Matematika II/4

Szerző(k):

- -

Tartalom

2.4 Lineáris algebra

2.4.1 Mátrixok, műveletek mátrixokkal (1) 1

2.4.2 Műveletek mátrixokkal (2) 8

2.4.3 Determináns 23

2.4.4 Az adjungált mátrix, és az inverz mátrix 34

2.4.5 Lineáris egyenletrendszerek 47

2.4.6 Sajátértékek, sajátvektorok 67

2.4.7 Inverz mátrix 90

Tanulási cél: A mátrix fogalmának, az összeadás, a kivonás és a számmal való szorzás műveletének megismerése és elvégzésük begyakorlása.

Elméleti összefoglaló: A mátrixok téglalap alakban elrendezett számtáblázatok. Azon, hogy egy mátrix $n \times m$ típusú azt értjük, hogy a mátrixnak n sora és m oszlopa van. Az összes $n \times m$ típusú, valós számból álló márix halmazát $R^{n\times m}$ jelöli. A mátrixokat latin nagybetűkkel fogjuk jelölni, azt, hogy az A mátrix $n \times m$ típusú az $A \in R^{n\times m}$ jelőlés jelöli. A mátrix elemeit kettős indexeléssel jelöljük, az $A \in R^{n\times m}$ mátrix i -edik sorának j -edik eleme a_{ij} . Két mátrix akkor egyenlő, ha azonos a típusuk, és az azonos helyen álló elemeik rendre megeggyeznek.

Összeadás: Legyen $A,\ B \in R^{n\times m}$. Az A és B mátrix összege az a $A + B = C \in R^{n\times m}$ mátrix, amelynek i -edik sorának j -edik eleme

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, minden $i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,n,\quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,m$ indexpárra.

Ezek szereint bármely két, azonos típusú, mátrixot össze lehet adni, az eredmény is ugyanolyan típusú mátrix, az összeg mátrix elemeiet pedig úgy kapjuk, hogy összeadjuk az összedandó mátrixok azonos helyen álló elemeit.

Az összeadás kommutatív, azaz: $A + B = B + A$,

az összeadás asszociatív, azaz: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Számmal való szorzás: Legyen $A \in R^{n\times m},\ \alpha \in R$. Az A mátrix α -szorosa az a $\alpha A = C \in R^{n\times m}$ mátrix, amelynek i -edik sorának j -edik eleme

$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, minden $i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,n,\quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,m$ -re.

Vagyis mátrixot úgy szorzunk valós számmal, hogy a mátrix minden elemet megszorzzuk a valós számmal.

Érvényesek az alábbi azonosságok:

$\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A = \beta\,(\alpha A)$,

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A\,,$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B\,.$$

Legyen $A,\ B\in R^{n\times m}$. Az A és a B mátrix különbségét a következőképp definiáljuk:

$$A-B=A+(-1)B\,.$$

Szavakban megfogalmazva ez azt jelenti, hogy a különbség elemeit úgy kapjuk, hogy az A mátrix minden eleméből kivonjuk a B mátrix megfelelő elemét.

Tananyag:

Tankönyv: Dósa György: Lineáris algebra és alkalmazásai.

Fejezet:

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Legyen $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ és $B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$. Számoljuk ki $A+B$-t és $A-B$-t.

Megoldás: Mindkét mátrix 2×2 típusú, ezért mindkét művelet elvégezhető, és az eredmény is 2×2 típusú lesz.

Az összeadás definíciója alapján

$$A+B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+2 & 2+2\\ 3+1 & 4+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix},$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-2 & 2-2\\ 3-1 & 4-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}.$$

2. feladat Tekintsük az $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 4\end{bmatrix}$ mátrixokat.

Számoljuk ki a $2A - 3B$ mátrixot.

Megoldás: Mivel $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, $3B = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 9 \\ -6 & 6 & 12 \end{bmatrix}$, azt kapjuk, hogy

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 2-(-3) & 4-3 & 8-9 \\ 0-(-6) & 6-6 & 2-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

3. feladat Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki a $2(-A+B)+(A-C)$ mártixot.

Megoldás: Először a műveleti azonosságokat felhasználva átalakítjuk a kiszámolandó kifejezést.

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$2(-A+B)+(A-C) = -2A+2B+A-C = -A+2B-C.$$

Ebbe a formulába helyettesítünk ezután:

$$-A+2B-C = \begin{bmatrix} -3+2-4 & -5+4-8 \\ -2+8-3 & -1+12-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. feladat Határozzuk meg azokat az $x,\ y,\ z$ valós számokat, amelyekre igaz az alábbi összefüggés:

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & y & 3 \\ 3 & 4 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: Vezessük be a következő jelöléseket.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & y & 3 \\ 3 & 4 & z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a feladatbeli összefüggés

$$A - B = C$$

alakba írható, amiből átrendezéssel

$$A = B + C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Innen leolvasható, hogy $x = 8,\ y = 5,\ z = 2$ kell, hogy legyen.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$**. Ekkor az** $A - ((A + B) - 2A) =$

- $\begin{bmatrix} 5 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} 5 & -11 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 5 & -11 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$

2. kérdés Ha $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, akkor $4A - 7B =$

- $\begin{bmatrix} 19 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 19 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 19 \\ -10 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 19 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. kérdés Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.
Ekkor $-3A + 2B =$

- $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 & -6 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 & -6 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} -1 & -5 & -8 & -6 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 1 & -5 & -8 & 6 \end{bmatrix}$.

4. kérdés Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Ekkor $3(A - 2B + C) =$

- $\begin{bmatrix} -12 & -6 & 15 \\ -3 & 3 & -12 \\ -3 & -24 & 12 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} -12 & -6 & 15 \\ 3 & -3 & -12 \\ -3 & -24 & 12 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} -12 & 6 & 15 \\ 3 & -3 & -12 \\ -3 & -24 & 12 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} -12 & -6 & 15 \\ 3 & -3 & -12 \\ 3 & -24 & 12 \end{bmatrix}$.

5. kérdés Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $2\left((A-2B)-2(2A+B)\right) =$

- $\begin{bmatrix} -4 & 6 & 14 \\ -14 & -6 & 8 \\ -20 & -22 & -14 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} -4 & 6 & -14 \\ -14 & 6 & 8 \\ -20 & -22 & -14 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -4 & 6 & -14 \\ -14 & -6 & 8 \\ 20 & -22 & -14 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} -4 & 6 & -14 \\ -14 & -6 & 8 \\ -20 & -22 & -14 \end{bmatrix}.$

Tanulási cél: A szorzás és a transzponálás műveletének megismerése, a műveletek elvégzésének begyakorlása.

Elméleti összefoglaló: Legyen $A \in R^{n\times k},\ B \in R^{k\times m}$ mátrix. Ekkor képezhető a $C = AB \in R^{n\times m}$ szorzat mátrix, amelynek i -edik sorának j -edik eleme

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_3j + \ \ldots \ + a_{ik}b_{kj}$ minden $i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,n,\quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,m$ indexpárra.

Úgy kapjuk tehát a szorzat mátrix c_{ij} elemét, hogy az elöl álló mátrixnak tekintjük az i -edik sorát, a hátul álló mátrixnak a j -edik oszlopát, majd összeszorozzuk ezek megfelelő elemeit, (a sor első elemét az oszlop első elemével, a sor második elemét az oszlop második elemével, és így tovább), és összeadjuk ezeket a szorzatokat.

A szorzatnak tehát annyi sora lesz, mint ahány sora az elöl álló mátrixnak van és annyi oszlopa, amennyi a hátul álló mátrixnak van.

