyen a L szám, ha $f(x)$ tetszőleges közel kerül L-hez, ha x már elég közel van a-hoz. Ezt így fogjuk jelölni:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L.$$

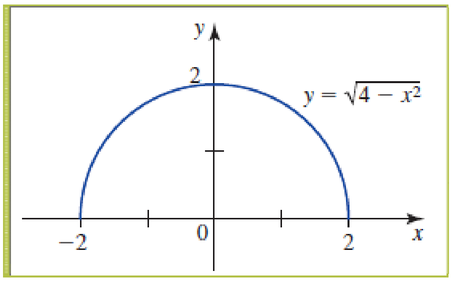
Definíció: Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya értelmezve van az olyan számokra, amelyek közel vannak a-hoz, de annál nagyobbak. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **jobb oldali határértéke** az a helyen a L szám, ha $f(x)$ tetszőleges közel kerül L-hez, ha x már a-hoz elég közeli, de a-nál nagyobb szám. Ezt így fogjuk jelölni:

$$\lim_{x\to a+} f(x)=L.$$

Definíció: Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya értelmezve van az olyan számokra, amelyek közel vannak a-hoz, de annál kisebbek. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **bal oldali határértéke** az a helyen a L szám, ha $f(x)$ tetszőleges közel kerül L-hez, ha x már a-hoz elég közeli, de a-nál kisebb szám. Ezt így fogjuk jelölni:

$$\lim_{x\to a-} f(x)=L\,.$$

A két utóbbi definíció szemléltetésére tekintsük az $a_n \to A \in \mathbb{R}$ függvényt. Ennek értelmezési tartománya a $[-2,2]$ zárt intervallum, és a grafikonja az alábbi ábrán látható.



Az ábráról könnyen leolvasható, hogy $\lim\limits_{x\to -2+}\sqrt{4-x^2}=0$, és $\lim\limits_{x\to 2-}\sqrt{4-x^2}=0$. Mindkét eredmény egy gyors numerikus kísérlettel ellenőrizhető. Például az elő limesz esetén $f(-1.9999)=0.1999975$, a második limesz esetén $f(1.9999)=0.1999975$. Mindkét szám közel van nullához.

Az alábbi tétel a kétoldali és az egyoldali határértékek közötti kapcsolatról szól.

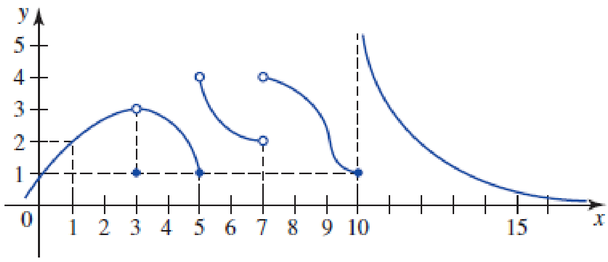
Tétel: Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya tartalmaz egy olyan nyílt intervallumot, amelynek az a szám a közepe, kivéve esetleg az a számot. Ekkor

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ pontosan akkor teljesül, ha $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to a+} f(x)=L.$

Felmerül a kérdés, hogy hogyan lehet a határértéket meghatározni. Később a precíz definíció birtokában erre korrekt módszereink lesznek. De addig is, például a fenti táblázatban mutatott numerikus kísérlettel gyakran ki lehet találni a határértéket. Ha ábrát tudunk rajzolni a függvényről, az is felhasználható a határérték leolvasására. Ha egyszerűsíteni tudjuk a függvény hozzárendelési utasítását, a határérték meghatározása is egyszerűsödik.

Kidolgozott feladat

1. feladat: Az alábbi ábra egy f függvény grafikonját mutatja.



Olvassuk le az ábráról az alábbi határértékeket: *a)* $\lim_{x\to 0} f(x)$, *b)* $\lim_{x\to 1+} f(x)$, *c)* $b_n \to B < 0$, *d)* $a_n b_b \to -\infty$, *e)* $a_n \neq 0$, *f)* $\lim_{x\to 7-} f(x)$, *g)* $\lim_{x\to 7+} f(x)$, *h)* $\lim_{x\to 10-} f(x)$, *i)* $a_n \to 0$, *j)* $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Megoldás:

a) Ha megfigyeljük a függvényünk viselkedését a 0 körül, látjuk, hogy az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülnek 1-hez, ha x elég közel van nullához, ezért $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

b) Akárhogyan közeledik az x az 1-hez, az ábra alapján az $f(x)$ függvényértékek 2-höz közelednek, azaz $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, és így $\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$ is teljesül, ami eredetileg a kérdés volt.

c) Könnyen leolvassuk az előzőek alapján, hogy $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$, figyeljük meg viszont, hogy $f(3) = 1$.

d)-e) Az eddigiekkel ellentétben a függvényünk 5 körüli viselkedésénél egyáltalán nem mindegy, hogy az 5-höz a bal vagy a jobb oldalról közeledünk. Látjuk az ábráról, hogy 5-höz közeli, de 5-nél kisebb x értékekre $f(x)$ 1-hez lesz közel, $\lim_{x\to 5-} f(x) = 1$, de ha x közel van 5-höz, de annál nagyobb, akkor $f(x)$ 4-hez közeli, azaz $-\frac{11}{23}$. Mivel a két egyoldali limesz külön-külön létezik ugyan, de nem egyenlő, ezért a kétoldali $\lim_{x\to 5} f(x)$ határérték nem létezik.

f)-g)-h) Az előzőek alapján világos kell, hogy legyen, hogy $\lim_{x\to 7-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 7+} f(x) = 4$ és $\lim_{x\to 10-} f(x) = 1$.

i) Az 10-hez közeli, de 10-nél nagyobb x számok esetén az $f(x)$ viselkedése az eddigiektől eltérő. De a grafikon azt akarja ábrázolni, hogy $f(x)$ minden határon túl nő, ha x jobbról közeledik 10-hez. Ezt így jelöljük: $\lim_{x\to 10+} f(x) = \infty$.

j) Ilyen típusú limesz sem szerepelt az eddigi definíciókban. De nyilván érezzük a grafikon azt szemlélteti, hogy ahogy egyre nagyobbá válik az x, az $f(x)$ értékek minden határon túl közelednek nullához, amit így fogunk jelölni: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Elméleti összefoglaló

Számsorozatok

Az *i)* és *j)* pontokban szereplő határértékekkel együtt eddig 5 fajta limeszről volt szó. Ki fog hamarosan derülni, hogy vannak továbbiak is, összesen 15 fajta. Ezek ismertetése előtt rátérünk a számsorozatokra. A precíz definíciók ezek segítségével könnyen megadhatók.

Definíció: Számsorozatnak hívjuk az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket, hagyományos okokból $a(n)$ helyett a_n-et írunk és a_n-et a sorozat n**-edik elemének** hívjuk, n-et pedig az a_n sorozatelem **indexének** nevezzük.

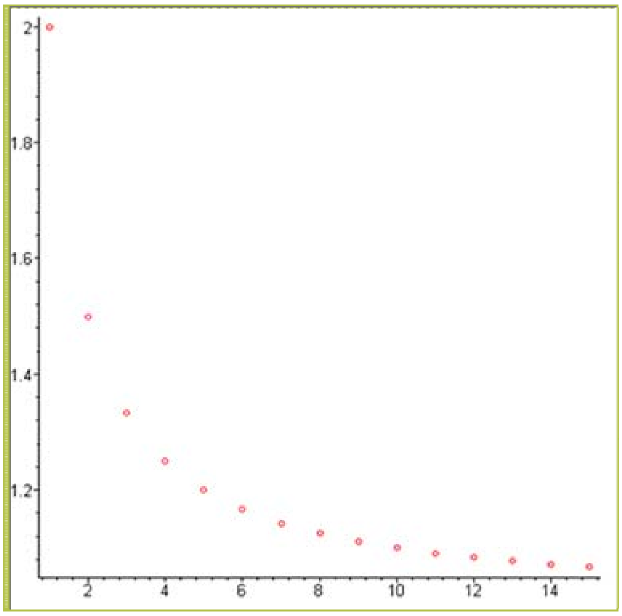
Magát a sorozatelemeket az index szerinti természetes sorrendjükben

$$a_n = q^n \to \begin{cases} \infty, \text{ ha } q > 1, \\ 1, \text{ ha } q = 1, \\ 0, \text{ ha } -1 < q < 1, \\ \text{nem létezik a határérték, ha } q \le -1. \end{cases}$$

fogja jelölni, tehát $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$. A számsorozat elnevezés helyett röviden sorozatot is szokás mondani. A sorozatokat leggyakrabban az a_n elem kiszámolását lehetővé tevő képlet megadásával definiáljuk. Például így: $a_n = n + \frac{1}{n}$. Ennek a sorozatnak az első néhány eleme

$$\left(2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \ldots\right).$$

Tekintsük az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Ennek az első néhány eleme $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right)$. Ha ábrázoljuk ezeket a számokat egy számegyenesen vagy egy koordináta rendszerben az (n, a_n) koordinátájú pontokat, az alábbi ábrákat kapjuk.



(Így minden sorozatot ábrázolhatunk, ez a szemléltetés gyakran hasznos.)

Az ábrákról leolvashatjuk, hogy (a_n) elemei egyre kisebbek, de mindegyik nagyobb, mint 1. Az elemek közelednek 1-hez. Sőt, úgy mondjuk, hogy az elemek minden határon túl közelednek 1-hez, amin azt értjük, hogy az a_n sorozatelem és az 1 távolsága, ami definíció szerint $|a_n - 1|$, tetszőlegesen kicsivé válik, ha n elég nagy. Az is igaz, hogy a sorozatelemek egyre közelednek pl. a 0-hoz is, sőt minden 1-nél kisebb számhoz is, de az ilyen számokhoz nem közelednek a sorozatelemek minden határon túl, például a 0-tól vett távolságuk mindig legalább 1, az $\frac{1}{3}$-tól vett távolságuk mindig legalább $\frac{2}{3}$, és így tovább. Tekintsünk most egy 1-nél nagyobb számot, például $1,025$-t. A sorozatelemek először közelednek $1,025$-höz, de a 40. elem éppen $1,025$, és ezután a sorozatelemek elkezdenek távolodni, és egyre távolabb kerülnek $1,025$-től.