Azt a feltételt, hogy a szorzatban az elöl álló mátrixnak annyi oszlopa legyen, mint ahány sora a hátul álló mátrixnak van, kompatibilitási feltételnek nevezzük.

A szorzás nem kommutatív, azaz $AB \neq BA$.

A szorzás asszociatív, azaz $(AB)\,C = A\,(BC) = ABC$.

A szorzás mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve, azaz

$A(B + C) = AB + AC$, és

$(A + B)C = AC + BC$.

Az $A \in R^{n\times m}$ mátrix transzponáltja az az $A^T \in R^{m\times n}$ mátrix, amelynek i -edik sorának j -edik eleme

$a_{ij}^T = a_{ji}$ minden $i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,m,\quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,n$ indexpárra.

Tehát az eredeti mátrix első sorából lesz a transzponált első oszlopa, a második sorból a transzponált második oszlopa, és így tovább.

A transzponáltra vonatkozó legfontosabb azonosságok:

$$\left(A^T\right)^T = A\,,$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T\,,$$

$$(AB)^T = B^T A^T\,.$$

Tananyag:

Tankönyv: Dósa György: Lineáris algebra és alkalmazásai.

Fejezet:

Kidolgozott feladatok

1. feladat Legyen $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki az AB mátrixot.

Megoldás: Az elöl álló mátrix 2×2-es típusú, a hátul álló is 2×2-es típusú, teljesül tehát a kompatibilitási feltétel, létezik az ilyen sorrendű szorzat és az is 2×2-es típusú lesz.

Jelölje a szorzatot C, azaz legyen $C = AB$. Ekkor

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = (-1)\cdot 2 + 2\cdot 3 = -2 + 6 = 4\,.$$

Hasonlóan

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-1) = -1 - 2 = -3\,,$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (-2)\cdot 2 + 3\cdot 3 = -4 + 9 = 5\,,$$

és végül

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = (-2)\cdot 1 + 3\cdot(-1) = -2 - 3 = -5\,.$$

Tehát

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

2. feladat Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokat. Számoljuk ki az AB és a BA márixokat.

Megoldás: Kezdjük az AB szorzat kiszámolásával.

Ebben az elöl álló A mátrix $3 \times \underline{3}$ típusú, a hátul álló B mátrix $\underline{3} \times 3$ típusú. Mivel a típusokban az áláhúzott számok megeggyeznek ez a két mátrix ebben a sorrendben összeszorozható. A szorzat típusa most 3×3 lesz. Jelölje a szorzatot C. A C mátrix kilenc elemét kell tehát kiszámolnunk.

A c_{11} elem kiszámolásához az A mátrix első sorát és a B mátrix első oszlopát kell felhasználni, hiszen ez az elem az első sorban és az első oszlopban áll. Ekkor kapjuk, hogy

$$c_{11} = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 = 2 + 2 + 9 = 13\,.$$

A szorzat mátrix első sorának második elemének, a c_{12} elemnek, a kiszámolásához az A mátrix első sorát és a B mátrix második oszlopát kell felhasználni:

$$c_{12} = 1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2 = 6 + 8 + 6 = 20\,.$$

A c_{13} elem az A mátrix első sorából és a B mátrix harmadik oszlopából

$$c_{13} = 1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 1 = 3 + 10 + 3 = 16\,.$$

A szorzat mátrix második sorának első eleme, a c_{21} elem, az A mátrix második sorának és a

B mátrix első oszlopának felhasználásával

$$c_{21} = 2\cdot 2 + 4\cdot 1 + 2\cdot 3 = 4 + 4 + 6 = 14\,.$$

Hasonlóan számolva a többi elem:

$$c_{22} = 2\cdot 6 + 4\cdot 4 + 2\cdot 2 = 12 + 16 + 4 = 32\,,$$

$$c_{23} = 2\cdot 3 + 4\cdot 5 + 2\cdot 1 = 6 + 20 + 2 = 28\,,$$

$$c_{31} = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 5\cdot 3 = 4 + 1 + 15 = 20\,,$$

$$c_{32} = 2\cdot 6 + 1\cdot 4 + 5\cdot 2 = 12 + 4 + 10 = 26\,,$$

$$c_{33} = 2\cdot 3 + 1\cdot 5 + 5\cdot 1 = 6 + 5 + 5 = 16\,.$$

Tehát

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 20 & 16 \\ 14 & 32 & 28 \\ 20 & 26 & 16 \end{bmatrix}.$$

A $D = BA$ mátrix elemeit hasonlóan számolva:

$$d_{11} = 2\cdot 1 + 6\cdot 2 + 3\cdot 2 = 2 + 12 + 6 = 20\,,$$

$$d_{12} = 2\cdot 2 + 6\cdot 4 + 3\cdot 1 = 4 + 24 + 3 = 31\,,$$

$$d_{13} = 2\cdot 3 + 6\cdot 2 + 3\cdot 5 = 6 + 12 + 15 = 33\,,$$

$$d_{21} = 1\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 2 = 1 + 8 + 10 = 19\,,$$

$$d_{22} = 1\cdot 2 + 4\cdot 4 + 5\cdot 1 = 2 + 16 + 5 = 23\,,$$

$$d_{23} = 1\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 5 = 3 + 8 + 25 = 36\,,$$

$$d_{31} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 2 = 3 + 4 + 2 = 9\,,$$

$$d_{32} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 6 + 8 + 1 = 15\,,$$

$$d_{33} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 9 + 4 + 5 = 18\,.$$

Vagyis

$$BA = \begin{bmatrix} 20 & 31 & 33 \\ 19 & 23 & 36 \\ 9 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Ez a példa is mutatja, hogy a mátrixok szorzása nem kommutatív.

3. feladat Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Számoljuk ki AB és a BA szorzatokat.

Megoldás: Mind az AB, mind a BA szorzat létezik és AB 3×3-as, BA 2×2-es típusú.

Most

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix},$$

és

$$BA = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}.$$

Már a típusok különbözősége is mutatja, hogy a szorzás nem kommutatív.

4. feladat Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 11 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 12 \\ 0 & 9 & 11 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki az

AB és a BA szorzatokat.

Megoldás: Mindkét szorzat létezik és mindkettő 3×3-as típusú.

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & 17 & 16 \\ -4 & 25 & 46 \\ 7 & 31 & 51 \end{bmatrix},$$

és

$$BA = \begin{bmatrix} -5 & 17 & 16 \\ -4 & 25 & 46 \\ 7 & 31 & 51 \end{bmatrix}.$$

Látjuk, hogy a két eredmény ugyanaz. Az, hogy a szorzás nem kommutatív, nem jelenti azt, hogy nem léteznek mátrixok, amelyek egymással felcserélhetők, csak azt, hogy nem mindig felcserélhetők.

5. feladat Tekintsük az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

mátrixokat és számoljuk ki az AB szorzatot.

Megoldás: A szorzat létezik, mert teljesül a kompatibilitási feltétel, és a szorzat típusa 1×1. Az ilyen mátrixokat azonosítjuk a válós számokkal és zárójelek nélkül írjuk le. Tehát

$$AB = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 2 - 2 + 12 = 10.$$

A A mártixot, mivel csak egy sora van, sormátrixnak is hívjuk. Az ilyen mátrixok azonosíthatók a vektorokkal, most az A egy térbeli vektornak is tekinthető.

A B mátrixot, mivel egy oszlopa van, oszlopmátrixnak is hívjuk. Az ilyen mátrixok is azonosíthatók a vektorokkal, most a B is tekinthető egy térbeli vektornak.