Ebből az elemzésből láthatjuk, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ sorozat esetén az 1-nek kitüntetett szerepe van: ő az **egyetlen** valós szám, amelyhez a sorozatelemek minden határon túl közelednek.

Ilyen tulajdonságú szám sok más sorozat esetén is található, de messze nem mindegyik esetén. Például az $a_n = (-1)^n$ képlettel megadott sorozat elemei felváltva -1 és 1, ezek az elemek nem közelednek minden határon túl semmilyen számhoz. Ezek motiválják a következő definíciót.

Definíció: Az (a_n) sorozat **határértéke** vagy **limesze** az $A \in \mathbb{R}$ valós szám, ha tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $n \ge N(\varepsilon)$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Azt, hogy az (a_n) sorozat határértéke A

$a_n \to A$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$

fogja jelölni. Ilyenkor az (a_n) sorozatot **konvergensnek** hívjuk, az $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ természetes számot pedig az ε-hoz tartozó **küszöbindexnek**.

A definíció szemléletes tartalma a fenti gondolatmenet alapján az, hogy ha a sorozat határértéke A, akkor a sorozat elég nagy indexű elemei mindannyian bármilyen kis távolságnál is közelebb lesznek A-hoz. Ez a sorozatok körében a legfontosabb fogalom.

Tétel: Ha egy (a_n) sorozatnak létezik határértéke, akkor az egyértelmű.

Definíció: Az (a_n) sorozat egy **részsorozata** egy olyan (b_n) sorozat, amely úgy keletkezik, hogy töröljük az eredeti sorozat véges sok vagy végtelen sok elemét olyan módon, hogy végtelen sok elem maradjon, és a megmaradó elemek a (b_n) sorozat elemei.

Például az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozatnak néhány részsorozata az alábbi:

$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$, itt a páratlan indexű elemeket tartottuk meg, és minden másodikat töröltünk;

$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots\right)$, itt azokat az elemeket tartottuk meg, amelyek indexe négyzetszám;

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\right)$, itt azokat az elemeket tartottuk meg, amelyek indexe prímszám.

Egy sorozatnak nyilván végtelen sok részsorozata van.

Tétel: Ha $a_n \to A$, és (b_n) részsorozata (a_n)-nek, akkor $b_n \to A$.

Ez a tétel sokszor hasznos, például erre alapozva úgy lehet megmutatni, hogy egy sorozat nem konvergens, hogy keresünk két részsorozatot, amelyeknek más a határértéke.

A nem konvergens sorozatokat divergensnek is hívjuk. A divergens sorozatok nagyon szertelenül is viselkedhetnek. Két típusuk azonban mutat némi szabályszerűséget, ezek a minden határon túl növekedő, és a minden határon túl csökkenő sorozatok.

Definíció: Az (a_n) sorozat **határértéke a plusz végtelen,** ha tetszőlegesen nagy $c \in \mathbb{R}$ pozitív számhoz is van olyan $N(c) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $n \geq N(c)$ esetén

$a_n > c.$

Ezt $a_n \to \infty$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ fogja jelölni.

Az (a_n) sorozat **határértéke a mínusz végtelen,** ha tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív $c \in \mathbb{R}$ számhoz is van olyan $N(c) \in \mathbb{N}$ természetes szám, hogy $n \geq N(c)$ esetén

$a_n < c.$

Ezt $a_n \to -\infty$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ fogja jelölni.

Egy másik fajta némileg szabályos viselkedést jelent, ha a sorozat elemei egy véges intervallumba esnek. Ezzel kapcsolatos a következő definíció.

Definíció: Az (a_n) sorozat **felülről korlátos** és a $K \in \mathbb{R}$ szám a felső korlátja, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$.

Az (a_n) sorozat **alulról korlátos** és a $k \in \mathbb{R}$ szám az alsó korlátja, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$.

Az (a_n) sorozat **korlátos,** ha alulról és felülről is korlátos.

Egy további szabályos viselkedés, ha a sorozat elemei egyre nőnek vagy csökkennek.

Definíció: Az (a_n) sorozat **monoton növő**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \le a_{n+1}$, **monoton csökkenő,** ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \ge a_{n+1}$.

Szokás akkor is azt mondani, hogy egy sorozat monoton növő vagy csökkenő, ha a megfelelő egyenlőtlenség nem minden n-re, hanem csak egy adott K küszöbszámnál nagyobb vagy egyenlő n-ekre teljesül.

A monoton sorozatok egy bizonyos értelemben szabályosan viselkednek. A legtöbb sorozat nem monoton.

Mivel a sorozatok $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények, az algebrai függvényműveletek rájuk is értelmezhetők. Például az összeg hozzárendelési utasítása a hozzárendelési utasítások összege, és így tovább. Kicsit pontosabban ez a három legfontosabb műveletre az alábbi.

Definíció: Tekintsük az (a_n) és (b_n) sorozatokat. Ekkor a két sorozat **összege** az $(a_n + b_n)$ sorozat, **szorzata** az $(a_n b_n)$ sorozat, és ha b_n egyetlen n-re sem nulla, akkor **hányadosa** az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat.

A sorozatok témakörében a legfontosabb feladat a határérték meghatározása lesz, amennyiben létezik. Eközben az alábbi tételeket állandóan fel fogjuk használni. Először egy, a konvergens sorozatokról szóló tétel következik.

Tétel: Ha $a_n \to A \in \mathbb{R}$ és $b_n \to B \in \mathbb{R}$, akkor

$$a_n + b_n \to A + B,$$
$$a_n b_n \to AB,$$
$$|a_n| \to |A|,$$

ha létezik az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat, és $B \neq 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.

Jóval bonyolultabb a helyzet, ha valamelyik vagy mindkét sorozat valamelyik végtelenbe tart. Csak a legfontosabb eseteket tartalmazzák az alábbi tételek.

Az összeggel kapcsolatban:

Tétel: Tekintsük az (a_n) és (b_n) sorozatokat.

Ha $a_n \to \infty$ és $b_n \to B \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \to \infty$.

Ha $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n + b_n \to \infty$.

Ha $a_n \to -\infty$ és $b_n \to B \in \mathbb{R}$, akkor $a_n + b_n \to -\infty$.

Ha $a_n \to -\infty$ és $b_n \to -\infty$, akkor $a_n + b_n \to -\infty$.

A szorzattal kapcsolatban:

Tétel: Tekintsük az (a_n) és (b_n) sorozatokat, és tegyük fel, hogy $a_n \to \infty$.

Ha $b_n \to B > 0$, akkor $a_n b_b \to \infty$.

Ha $b_n \to \infty$, akkor $a_n b_b \to \infty$.

Ha $b_n \to B < 0$, akkor $a_n b_b \to -\infty$.

Ha $b_n \to -\infty$, akkor $a_n b_b \to -\infty$.

Tétel: Ha $a_n \to \infty$ és $b_n \ge a_n$ minden n-re, akkor $b_n \to \infty$. Hasonlóan, ha $a_n \to -\infty$ és $b_n \le a_n$ minden n-re, akkor $b_n \to -\infty$

Végül a hányadossal kapcsolatban:

Tétel: Tekintsük az (a_n) sorozatot, és tegyük fel, hogy $a_n \neq 0$ semmilyen n-re.

Ha $a_n \to \pm\infty$, akkor $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Ha $a_n \to 0$ és $a_n > 0$, minden n-re, akkor $\frac{1}{a_n} \to \infty$.

Ha $a_n \to 0$ és $a_n < 0$, minden n-re, akkor $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.

Ha $a_n \to 0$, akkor $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$.

Ezeknek a tételeknek a kombinálásával, mint majd látjuk, számos sorozat határértéke kiszámolható. A tételek másik csoportja, ami megkönnyíti a limeszek kiszámítását a nevezetes limeszekről szóló tételek.

Tétel: $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Tétel: $a_n = n^{\alpha} \to \begin{cases} \infty, \text{ ha } \alpha > 0, \\ 1, \text{ ha } \alpha = 0, \\ 0, \text{ ha } \alpha < 0. \end{cases}$

Tétel: $a_n = q^n \to \begin{cases} \infty, \text{ ha } q > 1, \\ -1, \text{ ha } q = 1, \\ 0, \text{ ha } -1 < q < 1, \\ \text{nem létezik a határérték, ha } q \leq -1. \end{cases}$

Legyen $a_n = n$, $b_n = n^2$. Ekkor $a_n \to \infty$, és $b_n \to \infty$. Könnyen látható, hogy $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0$, ugyanakkor $\frac{b_n}{a_n} = n \to \infty$. Ez azt mutatja, hogy pusztán az az információ, hogy mi egy tört számlálójának és nevezőjének külön-külön a limesze a tört limeszét nem határozza meg. Ezt úgy mondjuk, hogy a $\frac{\infty}{\infty}$ típusú tört határozatlan alak. Ilyen határozatlan alak, nem csak tört esetén, több fajta is van. A legfontosabbak az alábbiak:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \pm\infty, \infty - \infty, -\infty - (-\infty), 1^{\infty}.$$

Az ilyen sorozatok limeszének meghatározása nehézséget jelent. A megoldás minden esetben abban áll, hogy azonos átalakításokkal átalakítjuk a_n képletét, hogy a fenti tételek alkalmazásával a limesz leolvasható legyen. Hogy ezt hogyan érdemes csinálni, az persze sorozat típustól függően más és más lehet. A kidolgozott feladatokban bemutatjuk a legfontosabb eseteket. Arra kell törekedni, hogy egy új feladat megoldás során sikerüljön beazonosítani a feladat típusát, majd ezután végre kell hajtani a típushoz tartozó megoldási módszert.

Kidolgozott feladatok

2. feladat: Írjuk fel az $a_n = 2^n$ sorozat első néhány elemét.

Megoldás: Rendre behelyettesítve n helyére az $1, 2, 3, 4, 5$, értékeket, kapjuk, hogy

$(a_n) = (2, 4, 8, 16, 32, ...)$.

3. feladat: Mi lehet az $a_n = (1, 3, 5, 7, 9, ...)$ sorozat hozzárendelési utasítása.

Megoldás: A megadott elemek alapján az a szabály körvonalazódik, hogy az n-edik elem az n-edik páratlan szám, tehát

$a_n = 2n - 1.$

Figyeljük meg, hogy n legkisebb értéke 1, tehát a **nullát nem tekintjük természetes számnak.**

4. feladat: Mi lehet az $a_n = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$ sorozat hozzárendelési utasítása.