Vegyük még észre, hogy a fenti szorzat, ha a mátrixokat vektoroknak tekintjük, éppen ezeknek a vektoroknak a skaláris szorzatával egyenlő.

$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixok szorzatát.

Megoldás: Ez a szorzat is létezik, és egy 4×1-es és egy 1×4-es mátrix szorzata 4×4-es.

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 9 & 12 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

7. feladat Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Mivel egyenlő A^3?

Megoldás: Egy mátrix különböző kitevős hatványai egymással felcserélhető, ezért, mivel

$$A^3 = AAA = A^2A = AA^2,$$

mindegy, hogy A-t szorozzuk A^2-el, vagy A^2-et A-val.

Mivel $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$,

$$A^3 = A^2A = AA^2 = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}.$$

8. feladat Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki az $\left(A + A^2\right)^2$ mátrixot.

Megoldás: Az A-val együtt az A^2 is 3×3-as mátrix, minden kijelölt művelet elvégezhető, és az eredmény is 3×3-as mátrix lesz. Mivel

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A + A^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ezt felhasználva

$$\left(A + A^2\right)^2 = (A + A^2)(A + A^2) = \begin{bmatrix} 48 & -48 & 48 \\ -48 & 48 & -48 \\ 48 & -48 & 48 \end{bmatrix}.$$

A további feladatokban annak ellenőrzését, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők és a kapott mátrixok típusának megállapítását az olvasóra bízzuk.

9. feladat Ha $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, és $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, akkor mivel egyenlő $\left(A + B^T\right)^T$?

Megoldás: Mivel

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ezért

$$A + B^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

és ezt felhasználva

$$\left(A + B^T\right)^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

De úgy is számolhatunk, hogy felhasználjuk azt, hogy összeget tagonként lehet transzponálni.

Ekkor

$$(A+B^T)^T = A^T + \left(B^T\right)^T = A^T + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

.

10. feladat Legyen $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki az $AB + B^2 + A^2 + BA$ mátrixot.

Megoldás: Ha ebben az alakjában számolnánk ki a kifejezés értékét, akkor négy szorzást és három összeadást kéne elvégeznünk. Érdemes átalakítanunk a kifejezést. Észrevehetjük, hogy az első két tagból kiemelhető (hátra) a B, az utolsó két tagból (szintén hátra) az A mátrix. Így

$$AB + B^2 + A^2 + BA = (A+B)B + (A+B)A \cdot$$

Az utolsó összeg mindkét tagjából kiemelhető előre az $A+B$ mátrix. Tehát

$$(A+B)B + (A+B)A = (A+B)(B+A) \cdot$$

Az összeadás kommutatív, így $A+B = B+A$. Vagyis amit ki kell számolnunk az $(A+B)^2 \cdot$

Minthogy

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 37 & 36 \\ 29 & 28 \end{bmatrix} \cdot$$

Így csak egy összeadást és egy szorzást kellett elvégeznünk.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés Ha $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, akkor $AB =$

- $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. kérdés Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Ekkor $A^3 =$

- $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 18 & 27 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 19 & 26 \end{bmatrix}$.

3. kérdés Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, akkor $AA^T =$

- $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & -7 & 14 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & -14 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$.

4. kérdés Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor $((A+I)^2 + I)^2 =$

- $\begin{bmatrix} 153 & -108 \\ 216 & -64 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 153 & -106 \\ 216 & -63 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 153 & -108 \\ 216 & -63 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 155 & -108 \\ 213 & -62 \end{bmatrix}$.

5. kérdés Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ebben az esetben

$$A^2 + \left(A^T\right)^2 =$$

- $\begin{bmatrix} 16 & 10 & 24 \\ 10 & 8 & 2 \\ 24 & 2 & 36 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 18 & 10 & 22 \\ 10 & 8 & 4 \\ 22 & 4 & 34 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 16 & 10 & 24 \\ 10 & -8 & 4 \\ 24 & 4 & 36 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 16 & 10 & 24 \\ 10 & 8 & 4 \\ 24 & 4 & 36 \end{bmatrix}$.

6. kérdés Ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

akkor $AB - BC =$

- $\begin{bmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -3 & 10 & -1 \\ -7 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ -3 & -10 & 1 \\ 7 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} -5 & 8 & 6 \\ 3 & -10 & -1 \\ -7 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$
- $\begin{bmatrix} -5 & -8 & 6 \\ -3 & -10 & -1 \\ -7 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$

7. kérdés Ha $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, akkor

$AB + A^T B^T =$

- $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

8. kérdés Ha $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, akkor $\left(AA^T\right)^2 =$

- $\begin{bmatrix} 164 & 152 \\ 152 & 145 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 145 & 152 \\ 152 & 164 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 154 & 152 \\ 152 & 164 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 145 & 150 \\ 150 & 146 \end{bmatrix}$.

Tanulási cél: A determinánsok kiszámolásának begyakorlása.

Elméleti összefoglaló:

Minden négyzetes mátrixhoz hozzárendelhető egy szám, a mátrix determinánsa. Az A mátrix determinánsát $\det(A)$, vagy $|A|$ jelöli. A definíció egy rekurzív definíció, azt mondja meg, hogy egy adott determinás kiszámolását hogyan kell visszavezetni kisebb méretű determinánsok kiszámolására.

A 2×2-es mátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

A 3×3-as mátrix determinánsa, az első sor szerint kifejtve,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

.

Itt A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminány. Ezt úgy kapjuk, hogy töröljük az eredeti determináns a_{ij}-t tartalmazó sorát és oszlopát és a megmaradt számokból álló determinánst megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-el.

Egy determináns bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejthető. Mindig a sor, vagy oszlop minden elemét megszorozzuk az elemhez tartozó előjeles aldeterminánssal, és ezeket a számokat összeadjuk.

Ez magában foglalja azt, hogy hogyan kell egy 4×4-es determinánst, bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejtve visszavezetni négy 3×3-as determináns kiszámolására, és így tovább.

Egy determinánst úgy kell megszorozni egy számmal, hogy valamelyik sor, vagy valamelyik oszlop minden elemét megszerozzuk a számmal. Érvényes a detreminánsok szorzástétele, mely szerint

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Számos tétel szól arról, hogy hogyan változik meg egy determináns értéke, ha különféle átalakítást hajtunk végre a mátrixon.

A leggyakrabban alkalmazott a következő.

Tekintsünk egy determináns és válasszuk ki az i -edik és a j -edik sorát. Ha az i -edik sor tetszőleges számszorosát hozzáadjuk a j -edik sorhoz, az így kapott sor lesz az új j -edik sor, a többi sort pedig nem változtatjuk meg, akkor ennek az új determinánsnak ugyanannyi az értéke, mint az eredetinek.

Ezzel azt lehet elérni, hogy egy sorban, vagy egy oszlopban egy elemet kivéve minden elem nulla legyen. ezután persze e szerint a sor vagy oszlop szerint érdemes a determinánst kifejteni.

Tananyag:

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Számítsuk ki a $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ determináns értékét.

Megoldás: A detremináns definíciója alapján

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 6 - (-4) = 10.$$

2. feladat Számoljuk ki a $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ detreminánst.

Megoldás: Ne zavarjon meg minket, hogy most a determináns elemei változók és nem konkrét valós számok. Ha meggondoljuk, egy determináns kiszámolása során csak arra van szükség, hogy az elemeket egymással és valós számmal lehessen szorozni, és az elemeket össze tudjuk adni. Például a vektoriális szozáskor egy olyan determinánst számolunk ki, amelynek egyik sorában vektorok, a többiben valós számok állnak.