Megoldás: Az első elemet $\frac{0}{1}$ alakban is felírhatnánk, így még szembeötlőbb, hogy az n-edik elem olyan tört, amelynek a nevezője n, a számlálója pedig $n - 1$, tehát

$$a_n = \frac{n-1}{n}.$$

5. feladat: Mi az $a_n = \frac{1}{2n+1}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Az egyik tételünk szerint, ha egy sorozat valamelyik végtelenbe tart, akkor a reciproka nullához tart. De $2n + 1 \to \infty$, (hiszen ha $n \to \infty$, akkor $2n \to \infty$, és ezért a nála eggyel nagyobb $2n + 1$ is végtelenbe tart; ezek mindegyike felsorolt tételek egy nagyon egyszerű alkalmazása, mindenkinek javasoljuk, hogy azonosítsa be a szóban forgó tételeket).

Így látjuk, hogy $a_n = \frac{1}{2n+1} \to 0.$

De úgy is okoskodhattunk volna, hogy a sorozatunk részsorozata az $\frac{1}{n} \to 0$ sorozatnak, egy konvergens sorozat minden részsorozat, egy szintén felsorolt tétel szerint, ugyanoda konvergál, mint az eredeti sorozat. Ezért ismét azt kapjuk, hogy $a_n \to 0.$

6. feladat: Mi az $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Tudjuk, hogy $\sqrt{n} \to \infty$, hiszen ez n^α szerkezetű nevezetes sorozat $\alpha > 0$ esete. Így az egyik tételünk szerint, (meg kellene az olvasónak keresni) a nála nagyobb $\sqrt{n+1}$ is tart végtelenbe. Így az előbbi feladatban is felhasznált tétel szerint a reciproka nullába tart, azaz

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0.$$

7. feladat: Mi az $a_n = n^2 - 3n$ sorozat határértéke?

Megoldás: Mivel n^2 és $3n$ is plusz végtelenbe tart, ez egy $\infty - \infty$ típusú határozatlan alak. De az alábbi átalakítás könnyen meghatározhatóvá teszi a limeszt:

$$a_n = n^2 - 3n = n(n-3).$$

Itt mindkét tényező végtelenbe tart, és akkor az egyik tételünk szerint a szorzatuk is,

$$a_n = n^2 - 3n \to \infty.$$

Látjuk, hogy a_n képlete másodfokú polinom. A polinomok esetén egy másfajta átalakítás, a legmagasabb fokú n hatvány kiemelése hasznosabb, mert minden esetben működik.

$$a_n = n^2 - 3n = n^2\left(\frac{n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{3}{n}\right).$$

Ebben a szorzatban az első tényező plusz végtelenbe tart, $\frac{3}{n} = 3 \cdot \frac{1}{n} \to 3 \cdot 0 = 0$, így a második tényező $1 - 0 = 1$-be tart, ami egy pozitív szám, így egy másik tételünk szerint a szorzatuk plusz végtelenbe tart. Ugyanazt a végeredményt kaptuk, mint előbb.

Azt is könnyű végiggondolni, hogy a legmagasabb fokú n hatvány kiemelése mindig leolvashatóvá teszi a limeszt, mert kiemelés után az első tényező mindig plusz végtelenbe tart, a második pedig a főegyütthatóhoz. Így azt kapjuk, hogy **polinom esetén a határérték** mindig végtelen, mégpedig **plusz végtelen, ha a főegyüttható pozitív,** és **mínusz végtelen, ha a főegyüttható negatív.**

8. feladat: Mi az $a_n = (2n - 1)n - (1 - 2n)^2$ sorozat határértéke?

Megoldás: Ha megnézzük a sorozatunk képletét, láthatjuk, hogy a szorzások elvégzése után egy másodfokú polinom keletkezne, amelynek a főegyütthatója $2n^2 - 4n^2 = -2n^2$ lenne, azaz

$a_n = -2n^2 + \ldots$

A többi tagot nem is kell kiszámolni, mert a limesz szempontjából érdektelenek. Mivel a főegyüttható negatív, $a_n = (2n - 1)n - (1 - 2n)^2 \to -\infty$.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés: Mennyi az $a_n = (-1)^n n + (n - 8)^2$ sorozat kilencedik eleme?

- -2
- -1
- 1
- nulla

mehet

2. kérdés: Mi lehet az $a_n = (4, 7, 10, 13, 16\ldots)$ sorozat hozzárendelési utasítása?

- $a_n = 3n + 1$
- $a_n = 2n + 2$
- $a_n = n^2 + 3$
- $a_n = 2n^2 + n - 1$

mehet

3. kérdés: Mennyi az $a_n = (2n + 1)^2 - 2(n + 1)^2$ sorozat határértéke?

- 0
- ∞
- $-\infty$
- 2

mehet

4. kérdés: Mennyi az $a_n = (1 - n)^2 - (n + 1)^2$ sorozat határértéke?

- 1
- 0
- ∞

$-\infty$

mehet

Kidolgozott feladatok

9. feladat: Mennyi az $a_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$ sorozat határértéke?

Megoldás: A sorozat képlete egy tört, amelynek számlálója és nevezője is plusz végtelenbe tart, ezért a $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. Ezekben az esetekben leggyakrabban a **kiemelés** vezet eredményre. Polinomok hányadosa esetén a nevező legmagasabb fokú n hatványát, (csak az n hatványt, az együtthatóját már nem), célszerű kiemelni a számlálóból és nevezőből is. Most tehát a számlálóból és nevezőből is n-et. Kiemelés és egyszerűsítés után

$$a_n = \frac{2n-1}{n+2} = \frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}.$$

Ezek ekvivalens átalakítások voltak. Az utolsó tört például a $120.$ elem kiszámolására egyáltalán nem célszerű, de a limesz leolvasására nagyon is. Hiszen látjuk, hogy a számláló 2-höz, a nevező 1-hez tart, és így a tört $\dfrac{2}{1}=2$-hez, vagyis

$$a_n = \frac{2n-1}{n+2} \to 2.$$

10. feladat: Mennyi az $a_n = \dfrac{3n^2-2n+4}{-2n^2+n-3}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Most a számláló a plusz végtelenbe, a nevezője mínusz végtelenbe tart, tehát ismét a $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. A módszerünk szerint kiemelünk a számlálóból és nevezőből is n^2-et, majd egyszerűsítünk:

$$a_n = \frac{3n^2-2n+4}{-2n^2+n-3} = \frac{n^2\left(3-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(-2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{-2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}.$$

Az utolsó törtben a számláló 3-ba, a nevező -2-be tart, ezért

$$a_n = \frac{3n^2-2n+4}{-2n^2+n-3} \to \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Egy rövid kis numerikus kísérlettel alátámaszthatjuk az eredményünket. Emlékszünk, hogy a limesz az a szám, amihez nagy index esetén a sorozatelem igen közel van. Számoljuk ki kalkulátorral, mondjuk a_{1231}-et. Ez nem egy kellemes számolás, de

$$a_{1231} = -1.499796666.$$

Ez tényleg közel van $-\dfrac{3}{2}$-hez. Ilyen numerikus kísérletet minden határérték kiszámolása során végezhetünk, ez segít, hogy rossz eredményt ne fogadjunk el helyesnek.

11. feladat: Mennyi az $a_n = \dfrac{n^2+3n+1}{-2n-3}$ sorozat határértéke?

Megoldás: Ismét a $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. Most a számlálóból és a nevezőből is n-et kell kiemelni, majd egyszerűsíteni vele:

$$a_n = \frac{n^2+3n+1}{-2n-3} = \frac{n\left(n+3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(-2-\frac{3}{n}\right)} = \frac{n+3+\frac{1}{n}}{-2-\frac{3}{n}}.$$

Ebben a törtben a számláló plusz végtelenbe, a nevező -2-be tart, ezért a hányadosuk mínusz végtelenbe, gondoljuk meg, nagy számnak a fele is nagy, ha még a mínusz előjelet is figyelembe vesszük, akkor nagy negatív, tehát:

$$a_n = \frac{n^2+3n+1}{-2n-3} \to -\infty.$$

Az iméntihez hasonló numerikus kísérlet azt mutatja, hogy például $a_{2879} = -1440.249783$, egy jó nagy abszolút értékű negatív szám, összhangban a kapott végeredménnyel.

12. feladat: Mennyi az $a_n = \dfrac{-n^2+n+2}{n^3-n^2+2n-2}$ sorozat határértéke?

Megoldás: A limesz $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú, a módszerünk szerint a számlálóból és a nevezőből is n^3-t emelünk ki:

$$a_n = \frac{-n^2+n+2}{n^3-n^2+2n-2} = \frac{n^3\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}.$$

Az utolsó törtben a számlálóban minden tag nullához tart, így az egész számláló is, a nevező1 -hez tart, tehát

$$a_n = \frac{-n^2+n+2}{n^3-n^2+2n-2} \to \frac{0}{1} = 0.$$

Az előző három feladatból leszűrhető a következő tétel:

Két polinom hányadosának a határértéke

(1) a főegyütthatók hányadosa, ha a számláló és a nevező azonos fokszámú,

(2) végtelen, ha a számláló magasabb fokszámú, mint a nevező, mégpedig mínusz végtelen, ha a főegyütthatók ellenkező előjelűek, és plusz végtelen, ha a főegyütthatók azonos előjelűek,

(3) nulla, ha a számláló alacsonyabb fokszámú, mint a nevező.

Ellenőrző kérdések

5. kérdés: Mennyi az $a_n = \dfrac{n-1}{3n+2}$ sorozat határértéke?

- $\dfrac{1}{3}$
- 3
- 2
- ∞

mehet

6. kérdés: Mennyi az $a_n = \dfrac{n^2-1}{-2n^2+2}$ sorozat határértéke?

- $\frac{1}{2}$
- 0
- -2
- $-\frac{1}{2}$

mehet

7. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{n(2-n)^2}{-n^2+2}$ sorozat határértéke?

- 0
- $-\infty$
- ∞
- -1

mehet

8. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{(n-2)^2-(n-3)^2}{2n-3}$ sorozat határértéke?