Most tehát

$$\begin{vmatrix} \sin\ \alpha & -\cos\ \alpha \\ \cos\ \alpha & \sin\ \alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha - (-\cos^2\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \cdot$$

3. feladat Számoljuk ki a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ determinánst.

Megoldás: Kiszámoljuk a determináns értékét úgy, hogy kifejtjük az első sora szerint. Ekkor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-3-1) - 2\cdot(1-2) - 1\cdot(-1-6) = -4+2+7 = 5\cdot$$

Tudjuk, hogy egy determinánst bármelyik sora vagy oszlopa szerint ki lehet fejteni. Kiszámoljuk úgy is a determinánst, hogy kifejtjük a második oszlopa szerint. Ekkor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-2(1-2) + 3(-1+2) - (1-1) = 2+3 = 5\cdot$$

4. feladat Számítsuk ki az $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ determinánst.

Megoldás: Tudjuk, hogy ha egy determinánsban az egyik sor valahányszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz és a többi sort változatlanul hagyjuk, akkor nem változik meg a determináns értéke. Ezt felhasználva el fogjuk érni, hogy az első oszlopban az első elemen kívül minden

elem nulla legyen. Látjuk, hogy ehhez az első sor mínusz egyszeresét kell hozzáadni a második, és a harmadik sorhoz is.

Tehát hozzáadva az első sor mínusz egyszeresét a második sorhoz, kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Most hozzáadjuk az első sor mínusz egyszeresét a harmadik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ha most az utolsó determinást kifejtjük az első oszlop szerint, akkor csak egy adjungált aldeterminánst kell kiszámolni.

Így tehát

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1.$$

Már háromszor hármas determinást is, nagyobb méretűt pedig méginkább, ezzel a módszerrel érdemes kiszámolni. Látjuk, hogy igen előnyös, ha a determinánsnak valamelyik eleme nulla, hiszen ekkor ennek az elemnek a sorában vagy oszlopában a többi elem aránylag könnyen nullává tehető.

5. feladat Számítsuk ki a $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ determinánst.

Megoldás: A determináns egyetlen eleme sem 1, de ezen most könnyen segíthetünk. Például adjuk hozzá az első sor mínusz kétszeresét a második sorhoz. Ekkor

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -9 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Mostmár a második sorral manipulálhatunk. Adjuk hozzá ennek mínusz kétszeresét az első sorhoz, mínusz hétszeresét a harmadik sorhoz. Így az alábbi determináshoz jutunk.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & -9 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 24 & 4 \\ 1 & -9 & 0 \\ 0 & 68 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ez a determinást pedig kifejtve az első oszlopa szerint azt kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 0 & 24 & 4 \\ 1 & -9 & 0 \\ 0 & 68 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 24 & 4 \\ 68 & 2 \end{vmatrix} = -1(48 - 272) = 224.$$

6. feladat Számítsuk ki a $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ determinánst.

Megoldás: Sok egyes van, számos út kínálkozik. Például a negyedik oszloppal manipulálva elérjük, hogy az első sorban az utolsó elemet kivéve minden elem nulla legyen. Ehhez a negyedik oszlop mínusz egyszeresét kell a második és harmadik oszlophoz, a mínusz kétszeresét az első oszlophoz hozzáadni. Így

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Kifejve ezt az első sora szerint

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ne feledkezzünk meg a mínusz előjelrő, $(-1)^{1+4} = -1$.

Az utolsó determinánsban adjuk hozzá a második sort a harmadikhoz. Ekkor arra jutunk, hogy

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ezt kifejtve a harmadik oszlopa szerint

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 1 - (-4) = 5.$$

(Mivel $(-1)^{2+3} = -1$, a kétszer kettes aldetermináns előtt $(-1)\cdot(-1) = 1$ a szorzó.)

7. feladat Számoljuk ki az $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ determinánst.

Megoldás: Kivonjuk az első sor kétszeresét a második, haromszorosát a harmadik és négyszerersét a negyedok sorból. Ekkor
rögtön kifejtve az első oszlop szerint.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix}$$

.

Az utolsó egyenlőséget úgy kaptuk, hogy mindhárom sorból kiemeltünk -1-et, tehát a szorzó végül is $(-1)^3 = -1$ lett.

Manipulájunk most az első oszloppal. Az első oszlop kétszeresét vonjuk ki a másodikból, háromszorosát a harmadikból.
Ekkor

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & -4 & -8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = -(-32-(-16)) = 16$$

.

9. feladat Számoljuk ki az $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & b \\ -a & -a & b \end{vmatrix}$ determinánst.

Megoldás: Hozzáadva az első sort a második és harmadik sorhoz is az

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a+b \\ 0 & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

determinánst kapjuk. Ezt kifejtve az első oszlop szerint

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a+b \\ 0 & 0 & a+b \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 2a & a+b \\ 0 & a+b \end{vmatrix} = a\left(2a(a+b)-0\right) = 2a^3 + 2a^2b$$

.

10. feladat Oldjuk meg az $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ egyenletet.

Megoldás: A determináns értéke nyilván függ x-től, és éppen azokat az x-eket keressük, amelyekre ez a kifejezés nulla. Először meghatározzuk a determinánst. Csináljuk azt, hogy kivonjuk a második oszlop kétszeresét az első, háromszorosát a harmadik oszlopból. Ekkor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & x-6 \\ 0 & 1 & 0 \\ x-2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Kifejtve ezt a második sor szerint

$$\begin{vmatrix} -3 & x-6 \\ x-2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (x-2)(x-6) = -(x-2)(x-6)$$

adódik.

Ez utóbbi kifejezés $x = 2$ és $x = 6$ esetén nulla, ezek tehát az eredeti egyenlet megoldásai.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$

- -1.
- 1.
- 0.
- 2.

2. kérdés $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

- -65.
- 65.
- 56.
- -56.

3. kérdés $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

- 4.
- 3.
- 2.
- 1.

4. kérdés $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

- -2.
- -1
- 1.
- 2.

5. kérdés $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 2 \end{vmatrix} =$

- $8 + 6x^2 + 2x^3$.
- $8 - 6x^2 + x^3$.
- $2x^3 - 6x^2 - 8$.
- $2x^3 - 6x^2 + 8$.

6. kérdés $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

- -6.
- 6.
- -7.
- 7.

7. kérdés Milyen x -re lesz $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$?

- $-\frac{10}{3}$.
- $\frac{10}{3}$.
- $\frac{3}{10}$.
- $-\frac{3}{10}$.

8. kérdés $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

- 1.
- -1.
- 0.
- 2.

Tanulási cél: Begyakorolni az inverz mátrix kiszámolását az adjungált mátrix felhasználásával.

Elméleti összefoglaló: Egy négyzetes mártix $\mathrm{adj}\,(A)$-val jelölt adjungáltját úgy kapjuk, hogy minden elem helyére beírjuk az elemhez tartozó élőjeles aldetermináns értékét, és vesszük az így kapott mátrix transzponáltját.

Ha egy négyzetes mártix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixnak van A^{-1}-el jelölt inverz mátrixa, ami

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}\,(A).$$

Az inverz mátrix legfontosabb tulajdonsága, hogy $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, ahol I a (megfelelő méretű) egységmátrix.

Érvényes, hogy $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Tananyag:

Kidolgozott feladatok:

1. feladat Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix transzponáltját.

Megoldás: Tudjuk, hogy transzponáláskor az eredeti mátrix sorait fel kell cserélni az oszlopaival. Az első sorból lesz a transzponált első oszlopa, a masodik sorból a transzponált második oszlopa, és így tovább. Tehát

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Persze úgy is megkaphatjuk a transzponáltat, hogy a főátlóra tükrözzük az eredeti mátrixot.