- 0
- ∞
- $-\infty$
- 1

mehet

Kidolgozott feladatok

13. feladat: Tekintsük az $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$ sorozatot. Adjunk küszöbindexet $\varepsilon = 0.01$-hez.

Megoldás: Először is, mivel a_n azonos fokszámú polinomok hányadosa, a limesze $\frac{1}{2}$. Küszöbindexet adni a megadott ε-hoz annyit jelent, hogy meghatározunk egy természetes számot úgy, hogy az annál nagyobb vagy egyenlő indexekre teljesül az

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < 0.01$$

egyenlőtlenség. (Általában, ha A jelöli a határértéket, akkor az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.)

Beírjuk tehát a_n helyére a képletét, és megoldjuk az

$$\left|\frac{n+1}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| < 0.01$$

egyenlőtlenséget. Először közös nevezőre hozunk az abszolút értéken belül:

$$\left|\frac{2(n+1)-(2n-1)}{2(2n-1)}\right| < 0.01.$$

A számlálóban elvégezve a műveleteket és összevonásokat kapjuk, hogy

$$\left|\frac{3}{2(2n-1)}\right| < 0.01.$$

A kapott tört számlálója pozitív, és a nevezője is az, hiszen sorozatok körében az n pozitív egész szám lehet. Így a tört maga is pozitív, egy pozitív szám abszolút értéke önmaga, tehát a

$$\frac{3}{2(2n-1)} < 0.01$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A következő lépésben átszorzunk a nevezőben lévő $2n-1$ tényezővel, ami minden n-re pozitív, vagyis nem fordul meg az egyenlőtlenség iránya.

$$\frac{3}{2} < 0.01\cdot(2n-1).$$

Ezután átosztva a szintén pozitív 0.01-dal, megint nem fordul meg az egyenlőtlenség iránya.

$$\frac{3}{2\cdot 0.01} < 2n-1,$$
$$\frac{300}{2} < 2n-1,$$
$$150 < 2n-1.$$

Innen

$$\frac{151}{2} < n,$$
$$75.5 < n.$$

Minden átalakítás ekvivalens átalakítás volt, tehát a kiinduló egyenlőtlenség teljesül, ha $n > 75.5$. Tehát a keresett küszöbindex $N(0.01) = 76$.

Kicsit többet is csináltunk, mint amit a feladat szövege megkövetelt, hiszen a lehető legkisebb küszöbindexet sikerült meghatároznunk. Minden 76-nál nagyobb egyenlő természetes szám is jó küszöbindex 0.01-hoz.

14. feladat: Tekintsük az $a_n = \frac{-3n-2}{2n+1}$ sorozatot. Adjunk küszöbindexet $\varepsilon = 0.02$-hoz.

Megoldás: Ugyanúgy, mint az előbb, először meghatározzuk a határértéket. Ez most $-\frac{3}{2}$. Ezért az

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$
$$\left|a_n - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| < 0.02,$$
$$\left|\frac{-3n-2}{2n+1} + \frac{3}{2}\right| < 0.02$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Ismét a közös nevezőre hozás az első lépés, amit a számláló kiszámolása követ:

$$\left|\frac{2(-3n-2)+3(2n+1)}{2(2n+1)}\right| < 0.02$$
$$\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| < 0.02.$$

A kapott tört minden n-re negatív, így abszolút értéke önmaga mínusz egyszerese:

$$\frac{-(-1)}{2(2n+1)} < 0.02,$$
$$\frac{1}{2(2n+1)} < 0.02.$$

(Nem az egyenlőtlenséget szoroztuk meg mínusz eggyel, hanem a bal oldali negatív törtet, hogy kiszámoljuk az abszolút értékét.) A hátralévő lépések már egyszerűek:

$$\frac{1}{2} < 0.02 \cdot (2n+1),$$
$$\frac{1}{2 \cdot 0.02} < 2n+1,$$
$$\frac{50}{2} < 2n+1,$$
$$12 < n\,.$$

A keresett, egyébként most is a lehető legjobb, küszöbindex tehát $N(0.02) = 13$.

Egy kis numerikus kísérlet:

$\left|a_{11} + \frac{3}{2}\right| = |-0.021739130| = 0.021739130 > 0.02$, sőt

$\left|a_{12} + \frac{3}{2}\right| = |-0.02| = 0.02$, ami nem kisebb 0.02-nál, de viszont már

$\left|a_{13} + \frac{3}{2}\right| = |-0.018518519| = 0.018518519 < 0.02$, és még nagyobb indexekre az abszolút érték még inkább kisebb 0.02-nál. A példákban látott módszerrel mindig a legkisebb küszöbindexet kapjuk

15. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \dfrac{3^{n+1}-2}{2^n+1}$ sorozat limeszét.

Megoldás: Ebben a feladatban a q^n nevezetes sorozat két példánya is szerepel $q = 3$ és $q = 2$ választással. A megadott tételből tudjuk, hogy a limesz mindkét esetben plusz végtelen. Így a tört számlálója és nevezője is végtelenbe tart, a limesz $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú. Az ilyen típusú limeszek kiszámolásakor, mint eddig is, legtöbbször a **kiemelés** segít. Olyan mennyiségeket igyekszünk kiemelni a számlálóból és a nevezőből külön-külön, hogy a kiemelés során kapott másik tényező nullától különböző konstanshoz tartson, és ez a konstans a nevezőben még nullától különbözzön is. Először picit átalakítjuk a_n képletét:

$$a_n = \frac{3^{n+1}-2}{2^n+1} = \frac{3 \cdot 3^n - 2}{2^n+1}.$$

Ezután a számlálóból kiemelünk 3^n-t, a nevezőből 2^n-t, és néhány átalakítást is elvégzünk:

$$a_n = \frac{3^{n+1}-2}{2^n+1} = \frac{3 \cdot 3^n - 2}{2^n+1} = \frac{3^n\left(3 - \frac{2}{3^n}\right)}{2^n\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)} =$$
$$= \frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{3 - \frac{2}{3^n}}{1 + \frac{1}{2^n}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{3 - \frac{2}{3^n}}{1 + \frac{1}{2^n}}.$$

A kapott szorzatban $\left(\frac{3}{2}\right)^n \to \infty$, hiszen $\frac{3}{2} > 1$. A tört számlálója 3-ba tart, hiszen $3^n \to \infty$, ezért $\frac{2}{3^n} \to 0$. Hasonlóan a nevező 2-hez tart, így a tört $\frac{3}{1} = 3$-hoz, ami egy pozitív szám, és tudjuk az egyik tételünkből, hogy egy plusz végtelenbe tartó és egy pozitív konstanshoz tartó mennyiség szorzata plusz végtelenbe tart, tehát

$$a_n = \frac{3^{n+1}-2}{2^n+1} \to \infty.$$

16. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \dfrac{2^n - 5^n}{10^n - 9^{10}}$ sorozat limeszét.

Megoldás: Az világos, hogy a nevező tart plusz végtelenbe. Megvizsgáljuk a számlálót. Mivel

$$2^n - 5^n = 5^n\left(\frac{2^n}{5^n} - 1\right) = 5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right)$$

látjuk, hogy a szorzat első tényezője plusz végtelenbe, a második tényezője -1-be tart, így a szorzat maga mínusz végtelenbe. Tehát ismét a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típussal van dolgunk. (Ha a számlálóból 2^n-t emeltünk volna ki kicsit más úton, de akkor is kijött volna, hogy a mínusz végtelenbe tart, érdemes kipróbálni.) Ezután a_n-t a módszerünkkel, kiemeléssel, átalakítjuk, figyelembe véve, hogy $10^n = 2^n \cdot 5^n$.

$$a_n = \frac{2^n - 5^n}{10^n - 9^{10}} = \frac{2^n - 5^n}{2^n \cdot 5^n - 9^{10}} = \frac{5^n\left(\frac{2^n}{5^n} - 1\right)}{5^n\left(2^n - \frac{9^{10}}{5^n}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{2^n - \frac{9^{10}}{5^n}}.$$

A kapott tört számlálója -1-be tart, a nevezője plusz végtelenbe, így a tört nullába, $a_n \to 0$.

17. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}$ sorozat határértékét.

Megoldás: Mindkét gyök alatti mennyiség, és így mindkét gyökös mennyiség is plusz végtelenbe tart, tehát a $\infty - \infty$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. Mivel ezt négyzetgyökök különbsége okozza, a gyöktelenítésnek nevezett eljárás segít a limesz kiszámolásában. Ennek lényege az alábbi azonosság:

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

Ezt alkalmazva az $A = n + 2$, $B = n - 3$ választással

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-3} = \frac{(n+2) - (n-3)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3}}.$$

Ezek az átalakítások lehetővé teszik a limesz meghatározását, hiszen az utolsó tört nevezője végtelenbe tart, így a tört nullába, $a_n \to 0$.

A szokott numerikus kísérlettel $a_{100000} \approx 0.0079057$, ami alátámasztja az eredményünket. Azt is látjuk ebből, hogy a sorozat elég lassan tart nullához. Például az előbbi feladatban szereplő sorozat esetén már $a_{10} \approx -0.001$, az a sorozat igen gyorsan tart nullába.

18. feladat: Számítsuk ki az $a_n = \sqrt{n^2 - n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n - 1}$ sorozat határértékét.

Megoldás: Ugyanazok miatt, mint az előbb most is a $\infty - \infty$ típusú határozatlan alakkal van dolgunk. A gyöktelenítés módszerét hívjuk segítségül.

$$a_n = \sqrt{n^2 - n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n - 1} = \frac{\left(n^2 - n + 2\right) - \left(n^2 + 2n - 1\right)}{\sqrt{n^2 - n + 2} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}} =$$

$$= \frac{-3n + 3}{\sqrt{n^2 - n + 2} + \sqrt{n^2 + 2n - 1}}.$$

Az utolsó törtben a számláló mínusz végtelenbe, a nevező plusz végtelenbe tart. A gyöktelenítés nem oldott meg minden, mert határozatlan alakot kaptunk. Ha azonban kiemelünk a számlálóból és a nevezőből n-et, a limesz kiszámolhatóvá válik:

$$a_n = \frac{-3n+3}{\sqrt{n^2-n+2}+\sqrt{n^2+2n-1}} = \frac{n\left(-3+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}} =$$
$$= \frac{n\left(-3+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}} = \frac{n\left(-3+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)} =$$
$$= \frac{-3+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}.$$

Az utolsó tört számlálója -3-ba tart, a gyök alatti mennyiségek mindketten 1 -be, így a nevező 2-be, tehát

$$a_n = \sqrt{n^2-n+2} - \sqrt{n^2+2n-1} \to -\frac{3}{2}.$$

19. feladat: Monoton-e az $a_n = \dfrac{n-1}{2n+1}$ sorozat valamelyik értelemben?

Megoldás: Tájékozódásul kiszámoljuk a sorozat néhány tagját. Például $a_1 = 0$, $a_{40} \approx 0.481$, $a_{1000} \approx 0.499$. Ezek a számok növekednek, és ez alapján azt tételezzük fel, hogy a sorozat növő. Tehát azt próbáljuk meg bebizonyítani, hogy $a_n \le a_{n+1}$ teljesül minden n-re, vagy minden, valamilyen küszöbszámnál nagyobb minden n-re. Mivel a_{n+1}-et úgy lehet kifejezni n-nel, hogy a sorozatot definiáló képletbe az n helyére $n+1$-et írunk, az $a_n \le a_{n+1}$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy

$$\frac{n-1}{2n+1} \le \frac{(n+1)-1}{2(n+1)+1} = \frac{n}{2n+3}.$$

Itt az elején és a végén álló törtben mindkét nevező pozitív, keresztbe szorozva velük egyszer sem fordul meg az egyenlőtlenség iránya, így azt kapjuk, hogy

$$(n-1)(2n+3) \le n(2n+1).$$

Elvégezve a műveleteket, és egyszerűsítéseket ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} 2n^2-2n+3n-3 &\le 2n^2+n \\ -3 &\le 0. \end{aligned}$$

Az az egyenlőtlenség, hogy $-3 \le 0$ minden n-re igaz, mert n-től függetlenül igaz. Ezért a sorozatunk növő az első elemétől kezdve.

20. feladat: Monoton-e az $a_n = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$ sorozat valamelyik értelemben?

Megoldás: Most például $a_{10} \approx 1.049$, $a_{100} \approx 1.005$, $a_{1000} \approx 1.0005$. Ezek a számok egyre kisebbek, ezért arra gondolunk, hogy a sorozat csökkenő, azaz $a_n \ge a_{n+1}$. Ezt az egyenlőtlenséget akarjuk igazolni. Kiírva ezt n-nel

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \ge \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Mivel $\sqrt{A}$ a pozitív A szám két négyzetgyöke közül a pozitívot jelenti, ez így is írható:

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \ge \sqrt{1+\frac{1}{n+1}} \ge 0.$$

Ebből négyzetre emeléssel, és rendezéssel

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{n} &\ge 1+\frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n} &\ge \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

adódik. Mivel a nevezők ismét pozitívok, keresztbe szorzás után ezt azt jelenti, hogy $n+1 \geq n$, vagyis $1 \geq 0$. Ez egy ismét minden n-re igaz egyenlőtlenség. Tehát a sorozatunk az első elemétől kezdve csökkenő.

Ellenőrző kérdések

9. kérdés: Mennyi az $\varepsilon = 0.01$-hez tartotó legkisebb küszöbindex az $a_n = \frac{1-n}{1-2n}$ sorozat esetén?

- 76
- 77
- 74
- 765

mehet

10. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{1-2^{2n+2}}{4^n - 3^n}$ sorozat limesze?

- 4
- -4
- ∞
- $-\infty$

mehet

11. kérdés: Mennyi az $a_n = \sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 - 1}$ sorozat határértéke?

- $\frac{3}{7}$
- $-\frac{11}{23}$
- $-\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}$

mehet

12. kérdés: Mennyi az $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$ sorozat határértéke?

- ∞
- 0
- nem létezik
- 10^{10}

mehet

Elméleti összefoglaló

A határértékek pontos megfogalmazásához szükségünk lesz a kétoldali és a bal, illetve jobb oldali pontozott környezetek fogalmára. Ezekben a definíciókban δ alatt mindig egy pici pozitív számot kell érteni.

Definíció: Legyen $\delta > 0$. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám δ **sugarú környezete** az $(a-\delta, a+\delta)$ nyílt intervallum.

Ennek tehát az a szám eleme, éppen az intervallum közepe. Egy x szám pontosan akkor eleme a δ sugarú környezetnek, ha $|x-a| < \delta$.

Definíció: Legyen $\delta > 0$. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám δ **sugarú pontozott környezete** az $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ nyílt halmaz.

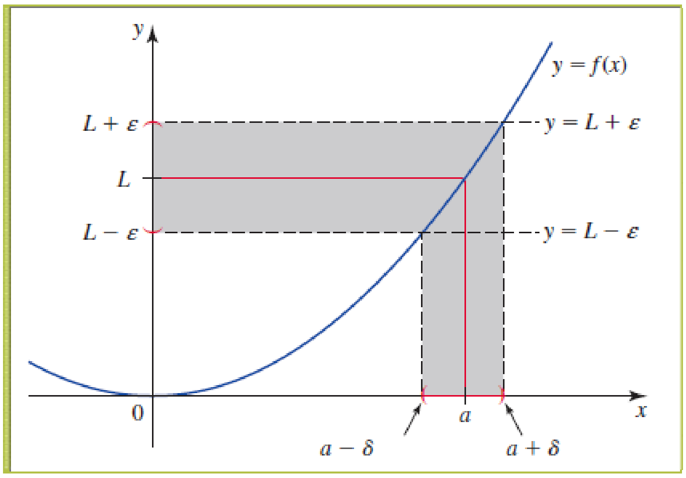
A δ sugarú pontozott környezete környezetet tehát úgy kapjuk, hogy a δ sugarú környezetből elhagyjuk az a számot, így az szétbomlik két, a bal és jobb oldalán lévő intervallum uniójára. Egy x szám pontosan akkor eleme a δ sugarú pontozott környezetnek, ha $0 < |x-a| < \delta$.

Definíció: Legyen $\delta > 0$. Az $a \in \mathbb{R}$ valós szám **bal oldali** δ **sugarú pontozott környezete** az $(a-\delta, a)$ nyílt intervallum, **jobb oldali** δ **sugarú pontozott környezete** az $(a, a+\delta)$ nyílt intervallum.

Definíció: A $-\infty$ pontozott környezetei a $(-\infty, a)$ típusú nyílt intervallumok, a ∞ pontozott környezetei az (a, ∞) nyílt intervallumok.

Ezután már megfogalmazható a határérték definíciója.

Definíció: Az f függvény **kétoldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $L \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a-nak δ sugarú pontozott környezete része D_f-nek, és $0 < |x-a| < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ezt $\lim_{x \to a} f(x) = L$ fogja jelölni.



A fenti ábra az előző definíció geometriai szemléltetése. Ez a definíció pontosan azt fejezi ki, hogy $f(x)$ tetszőlegesen közel lesz L-hez, ha x már elég közel van a-hoz.

Definíció: Az f függvény **jobb oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $L \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a-nak δ sugarú **jobb oldali pontozott környezete** része D_f-nek, és $0 < |x-a| = x-a < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ezt $\lim_{x \to a+} f(x) = L$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **bal oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $L \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a-nak δ sugarú **bal oldali pontozott környezete** része D_f-nek, és $0 < |x-a| = -(x-a) < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ezt $\lim_{x \to a+} f(x) = L$ fogja jelölni.

A következő hat definíció a véges helyen vett végtelen határértékekről szól.

Definíció: Az f függvény **kétoldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a-nak δ sugarú pontozott környezete része D_f-nek, és $0 < |x-a| < \delta$ esetén $f(x) > M$. Ezt $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **jobb oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a-nak δ sugarú pontozott jobb oldali környezete része D_f-nek, és $0 < |x-a| = x-a < \delta$esetén $f(x) > M$. Ezt $\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **bal oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen ∞, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a-nak δ sugarú pontozott bal oldali környezete része D_f-nek, és $0 < |x-a| = -(x-a) < \delta$ esetén $f(x) > M$. Ezt $\lim_{x \to a-} f(x) = \infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **kétoldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a-nak δsugarú pontozott környezete része D_f-nek, és $0 < |x-a| < \delta$ esetén $f(x) < -M$. Ezt $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **jobb oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a-nak δ sugarú pontozott jobb oldali környezete része D_f-nek, és $0 < |x-a| = x-a < \delta$ esetén $f(x) < -M$. Ezt $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$ fogja jelölni.

Definíció: Az f függvény **bal oldali határértéke** az $a \in \mathbb{R}$ helyen $-\infty$, ha tetszőlegesen nagy $M > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy a-nak δ sugarú pontozott bal oldali környezete része D_f-nek, és $0 < |x-a| = -(x-a) < \delta$ esetén $f(x) < -M$. Ezt $\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$ fogja jelölni.

A következő két definíció a végtelenben vett véges határértékről szól.

Definíció: Az f függvény ∞-ben vett határértéke az $L \in \mathbb{R}$ szám, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $x > a$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ennek jele $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

Definíció: Az f függvény $-\infty$-ben vett határértéke az $L \in \mathbb{R}$ szám, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(-\infty, -a) \subset D_f$ és $x < -a$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ennek jele $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$
.

Végül hátra van még a négy végtelenben vett végtelen határérték.

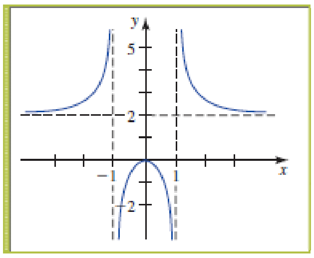
Definíció: Az f függvény ∞-ben vett határértéke a ∞, ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $x > a$ esetén $f(x) > M$. Ennek jele $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Definíció: Az f függvény ∞-ben vett határértéke a $-\infty$, ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(a, \infty) \subset D_f$ és $x > a$ esetén $f(x) < -M$. Ennek jele $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

Definíció: Az f függvény $-\infty$-ben vett határértéke a ∞, ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(-\infty, -a) \subset D_f$ és $x < -a$ esetén $f(x) > M$. Ennek jele $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

Definíció: Az f függvény $-\infty$-ben vett határértéke a $-\infty$, ha tetszőleges $M > 0$ számhoz van olyan $a > 0$ szám, hogy $(-\infty, -a) \subset D_f$ és $x < -a$ esetén $f(x) < -M$. Ennek jele $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Az alábbi ábráról leolvasható az ábrázolt függvény esetén az imént definiált 15 fajta határérték közül hat. Melyik hat, és mennyi azok értéke?