2. feladat Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix transzponáltját.

Megoldás: Különösen nagyobb méretű, vagy nem négyzetes mártixok esetén a főátlóra való tükrözést könnyen el lehet rontani, biztonságosabb a sor-oszlop cserével számolni a transzponáltat.

Most azt kapjuk, hogy

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. feladat Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az A^T mátrixot.

Megoldás: A transzponált a sor- oszlop cserével az alábbi 2×3-as mátrix:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. feladat Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mártix adjungáltját.

Megoldás: Tudjuk, hogy

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az eredeti mátrix a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldetermináns.

Kiszámoljuk először A_{11}-et. Ehhez, gondolatban töröljük a eredeti mátrix a_{11} elemet tartalmató sorát és oszlopát, és a megmaradt számokból alkotott aldeterminánst megszorozzuk $(-1)^{1+1} = 1$-el. A törlés után most egy 1×1-es aldetermináns marad, amelynek egyetlen eleme 3. Emlékezzünk arra, hogy egy egyetlen számból álló 1×1-es mátrix determinánsa, definíció szerint, a szóbanforgó szám. Ezért

$$A_{11} = 3.$$

Hasonlóan eljárva kapjuk, hogy $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$, hiszen a 2-es elem sorának és oszlopának törlése után az 1 elemet tartalmazó 1×1-es aldeterminánst kell kiszámolnunk.

Ugyanígy $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$.

Végül $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) = -1$.

Ezeket felhasználva

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. feladat Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix adjungáltját.

Megoldás: Most

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T.$$

Kiszámoljuk sorban az A_{ij} előjeles aldeterminánsokat.

A_{11} a mártix $a_{11} = 2$ elemét tartalmazó sor és oszlop törlése után megmaradó $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ aldetermináns $(-1)^{1+1} = 1$-szerese, azaz

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5.$$

Hasonlóan számolva

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \,.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 0) = -1 \,,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \,,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 2) = -2 \,.$$

Végül az utolsó sor elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsok:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \,,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 0) = -6 \,,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \,.$$

Így tehát

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Látjuk, hogy az adjungáltat elég nehéz számolni, a leggyakoribb hiba az aldeterminánsok előjelének elhagyása és a transzponálás elmaradása szokott lenni, ezekre is ügyelni kell.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ mátrix adjungáltját.

Megoldás: A mátrixunk 4×4-es, tehát 16 darab 3×3-as aldeterminánst kell majd kiszámolnunk, ami elég sok munkát sejtet. Mivel azonban a mátrixunkban igen sok elem nulla, ezek közül sok kiszámolása egyszerű lesz.

Például

$A_{11} = 0$, hiszen az a_{11} elem törlése után megmaradó aldetermináns első oszlopa csupa nulla elemből áll, és így a determinánsa is nulla.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1 .$$

(A 3×3-as aldeterminánst az első oszlopa szerint fejtettük ki.)

$A_{13} = 0$, (mert az aldeternimáns középső oszlopa csupa nullát tartalmaz).

$A_{14} = 0$, ugyanazért, mint az előbb.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1 .$$

$A_{22} = A_{23} = A_{24} = 0$, mert a megfelelő aldeterminánsoknak mindig csupa nulla áll az első oszlopában.

$A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0$, mert most az aldeterminánsok utolsó oszlopa csupa nulla.

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

$$A_{41} = A_{42} = 0 .$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

$$A_{44} = 0 .$$

Mindezek alapján

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

7. feladat Számoljuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

Megoldás: Tudjuk, hogy

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) .$$

Kiszámoljuk először a determinánst.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1 .$$

Ezután meghatározzuk az adjungált mátrixot.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} .$$

Ezek felhasználásával

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Könnyen leellenőrizhető, hogy valóban

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

8. feladat Számoljuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét.

Megoldás: A determinánst úgy fogjuk kiszámolni, hogy a második sorral manipulálva elérjük, hogy a harmadik oszlop első és utolsó eleme nulla legyen. Ehhez a középső sor egyszeresét hozzáadjuk az első sorhoz, a kétszeresét pedig a harmadik sorhoz. Ekkor

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Az adjungált aldeterminánsok:

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 1, \quad A_{13} = 1,$$

$$A_{21} = 2, \quad A_{22} = -1, \quad A_{23} = 2,$$

$$A_{31} = 1, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = 0.$$

Tehát

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ismét győződjön meg az olvasó, hogy $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$ mátrix inverzét.

Megoldás: Most, kivonva az első sor kétszeresét a másodikból, háromszorosát a harmadikból és kifejtve a kapott detreminánst a harmadik oszlopa szerint:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2 .$$

A előjeles aldeterminánsok pedig

$$A_{11} = 3, \quad A_{12} = -1, \quad A_{13} = -3,$$

$$A_{21} = 0, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = -2,$$

$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = -1, \quad A_{33} = 3.$$

Ezért

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

.

Ellenőrző kérdések

A következő feladatokban ne behelyettesítést végezzünk, hanem számoljuk ki az inverz mátrixot, és az alapján válaszoljunk a kérdésekre.

1. kérdés Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Ekkor $A^{-1} =$

- $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

2. kérdés Ha $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, akkor $A^{-1} =$

- $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. kérdés Ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, akkor $A^{-1} =$

- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. kérdés Legyen $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ekkor $A^{-1} =$

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5. kérdés Ha $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, akkor $A^{-1} =$

- $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.
- $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

6. kérdés Ha $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, akkor $A^{-1} =$

- $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.
- $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
- $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$.
- $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Tanulási cél: Begyakorolni lineáris egxenletrendszerek Gauss-féle algoritmussal történő megoldását.

Elméleti összefoglaló: A Gauss-féle algoritmus során alkalmazható lépések:

a) két egyenlet felcserélése,

b) egy egyenlet tetszőleges, nullától különböző számmal való megszorzása,

c) két egyenlet összeadása, ilyenkor az **egyik** egyenlet helyére az összeget írjuk, a többi egyenlet marad változatlan.

Ezek az átalakítások az egyenletrendszer kibővített mátrixán is végrehajthatók, ilyenkor a mátrix soraira kell öket alkalmazni.

Ezekkel az átalakításokkal elérhető, hogy az együtthatómátrix felső háromszögmátrixá váljon, azaz a főátlója alatt minden elem nulla legyen. (A főátlót azok az elemek alkotják, amelyeknek a sor és az oszlop indexe megegyezik.)

Ha az együtthatómátrix felső háromszög mátrix, akkor leolvasható, hogy van-e megoldás, és ha van, akkor a legalsó egyenletből kiindulva az ismeretlenek sorban meghatározhatók.

Akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek, ha a felső háromszögmátrixá transzformálás után a kibővített mátrixnak van olyan sora, amelyben minden elem nulla, kivéve a sor utolsó elemét.

Tananyag:

Kidolgozott feladatok

1. feladat Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ -2x & + & 2y & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: Eső lépésként felírjuk az egyenletrendszer kibővített mátrixát. Ez most

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adjuk hozzá az első sor kétszeresét a második sorhoz. Ekkor az alábbi mátrixot kapjuk.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Ezzel az (első két oszlopból álló) együtthatómátrixot felső háromszögmátrixá alakítottuk, és ezután az egyenletrendszer megoldása meghatározható. A utolsó mátrix ugyanis azt, az eredeti egyenletrenszerrel ekvivalens, egyenletrendszert jelenti, hogy

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 3. \\ & & 6y & = & 6 \end{array}$$

A második egyenletből $y = 1$. Ezt visszaírva az első egyenletbe

$$x + 2 = 3$$

adódik, amiből $x = 1$.