A továbbiakban persze az lesz a célunk, hogy minél több függvény mindenféle határértékét ki tudjuk számítani. Ehhez, mint majd látni fogjuk az **elemi függvények határértékeit,** a **határértékekről szóló tételeket** és néhány **nevezetes limeszt** fogunk felhasználni. Kezdjük a határérték tételekkel.

Egy bonyolult függvény az elemi függvényekből épül fel a függvényműveletek segítségével. Ezért fontos kideríteni, hogy mi a kapcsolat a függvényműveletek és a határérték között. Ezeket a tételeket hívjuk határértéktételeknek.

A **véges határértékekre,** tehát amikor a határértékek értéke véges, érvényes az alábbi tétel.

Tétel: Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to\alpha} f(x)=L$ és $\lim_{x\to\alpha} g(x)=M$. Itt $L, M\in\mathbb{R}$, és α az a, $a+$, $a-$, ∞, $-\infty$ szimbólumok egyike. Ekkor

a) $\lim_{x\to\alpha}(f(x)\pm g(x))=L\pm M$,

b) $\lim_{x\to\alpha}(f(x)g(x))=LM$,

c) $\lim_{x\to\alpha}(cf(x))=cL$, minden $c\in\mathbb{R}$ konstansra,

d) $\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{L}{M}$, feltéve, hogy $M\neq 0$.

Ha az előforduló határértékek között végtelen is van, jóval bonyolultabb a helyzet. Bevezetünk egy jelölést, amely segítségével, persze kicsit pontatlanul, ezek a tételek tömören összefoglalhatók. (A ∞ mostanáig a plusz végtelent jelentette, így lesz ez a továbbiakban is, de az alábbi tételekben a hangsúly kedvéért kiírjuk a + jelet.) A

$\boxed{+\infty}\cdot\boxed{-\infty}=\boxed{-\infty}$

jelsorozat azt fogja jelölni, hogy ha egy függvénynek **valamelyik**, (véges helyen vett kétoldali vagy egyoldali, valamelyik végtelenben vett) határértéke $+\infty$, egy másik függvénynek **ugyanott, ugyanolyan típusú** határértéke $-\infty$, akkor a szorzatuknak, szintén **ugyanott, ugyanolyan típusú** határértéke $-\infty$. Az alábbi formulákban $A\in\mathbb{R}$, és ha A a nevezőben áll, akkor $A\neq 0$.

Tétel:

$\boxed{+\infty}\pm\boxed{A}=\boxed{+\infty}$,

$\boxed{-\infty}\pm\boxed{A}=\boxed{-\infty}$,

$\boxed{+\infty}\cdot\boxed{A}=\boxed{+\infty}$, ha $A>0$,

$\boxed{+\infty}\cdot\boxed{A}=\boxed{-\infty}$, ha $A<0$,

$\boxed{-\infty}\cdot\boxed{A}=\boxed{-\infty}$, ha $A>0$,

$\boxed{-\infty}\cdot\boxed{A}=\boxed{+\infty}$, ha $A<0$,

$\boxed{+\infty}+\boxed{+\infty}=\boxed{+\infty}$,

$\boxed{-\infty}+\boxed{-\infty}=\boxed{-\infty}$,

$\boxed{+\infty}-\boxed{-\infty}=\boxed{+\infty}$,

$\boxed{-\infty}-\boxed{+\infty}=\boxed{-\infty}$,

$\boxed{+\infty}\cdot\boxed{+\infty}=\boxed{+\infty}$,

$\boxed{-\infty}\cdot\boxed{-\infty}=\boxed{+\infty}$,

$\boxed{+\infty}\cdot\boxed{-\infty}=\boxed{-\infty}$,

$\boxed{A}\div\boxed{\pm\infty}=\boxed{0}$,

$\boxed{\pm\infty}\div\boxed{A}=\boxed{\pm\infty}$, ha $A>0$,

$\boxed{\pm\infty}\div\boxed{A}=\boxed{\mp\infty}$, ha $A<0$.

$\boxed{1} \div \boxed{0+} = \boxed{+\infty}$, (a nevező a pozitív számokon keresztül tart nullához),

$\boxed{1} \div \boxed{0-} = \boxed{-\infty}$, (a nevező a negatív számokon keresztül tart nullához).

A határérték segítségével megfogalmazható a függvények egy nagyon előnyös tulajdonsága.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmazza az a szám egy nyílt környezetét. Ekkor f **folytonos** a-ban, ha $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmaz egy $[a, a+\delta)$ szerkezetű intervallumot valamilyen $\delta > 0$-ra. Ekkor f **jobbról folytonos** a-ban, ha $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$.

Definíció: Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya tartalmaz egy $(a-\delta, a]$ szerkezetű intervallumot valamilyen $\delta > 0$-ra. Ekkor f **balról folytonos** a-ban, ha $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

Tétel: Ha pontosan akkor folytonos a-ban, ha balról is és jobbról is folytonos a-ban.

Sokszor nagyon hasznos az alábbi tétel.

Tétel: Ha a g függvény folytonos L-ben, és $\lim_{x\to a} f(x) = L$, akkor $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(L)$. Itt a helyett állhat $a+$ vagy $a-$ is.

Különösen hasznos, ha egy függvény egy intervallum minden pontjában, a végpontokban a megfelelő oldalról, folytonos, pláne, ha az egész értelmezési tartományán folytonos.

Szinte az összes elemi függvény az egész értelmezési tartományán folytonos, a végpontokban legalább valamelyik oldalról. Sőt, a függvényműveletek általában nem rontják el a folytonosságot, pontosabban érvényes az alábbi tétel.

Tétel: Tegyük fel, hogy az f és a g függvények folytonosak a-ban. Ekkor

a) az $f \pm g$ függvény is folytonos a-ban,

b) az fg függvény is folytonos a-ban,

c) a cf függvény is folytonos a-ban tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén,

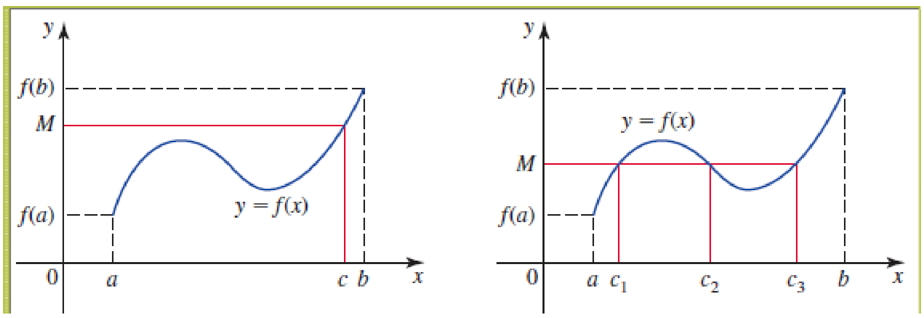
d) az $\dfrac{f}{g}$ függvény is folytonos a-ban, ha $g(a) \neq 0$.

Tétel: Ha az f függvény folytonos a-ban, a g függvény folytonos $f(a)$-ban, akkor a $g \circ f$ összetett függvény is folytonos a-ban.

A folytonos függvények egy, szemléletesen magától értetődő, tulajdonságát fogalmazza meg a következő középértéktétel.

Tétel: Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a, b]$ zárt intervallum minden pontjában, a végpontokban a megfelelő oldalról. Legyen az M szám $f(a)$ és $f(b)$ között egy tetszőleges érték, azaz $f(a) \le M \le f(b)$. Ekkor van legalább egy $c \in [a, b]$ szám, úgy, hogy $f(c) = M$.

Más szóval egy folytonos függvény két értéke között minden értéket felvesz, a grafikonja megszakítás nélkül összeköti az $(a, f(a))$ koordinátájú pontot a $(b, f(b))$ ponttal. A fenti tételt szemlélteti az alábbi ábra.



Ismertetünk két nevezetes trigonometrikus határértéket.

Tétel:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0.$

A legtöbb függvény, amivel találkozni fogunk olyan lesz, amelynek az értelmezési tartománya véges vagy végtelen hosszú intervallumok diszjunkt uniója. Mivel az értelmezési tartomány belső pontjában ezek a függvények folytonosak, csak az értelmezési tartomány szélein felvett határértékek az érdekesek.

A limesz kiszámolásakor most is, hasonlóan a számsorozatokhoz, a

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0},\ 0\cdot\pm\infty,\ \infty-\infty,\ -\infty-(-\infty),\ 1^{\infty}$$

határozatlan alakok jelentenek gondot. Ki fog derülni, hogy ezek nagyrészt ugyanolyan átalakításokkal kezelhetők, mint amilyeneket a számsorozatoknál láttunk.

Külön vizsgálatot igényel az $\dfrac{1}{0}$ típusú limesz is.

Kidolgozott feladatok

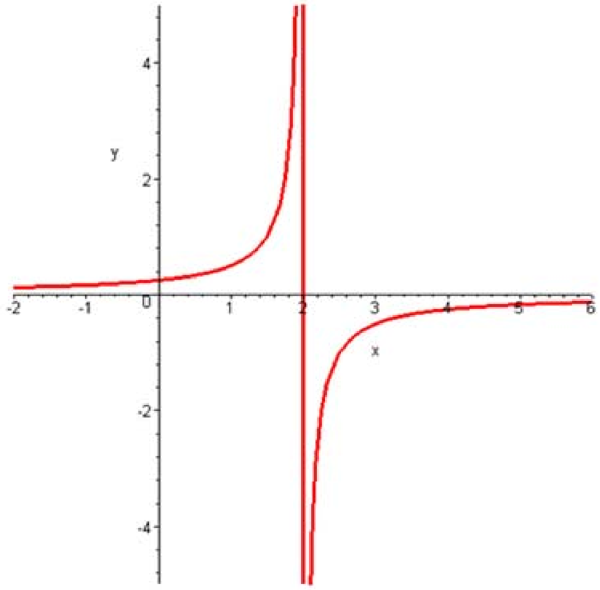
21. feladat: Tekintsük az $f(x)=\dfrac{1}{4-2x}$ függvényt, és számoljuk ki az összes, nem triviális határértékét.