A egyetlen megoldás tehát: $x = 1, \quad y = 1$.

2. feladat Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 3y & = & -1 \end{array}$$

egyenletrendszert.

Megoldás: Most is az az első lépés, hogy felírjuk az egyenletrendszer kibővített mátrixát. Ekkor az

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk.

Mielőtt az együtthatómátrix felső háromszögmátrixá transzformálását elkezdenénk érjük el, hogy az első sor első eleme 1 legyen. Ehhez a második sor kétszeresét kivonjuk az első sorból. Így az

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixhoz jutunk.

Mostmár kinullázhatjuk az egyes alatti számot, úgy, hogy az első sor kétszeresét kivonjuk a második sorból. Ekkor

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 13 & -13 \end{bmatrix}$$

adódik.

Az együtthatómátrix felső háromszögmátrix, a megoldás meghatározható. Az utolsó mátrix által meghatározott egyenletrendszer

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 5y & = & 6 \\ & & 13y & = & -13 \end{array} .$$

A második egyenletből $y = -1$. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve

$$x + 5 = 6,$$

amiből $x = 1$.

Most is egyetlen megoldás van: $x = 1, \quad y = -1$.

3. feladat Odjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Megoldás: Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az első sor első eleme szerencsére 1, ezért rögtön elkezdhetjük az együttható mátrix felső háromszögmátrixá transzformálását. Elször az első sor kétszeresét kivonjuk a második sorból, majd az első sort hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Így az alábbi mátrixhoz jutunk

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Akkor tudnánk legkényelmesebben folytatni a háromszögmátrixá transzformálást, ha a második sor második eleme 1 lenne, de nem az. Ezen azonban könnyen segíthetünk.

Cseréljük most meg a második és a harmadik sort, majd osszuk el kettővel az új második sort. Ekkor nyerjük, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

A következő lépésként a második sor háromszorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Ekkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az első három oszlop által alkotott együttható mátrix felső háromszögmátrixá vált. Felírjuk a megoldást.

Az utolsó mátrix által kódolt egyenletrendszer

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3. \\ & & y & + & z & = & 2 \\ & & & & 2z & = & 2 \end{array}$$

A harmadik egyenletből $z = 1$. Ezt felhasználva a második egyenletből $y = 1$. Végül ezek behelyettesítésével az első egyenletből $x = 1$.

Ismét egyértelmű megoldás van tehát: $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$.

4. feladat Oldjuk meg az

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & - & z & = & -1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & 2y & + & z & = & 4 \end{array}$$

egyenletrendszert.

Megoldás: Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Sajnos az első sor első eleme nem 1, de ha a második sort kivonjuk az elsőből, akkor elérjük, hogy az legyen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Elkezdjük a felső háromszögmátrixá transzformálást. Először az első sor kétszeresét kivonjuk a második sorból, majd az első sor négyszeresét kivonjuk a harmadik sorból. Ekkor a mártixunk így alakul

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Osszuk el most a második sort mínusz öttel. Így elérjük, hogy a második sor második eleme egy legyen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Adjuk most hozzá a második sor hatszorosát a harmadik sorhoz. Így

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

adódik. Ez az

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ & & & & 3z & = & 6 \end{array}$$

egyenletrendszert jelenti.

Mostmár az utolsó egyenletből $z = 2$. Ennek behelyettesítésével a második egyenletből $y = 1$. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe $x = 0$.

Az egyértelmű megoldás tehát: $x = 0, \quad y = 1, \quad z = 2$.

5. feladat Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & -1 \\ 3x & + & y & - & z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array}$$

Megoldás: Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Első lépésként az első sor háromszorosát kivonjuk a második sorból, majd a első sort kivonjuk a harmadik sorból. Ekkor a következő mátrixot nyerjük.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Vonjuk most ki a második sort a harmadikból. Ekkor kapjuk az

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot.

Az együthatómátrix most is felső háromszögmátrix, rátérhetünk a megoldás meghatározására.

Az utolsó mátrix az alábbi egyenletrendszert jelenti.

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & -1 \\ & & 4y & + & 2z & = & 6 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Itt az utolsó egyenlet egy nyilvánvaló összefüggés, és azt jelenti, hogy az eredeti egyenletrendszerben a harmadik egyenlet az első kettő következménye, ha azok teljesülnek, akkor a harmadik is automatikusan teljesül.

A második egyenletben egynél több ismeretlen szerepel, most kettő. A két ismertlen közül az egyiket kifejezhetjük a másikkal. Például kifejezhetjük az y ismeretlent a z ismeretlennel. Ekkor kapjuk, hogy

$$y = \frac{6}{4} - \frac{2}{4} \cdot z = \frac{3}{2} - \frac{z}{2}.$$

Ha ezt visszaírjuk az első egyenletbe, akkor az x ismeretlent is kifejezhetjük a z -vel az alábbi módon:

$$x - (\frac{3}{2} - \frac{z}{2}) - z = -1,$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{z}{2}.$$

Akármi is a z értéke, ha $y = \frac{3}{2} - \frac{z}{2}$, és $x = \frac{1}{2} + \frac{z}{2}$, akkor mind a három eredeti egyenlet teljesül.
Végtelen sok megoldása van tehát az egyenletrendszerünknek.

Szokás ezeket az alábbi paraméteres alakban megadni:

$$\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \\ y & = & \frac{3}{2} - \frac{t}{2}, \qquad t \in R \\ z & = & t \end{array}$$

Például, ha $t = 1$, akkor kapjuk az $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$ megoldást, amelyet behelyettesítéssel könnyen leellenőrizhetünk.

Ha $t = -1$, akkor kapjuk az $x = 0, \quad y = 2, \quad z = -1$ megoldást.

Észrevehetjük még, hogy a megoldások paraméteres megadása pontosan olyan, mint egy egyenes paraméteres egyenletrendszere.

Valóban erről van szó. Ugyanis három ismeretlen esetén az egyenletrendszer egyenletei egy-egy sík egyenletei. Egyértelmű megoldás van, ha ezek a síkok egy ponton mennek át, végtelen sok megoldás van, mint a mi esetünkben, ha a síkok egy egyenesen mennek át. Ennek az egyenesnek a pontjainak a koordinátái adjak a megoldáshalmazt, ezt adtuk meg az előbb paraméteres egyenletrendszer segítségével. Végül nincs megoldás, ha a síkok között

vannak párhuzamos, de nem egybeeső síkok.

6. feladat Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & & & = & 1 \end{array}$$

Megoldás: A kibővített mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Adjuk hozzá az első sort a msodikhoz és vonjuk ki az első sor kétszeresét a harmadik sorból. Így kapjuk az

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrixot.

Adjuk most hozzá a második sort a harmadikhoz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Az ennek a mátrixnak megfelelő egyenletrendszer az alábbi.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & - & 3y & + & 2z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & -1 \end{array}$$

Itt az utolsó egyenlet nyilván ellentmondás, a fenti egyenletrendszernek tehát nincs megoldása.

7. feladat Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ -x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszert.

Megoldás: Ne zavarjon meg minket, hogy csak három ismeretlen van, de négy egyenlet. Ez csak annyit jelent, hogy ha van megoldás, akkor legalább az egyik egyenlet a többi következménye. A megoldás menete ugyanaz, mint eddig.

A kibővített mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az első sor kétszeresét hozzáadva a második sorhoz, a mínusz kétszeresét hozzáadva a harmadik sorhoz és az egyszeresét hozzáadva a negyedik sorhoz nyerjük az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot.