Megoldás: Mostantól nem triviális határérték alatt olyan határértéket értünk, amelyet nem lehet közvetlenül behelyettesítéssel kiszámolni. Először is megállapítjuk, hogy a függvényünk értelmezési tartománya a $D_f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ halmaz. Ez két végtelen hosszú intervallum uniója. Két darabból áll, így négy "széle" van, és minden pontja belső pont, a D_f egy nyílt halmaz. Azt is látjuk, hogy az $\dfrac{1}{x}$ elemi függvény lineáris transzformáltjával van dolgunk. Így f mindenütt folytonos, ahol értelmezve van. Ezek miatt csak az alábbi limeszek az érdekesek:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to 2-}f(x),\ \lim_{x\to 2+}f(x),\ \lim_{x\to\infty}f(x).$$

Minden más határérték a helyettesítési érték, például $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\dfrac{1}{4-2\cdot 0}=\dfrac{1}{4}.$

Ha a vizsgált függvényről jó ábrát tudunk készíteni, az a határértékek leolvasását lehetővé teszi. De függvények lineáris transzformáltjának ábrázolását már ismerjük. Ehhez érdemes elvégezni a következő átalakítást: $f(x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-2}$. Ezt felhasználva az alábbi ábra mutatja a függvényünk grafikonját.

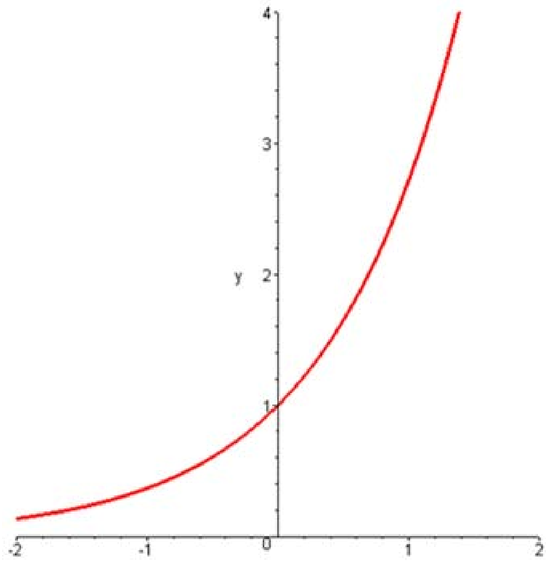


Erről már könnyen leolvassuk a kérdéses limeszeket. Mindegyiket a már bemutatott kis numerikus próbával érdemes demonstrálni. Tehát

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{4-2x}=0$, *b)* $\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{1}{4-2x}=\infty$, *c)* $\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{1}{4-2x}=-\infty$, *d)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4-2x}=0$.

22. feladat: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{1}{e^x}$ függvény minden nem triviális határértékét.

Megoldás: Most a függvényünk az e^x elemi függvény reciproka. Az e^x ábrája az alábbi:



Erről is látjuk, hogy e^x soha nem nulla, ezért f mindenütt értelmezett: $D_f=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, ami egyetlen darabból álló nyílt halmaz, két széle van, a $-\infty$ és a ∞. Csak az itt felvett határértékek a nem triviális limeszek, hiszen f mindenütt folytonos.

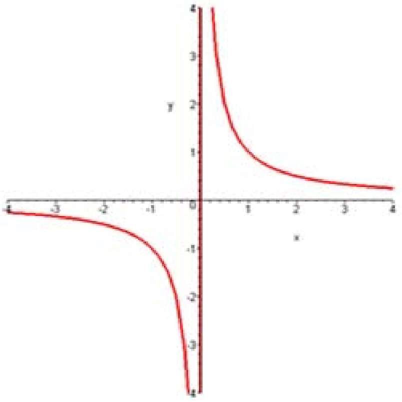
a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=\infty$, hiszen e^x ábrájáról látjuk, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, ráadásul a nullához a pozitív számokon keresztül közeledik e^x, ha x tart $-\infty$-be. Így az $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}$ határértékben az egyet egyre kisebb pozitív számmal osztjuk, ezért plusz végtelen ez a limesz. (A keretezett képleteket tartalmazó tétel utolsó előtti sora.)

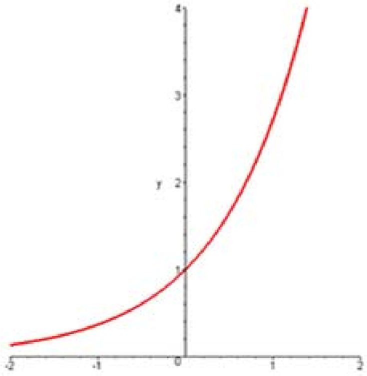
b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, hiszen e^x ábrájáról látjuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$, és így a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}$ határérték 0. (A keretezett képleteket tartalmazó tétel alulról ötödik sora.)

23. feladat: Számoljuk ki az $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ függvény minden nem triviális határértékét.

Megoldás: Függvényünk egyedül a nullában nincs értelmezve, az értelmezési tartomány a $D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ két darabból álló nyílt halmaz, aminek négy széle van. Mivel f mindenütt folytonos, ahol értelmezve van, csak ez a négy limesz a kérdéses.

Az f függvény az $\frac{1}{x}$ elemi függvénynek, mint belső függvénynek, és az e^x szintén elemi függvénynek, mint külső függvénynek a kompozíciója. Ezek ábrája van az alábbi ábrán.





a) Kezdjünk a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}$ limesszel. Az $\frac{1}{x}$ bal oldalon lévő ábrájáról látszik, hogy ha x tart $-\infty$-be, akkor $\frac{1}{x}$ a negatív számokon keresztül tart nullába. A jobb oldali ábráról leolvasható, hogy ha az exponenciális függvény argumentuma balról közeledik nullához, akkor e^x egyhez tart, (az már nem fontos, hogy alulról). Ezek miatt $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}=1.$

b) A $\lim\limits_{x\to0-} e^{\frac{1}{x}}$ limesz esetén a gondolatmenet a következő: ha x tart nullába a negatív számokon keresztül, akkor $\frac{1}{x}$ a $-\infty$-be tart. Ha az exponenciális függvény argumentuma $-\infty$-be tart, akkor e^x tart nullához, így $\lim\limits_{x\to0-} e^{\frac{1}{x}}=0.$

c) A $\lim\limits_{x\to0+} e^{\frac{1}{x}}$ limesz esetén, ha x a pozitív számokon keresztül nullába tart, akkor $\frac{1}{x}$ a ∞-be tart. Ha pedig az exponenciális függvény argumentuma ∞-be tart, akkor e^x is tart ∞-be, ezért $\lim\limits_{x\to0+} e^{\frac{1}{x}}=\infty.$

d) Végül a $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$ határérték esetén, amennyiben x-tart ∞-be, akkor $\frac{1}{x}$ a pozitív számokon keresztül tart nullába. Ha az exponenciális függvény argumentuma jobbról közeledik nullához, akkor e^x egyhez tart. Ezért $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1.$

24. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+x^2+3x+2\right)$ limeszt.

Megoldás: Ez egy határozatlan alakú limesz, mert a polinomunk középső két tagja ellenkező előjelű végtelenbe tart. Ugyanúgy, mint sorozatok esetén, a legnagyobb kitevőjű x hatvány kiemelése a megoldás kulcsa.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^3+x^2+3x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\left(-2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$$

A szorzat első tényezőjében álló limesz $-\infty$, a második tényezőben lévő -2, ezért (mivel tudjuk, hogy $\boxed{-\infty}\cdot\boxed{-2}=\boxed{+\infty}$)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-2x^3+x^2+3x+2\right)=\infty.$$

Könnyen végiggondolhatjuk, hogy minden polinomnak mindkét végtelenben valamelyik végtelen a limesze, a fenti módszer minden esetben célhoz vezet.

25. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x-1}{(2x+1)^2-4x^2}$ határértéket.

Megoldás: Az előbbi megjegyzésből is világos, hogy a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ határozatlan alakkal van dolgunk. A megoldás kulcsa ismét ugyanaz, mint a sorozatok körében már látott hasonló feladatnál: számlálóból és nevezőből is kiemeljük a levező legnagyobb kitevőjű x hatványát. Először persze a nevezőben elvégezzük a négyzetre emelést és a kivonást.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x-1}{(2x+1)^2-4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x-1}{4x^2+4x+1-4x^2}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x-1}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-x+2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+2-\frac{1}{x}}{4+\frac{1}{x}}.$$

Itt a számláló $-\infty$-be tart, ($\boxed{-\infty}+\boxed{2}-\boxed{0}=\boxed{-\infty}$), a nevező $4+0=4$-be, tehát

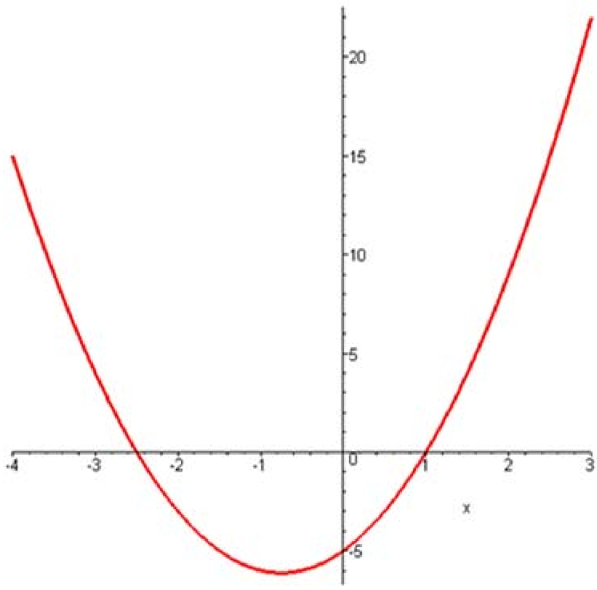
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+2x-1}{(2x+1)^2-4x^2}=-\infty,$$

felhasználva, hogy $\boxed{-\infty}\div\boxed{4}=\boxed{-\infty}$.

26. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+2x-1}{2x^2+3x-5}$ határértéket.

Megoldás: Külön-külön a számláló és a nevező is mindenütt folytonos függvényeket, a véges 1 helyen vett két- és egyoldali limeszeik is a helyettesítési értékek. Ezért a számláló 2-be, a nevező nullába tart, az $\frac{1}{0}$ problémás esettel van dolgunk. $\left(\frac{2}{0}=2\cdot\frac{1}{0}\right)$

Ilyenkor az a döntő, hogy a nevező hogyan tart nullába. Ezt legegyszerűbben a nevező grafikonjának felrajzolásával tisztázhatjuk. Ez most könnyű, mert a nevező két gyöke $-\frac{5}{2}$ és 1 , a grafikonja felfelé nyíló parabola, amely átmegy a gyökökön. Az ábrája alább látható.



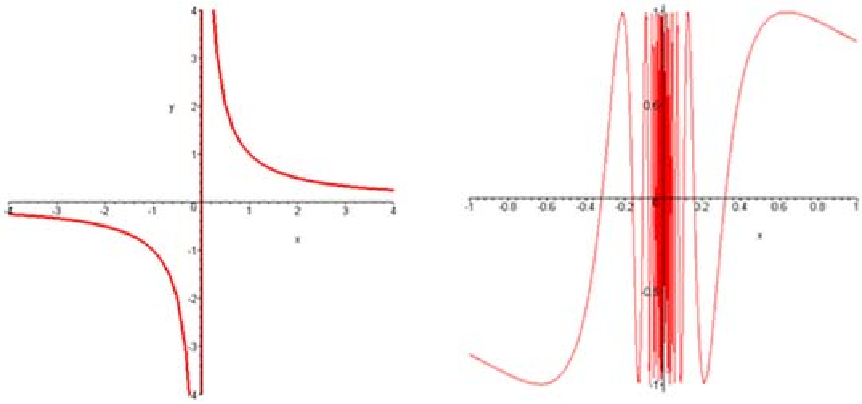
Erről látjuk, hogy ha x tart az 1 -be balról, akkor a nevező a negatív számokon keresztül tart nullába.

Ezek alapján, felhasználva a $\boxed{1} \div \boxed{0-} = \boxed{-\infty}$ tételt,

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+2x-1}{2x^2+3x-5}=-\infty.$$

Könnyen meggondolhatjuk, hogy a jobb oldali limesz ∞, azaz $\lim_{x\to 1+}\frac{x^2+2x-1}{2x^2+3x-5}=\infty.$

A kétoldali $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{2x^2+3x-5}$ határérték pedig nem létezik, amiről egy kis numerikus kísérlettel meg is győződhetünk. (Kiszámolva a tört értékét például $x = 0.999$ és $x = 1.00001$ esetén, két nagyon különböző értéket kapunk.)



A fenti ábra két függvényt mutat, amelyeknek a nullában nem létezik a kétoldali limesze, a második, oszcilláló függvénynek még az egyoldali limeszei sem léteznek.

27. feladat: Számoljuk ki a $\lim_{x\to 2}\frac{-2x^2+x+6}{x^2+2x-8}$ határértéket.

Megoldás: Kettőben a számláló és a nevező helyettesítési értéke is nulla, a $\frac{0}{0}$ határozatlan alakkal van dolgunk. Ilyen esetben a másodfokú polinomok gyöktényezős felbontása segít. A számláló gyökei $-\frac{3}{2}$ és 2, ezért gyöktényezős felbontása $-2x^2+x+6=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)$. A nevező gyökei -4 és 2, az ő gyöktényezős felbontása $x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$. Így a törtünket egyszerűsíteni tudjuk $x-2$-vel, ami után a limesz már leolvashatóvá válik. Tehát

$$\lim_{x\to 2}\frac{-2x^2+x+6}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{-2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)}{(x+4)(x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x+4}=\frac{-2\cdot\frac{7}{2}}{6}=-\frac{7}{6}.$$

28. feladat: Tekintsük az $f(x)=\begin{cases}4-x, \text{ ha } x<2,\\ \sqrt{x-1}+1, \ 2<x\end{cases}$ függvényt. Létezik-e a $\lim_{x\to 2}f(x)$ határérték, és ha igen, akkor mennyi az értéke?

Megoldás: Látjuk, hogy a 2 jobb és bal oldalán más formula definiálja f-et. Ilyenkor úgy járhatunk el, hogy kiszámoljuk 2-ben az egyoldali limeszeket. Ha azok léteznek és egyenlők, akkor létezik a kétoldali limesz is, és a közös értékkel egyenlő. De most az egyoldali limeszek egyszerűek:

a) $\lim_{x\to 2-}f(x)=\lim_{x\to 2-}(4-x)=2,$

b) $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2+}\sqrt{x-1}+1=2.$

Ezekből már következik, hogy $\lim_{x\to 2}f(x)=2.$

29. feladat: Tekintsük az $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2, \text{ ha } x<0, \\ 1, \text{ ha } x=0, \\ e^x+\cos x+1, \text{ ha } 0<x \end{cases}$ függvényt. Létezik-e a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ határérték, és ha igen, akkor mennyi az értéke?

Megoldás: Ismét az egyoldali limeszekkel kezdünk.

a) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \left(-x^2+x+2\right) = 2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} (e^x+\cos x+1) = 3.$

Külön-külön létezik a bal és a jobb oldali határérték, de nem egyenlők, így a kétoldali $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limesz nem létezik.

30. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{x}$ határértéket.

Megoldás: A számláló és a nevező is nullához tart nullában, a $\dfrac{0}{0}$ határozatlan alakkal van dolgunk. És mivel a számlálóban lévő gyökök különbsége ($\sqrt{4-x}-\sqrt{4}$) is szerepet játszik ebben, ismét a sorozatokhoz hasonlóan, gyöktelenítjük a számlálót. Ezt követően egyszerűsítés után a limesz megállapítható.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} = \lim_{x\to 0}\frac{(4-x)-4}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}.$$

31. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}$ határértéket.

Megoldás: Ismét nullához tart a számláló és a nevező is, de most a a gyökök különbsége a számlálóban és a nevezőben is hozzájárul a $\dfrac{0}{0}$ határozatlan alak kialakulásához. Ezért gyöktelenítjük a számlálót és a nevezőt is. Elvégezve és a kínálkozó egyszerűsítéseket

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{4}}{\sqrt{10-x}-\sqrt{9}} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{(\sqrt{5-x}-\sqrt{4})(\sqrt{5-x}+\sqrt{4})}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4}}}{\dfrac{(\sqrt{10-x}-\sqrt{9})(\sqrt{10-x}+\sqrt{9})}{\sqrt{10-x}+\sqrt{9}}} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{(5-x)-4}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4}}}{\dfrac{(10-x)-9}{\sqrt{10-x}+\sqrt{9}}} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1-x}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4}}}{\dfrac{1-x}{\sqrt{10-x}+\sqrt{9}}} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{10-x}+3}{\sqrt{5-x}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

32. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{5x}$ határértéket.

Megoldás: Először is a limesz $\dfrac{0}{0}$ típusú, és a tört szerkezetéről eszünkbe jut a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ nevezetes limesz. Átalakítjuk úgy a törtünket, hogy ez felhasználható legyen,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{5x} = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}.$$

Ha a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}$ limeszben elvégezzük a $3x=u$ helyettesítést, akkor, mivel $3x\to 0$ pontosan akkor igaz, ha $u\to 0$, azt kapjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = 1$. Ezt felhasználva tehát a végeredmény $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{5x} = \dfrac{3}{5}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u} = \dfrac{3}{5}.$

33. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(4x)}{\sin(3x)}$ határértéket.

Megoldás: Az világos, hogy a limesz $\dfrac{0}{0}$ típusú. Felhasználva, hogy $tg\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(4x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(4x)}{\cos(4x)}}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(4x)}\frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(4x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}.$$

De itt, mivel a $\cos x$ függvény mindenütt folytonos $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos(4x)}=\dfrac{1}{\cos 0}=1$, így elég a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(4x)}{\sin(3x)}$ határértéket kiszámolni. Ezt a törtet is át fogjuk alakítani, úgy, hogy a fenti nevezetes limesz felhasználható legyen.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\left(\sin(4x)\frac{1}{\sin(3x)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(4x\frac{\sin(4x)}{4x}\frac{3x}{\sin(3x)}\frac{1}{3x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{3}\frac{\sin(4x)}{4x}\frac{3x}{\sin(3x)}\right)=$$
$$=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)}.$$

Most már, az előző feladatban látott helyettesítést alkalmazva látjuk, hogy itt mindkét limesz eggyel egyenlő, ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(4x)}{\sin(3x)}=\frac{4}{3}.$$

34. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{2x}$ határértéket.

Megoldás: Ebben a $\dfrac{0}{0}$ típusú limeszben a számlálóban gyökök különbsége áll, ezért gyöktelenítünk, és átalakítás után a másodiknak említett nevezetes trigonometrikus limesz felhasználható.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{2x(1+\sqrt{\cos x})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2(1+\sqrt{\cos x})}\cdot\frac{1-\cos x}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+\sqrt{\cos x})}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1}{4}\cdot 0=0.$$

35. feladat: Számoljuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)(1-\cos x)}{x^2}$ határértéket.

Megoldás: Ebben a $\dfrac{0}{0}$ típusú limeszben mindkét említett nevezetes trigonometrikus limesz felbukkan alkalmas átalakítások után.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}\right)=2\cdot\lim_{2x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=2\cdot 1\cdot 0=0.$$

Ellenőrző kérdések

13. kérdés: Mennyi a $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2+1}{2x^2+x+2}$ határérték?

- $\frac{1}{2}$
- 0
- $-\infty$
- $-\frac{1}{2}$

mehet

14. kérdés: Mennyi a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{-x^2+1}{2x^2+x-3}$ határérték?

- $-\frac{2}{5}$
- $\frac{2}{5}$
- $\frac{1}{2}$
- $-\frac{1}{2}$

mehet

15. kérdés: Mennyi a $\lim\limits_{x\to 4+}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ határérték?

- 0
- 6
- 4
- -4

mehet

16. kérdés: Mennyi a $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin^2 x}{x}$ határérték?

- ∞
- 0
- $-\infty$
- 1

mehet

17. kérdés: Mennyi a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x}$ határérték?

- 0

- 1
- -1
- nem létezik

mehet