Következő lépésként cseréljük fel a második sort a negyedikkel.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Adjuk hozzá ezután a második sor háromszorosát a harmadik sorhoz, mínusz háromszorosát a negyedik sorhoz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ha most a hrmadik sort kivonjuk a negyedikből kapjuk a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot.

Ez az

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszert jelenti.

A $z = 0$ értéket beírva a második egyenletbe $y = 1$, ezeket beírva az első egyenletbe $x = -1$ adódik.

Az egyetlen megoldás tehát: $x = -1, \quad y = 1, \quad z = 0$.

8. feladat Oldjuk meg a

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & - & u & = & 1 \\ -x & + & y & + & 2z & + & u & = & 1 \end{array}$$

egyenletrendszert.

Megoldás: Ha több az ismeretlen, mint az egyenlet, mint most is, akkor, ha van megoldás, akkor végtelen sok van.

A kibővített mátrix most

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Első lépésként cseréljük fel az első két sort.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Adjuk ezután hozzá az első sor mínusz kétszeresét a második sorhoz, egyszeresét a harmadik sorhoz. Ekkor kapjuk az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot.

Kényelmes lenne, ha most a második sor második eleme egyes lenne. Ezt most csak úgy tudnánk elérni, hogy a mátrixban törtek is megjelennek. Ez nem látszik előnyösnek. Szerencsére a harmadik sor kinullázandó második eleme a mínusz három egész számú többszöröse, konkrétan a mínusz egyszerese. Adjuk ezért hozzá a második sort a harmadikhoz. Kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az ennek megfelelő egyenletrendszer

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & - & u & = & 1 \\ & - & 3y & - & z & + & 3u & = & -2 \\ & & & & 2z & + & 3u & = & 0 \end{array}$$

Ismét végtelen sok megoldás van. Ha $u = t$, akkor a harmadik egyenletből $z = -\frac{3}{2}t$.

Ezeket beírva a második egyenletbe

$$-3y + \frac{3}{2}t + 3t = -2,$$

$$-3y + \frac{9}{2}t = -2,$$

$$-3y = -2 - \frac{9}{2}t,$$

$$y = \frac{2}{3} + \frac{3}{2}t$$

adódik.

Ha pedig ezeket behelyettesítjük az első egyenletbe, kapjuk, hogy

$$x + \frac{4}{3} + 3t - \frac{3}{2}t - t = 1,$$

$$x - \frac{1}{2}t = -\frac{1}{3},$$

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t.$$

A végtelen sok megoldás tehát a t paraméter függvényében:

$$\begin{array}{lcrcl} x & = & -\frac{1}{3} & + & \frac{1}{2}t\,, \\ y & = & \frac{2}{3} & + & \frac{3}{2}t \\ z & = & -\frac{3}{2}t & & \\ u & = & t & & \end{array}$$

ahol t tetszőleges valós szám.

9. feladat Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & u & = & -2 \\ 4x & + & 3y & + & 2z & + & u & = & 20 \\ -x & - & y & + & z & + & u & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & - & u & = & 4 \end{array}$$

Megoldás: A kibővített mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 20 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Hozzáadjuk az első sor mínusz négyszeresét a másodikhoz, egyszeresét a harmadikhoz és mínusz egyszeresét a negyedikhez.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & 28 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ha most a negyedik sort elosztjuk hárommal, majd felcseréljük a második sorral kapjuk az

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -2 & 5 & 28 \end{bmatrix}$$

mátrixot.

Ezután a második sor kétszeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz, a hétszeresét pedig levonjuk a negyedik sorból.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Végül adjuk hozzá a harmadik sort a negyedikhez.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

Ez a mátrix az

$$\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & - & u & = & -2 \\ & & y & & & & & = & 2 \\ & & & & 2z & & & = & 6 \\ & & & & & & 5u & = & 20 \end{array}$$

egyenletrendszert jelenti.

Ezekből az egyenletekből $u = 4, \quad z = 3, \quad y = 2, \quad x = 1$.

Ellenőrző kérdések

1. kérdés Az

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & y & = & 2 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}$$

egynletrendszernek

- végtelen sok megoldása van, mégpedig $x = 1 - t, \quad y = 1 + t, \quad t \in R$.
- nincs megoldása.
- egyértelmű megoldása van, és ez $x = 1, \quad y = 1$.
- végtelen sok megoldása van, és $x = 2 - t, \quad y = 1 + t, \quad t \in R$.

2. kérdés A

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 5 \end{array}$$

egyenletrendszernek

- végtelen sok megoldása van, ezek
  $x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 1 - t, \quad t \in R$.
- végtelen sok megoldása van, ezek
  $x = 2 - t, \quad y = t, \quad z = 3 - 2t, \quad t \in R$.
- végtelen sok megoldása van, ezek
  $x = -t, \; y = 2 + t, \quad z = 3 + 2t, \; t \in R$.
- egyértelmű megoldása van, mégpedig $x = y = z = 1$.

3. kérdés Az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 6 \\ x & - & y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

egyenletrendszernek

- nincs megoldása.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = t, \quad y = 1 - t, \quad z = 2 + t, \quad t \in R$.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = 1 + t, \quad y = -t, \; z = 2 - 3t, \quad t \in R$.
- végteken ok megoldása van, ezek $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3 + t, \quad t \in R$.

4. feladat Az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 4 \\ x & - & 3y & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

egyenletrendszernek

- nincs megoldása.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = 2, \quad y = t, \quad z = t, \quad t \in R$
- egyértelmű megoldás van, ami $x = 2, \quad y = z = 1$.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 2 - t, \quad t \in R$.

5. feladat A

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & z & = & -1 \\ -x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

egyenletrendszernek

- nincs megoldása.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = t, \quad y = t, \quad z = 1 + t, \quad t \in R$.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = 2 + t, \quad y = -2 - t, \quad z = -1 - t, \quad t \in R$.
- egyértelmű megoldása van, ez $x = y = 0, \quad z = 1$.

6. kérdés A

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & -1 \end{array}$$

egyenletrendszernek

- végtelen sok megoldása van, ezek $x = 3 - 3t, \quad y = -5 + 5t, \quad z = t, \quad t \in R$.
- nincs megoldása.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = t, \quad y = t, \quad z = 1 + t, \quad t \in R$.
- egyértelmű megoldása van, ami $x = y = 0, \quad z = 1$.

7. kérdés A

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

egyenletrendszernek

- végtelen sok megoldása van, ezek $x = 1 - 2t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 - t, \quad t \in R$.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = \frac{6}{5} - \frac{t}{5}, \quad y = -\frac{2}{5} + \frac{7t}{5}, \quad z = t, \quad t \in R$.
- nincs megoldása.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = 2 - t, \quad y = -2 + 3t, \; z = t, \quad t \in R$.

8. kérdés Az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & -4 \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}$$

egyenletrendszernek

- egyértelmű megoldása van, ami $x = y = -1, \quad z = 1$.
- végtelen sok megoldás van, ezek $x = -1 + 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 1 + t, \quad t \in R$.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = -t, \quad y = -1, \quad z = 2 - t, \; t \in R$.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = y = -t, \; z = 3 - 2t, \quad t \in R$.

9. kérdés A

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

homogén egyenletrendszernek

- végtelen sok megoldása van, ezek $x = t, \quad y = -2t, \quad z = -t, \quad t \in R$
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = -t, \quad y = 3t, \quad z = -t, \quad t \in R$.
- csak az $x = y = z = 0$ triviális megoldása van.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = y = t, \quad z = -2t, \quad t \in R$.

10. kérdés A

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

homogén egyenletrendszernek

- csak az $x = y = z = 0$ triviális megoldása van.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = t, \quad y = 2t, \quad z = 3t, \quad t \in R$.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = \frac{t}{2}, \quad y = -\frac{2t}{3}, \quad z = \frac{t}{5}, \quad t \in R$.
- végtelen sok megoldása van, ezek $x = 3t, \quad y = -\frac{5t}{2}, \quad z = t, \quad t \in R$

.

Tanulási cél: A sajátértékek és sajátvektorok meghatározásának begyakorlása.

Elméleti összefoglaló: Az $n \times n$ -es, négyzetes, A mátrix karakterisztikus polinomja a, kifejtés után, λ -ra nézve pontosan n -ed fokú $\det(\lambda \cdot I - A)$ polinom. Itt persze I az $n \times n$ -es egységmátrix.

A karakterisztikus polinom gyökei, azaz a

$$\det(\lambda \cdot I - A) = 0$$

egyenlet megoldásai az A mátrix sajátértékei.

Egy s oszlopvektor az A mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha

$$A \cdot s = \lambda \cdot s \,.$$

A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a

$$(\lambda \cdot I - A) \cdot X = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával határozhatók meg.

Tananyag:

Kidolgozott feladatok

1. feladat Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: Tudjuk, hogy a sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei. A karakterisztikus polinomot úgy kapjuk, hogy kifejtjük a $\det(\lambda \cdot I - A)$ determinánst. Ez részletesen kiírva a

$$\lambda \cdot I - A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát jelenti, ami

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)-6 = \lambda^2-3\lambda+2-6 = \lambda^2-3\lambda-4$$

.

A

$$\lambda^2-3\lambda-4=0$$

karakterisztikus egyenletnek két gyöke van: $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 4$. Ezek tehát az A mátrix sajátértékei.

A λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektort úgy kapjuk meg, hogy tekintjük a

$$\lambda_1 \cdot I - A = (-1)\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszert, ami most

$$\begin{array}{rcrcl} -3x & + & 3y & = & 0, \\ 2x & - & 2y & = & 0 \end{array}$$

és meghatározzuk ennek a megoldását.

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osszuk el az első sort mínusz eggyel.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Vonjuk ki ezután az első sor kétszeresét a második sorból.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez az alábbi egyenletrendszert jelenti:

$$\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Ennek az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Ezeket célszerű paraméteresen megadni az alábbi alakban.

$$\begin{array}{lcl} x & = & t\,, \\ y & = & t \end{array}$$

ahol t tetszőleges valós szám.

Ebből a λ_1-hez tartozó s_1 sajátvektort úgy kapjuk, hogy tekintjük azt a vektort, amelynek első koordinátája az első ismeretlen, második koordinátája a második ismeretlen, és így tovább. Most tehát

$$s_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in R^{\cdot}$$

Az utolsó felírásból különösen jól látszik, hogy minden λ_1-hez tartozó sajátvektor az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor számszorosa.

Például a $t = -3$-hoz tartozó $s_1' = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ sajátvektorra is teljesül az

$$A \cdot s_1' = \lambda_1 \cdot s_1'$$

összefüggés, hiszen

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot$$

Meghatározzuk a $\lambda_2 = 4$-hez tartozó sajátvektorokat.

Ehhez megoldjuk a

$$\lambda_2 \cdot I - A = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszert, ami most

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 0 \\ 2x & + & 3y & = & 0 \end{array}.$$

Ennek az egyenletrendszernek a kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

Vonjuk ki az első sort a másodikból. Így a

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, amihez a

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszer tartozik. Ennek is végtelen sok megoldása van. Ezek paraméteres megadása az y ismeretlent választva paraméternek

$$\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{2}t \\ y & = & t \end{array},$$

ahol t tetszőleges valós szám.

Így a λ_2 -höz tartozó s_2 sajátvektorra

$$s_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in R \cdot$$

Például a $t = 6$ -hoz tartozó $s_2' = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix}$ sajátvektorra is teljesül, hogy

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 24 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot$$

2. feladat Keressük meg az $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: Kezdjük a sajátértékek meghatározásával.

$$\lambda \cdot I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot$$

Megoldjuk λ -ra a

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenletet.

Kifejtve a determinánst a harmadik sora szerint kapjuk, hogy a karakterisztikus polinom

$$\lambda[(\lambda+1)^2 - 1] = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda) = \lambda^2(\lambda+2) = 0 \cdot$$

Ennek a harmadfokú polinomnak a gyökei a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, a nulla tehát kétszeres gyök, és a $\lambda_3 = -2$.

Az A mátrixnak sajátértékei tehát a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, és a $\lambda_3 = -2$.

A $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$-hoz tartozó sajátvektorok a

$$\lambda_1 \cdot I - A = 0 \cdot I - A = -A = \begin{bmatrix} 1 & -0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixú

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 0 \cdot z & = & 0 \\ 0 \cdot x & + & 0 \cdot y & + & 0 \cdot z & = & 0 \\ 0 \cdot x & + & 0 \cdot y & + & 0 \cdot z & = & 0 \end{array}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával kaphatók meg.

Látjuk, hogy ennek az egyenletrendszernek is végtelen sok megoldása van. Sőt, most két ismeretlent is szabadon megválaszthatunk. Ha ezek y és a z ismeretlenek, akkor a megoldás paraméteres alakban

$$\begin{array}{lcl} x & = & v \\ y & = & v \quad u,v \in R \\ z & = & u \end{array}.$$

A nulla sajátértékhez tartozó sajátvektorok tehát az

$$s_1 = \begin{bmatrix} v \\ v \\ u \end{bmatrix}$$

alakú vektorok, ahol u és v tetszőleges valós szám.

Például $u = 2, \quad v = 4$ esetén az

$$s_1' = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vektorra is teljesül, hogy

$$A \cdot s_1' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot s_1' \cdot$$

A $\lambda_3 = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a

$$\lambda_3 \cdot I - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixú

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & y & + & 0 \cdot z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 0 \cdot z & = & 0 \\ 0 \cdot x & + & 0 \cdot y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával kaphatók meg.

Ennek kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Cseréljük meg a második és a harmadik sort, majd vonjuk ki az első sort a harmadik sorból. Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen leolvashatjuk, hogy $z = 0$, és $x = -y$.

A végtelen sok megoldás, az y ismeretlent választva paraméternek

$$\begin{aligned} x &= -t \\ y &= t, \quad t \in R \\ z &= 0 \end{aligned}$$

alakban adható meg.

Tehát a $\lambda_3 = -2$-höz tartozó s_3 sajátvektorokra

$$s_3 = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in R.$$

Például a $t = 3$ paraméterhez tartozó

$$s_3' = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sajátvektorra teljesül, hogy

$$A \cdot s_3' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_3 \cdot s_3'.$$

3. feladat Számítsuk ki az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Mivel

$$\lambda \cdot I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 8 & 0 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix},$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 0 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 8)\left((\lambda - 2)(\lambda - 3)\right) - 3(0 - 2(\lambda - 2)) =$$

$$= (\lambda - 8)(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 6(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 11\lambda + 30) = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda - 6)$$

.

A $\det(\lambda I - A) = 0$ egyenletnek ezek szerint három különböző valós gyöke van, ezek

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 6,$$

ezek a mátrixunk sajátértékei.

A $\lambda_1 = 2$ -höz tartozó sajátvektorok a

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixú

$$\begin{array}{rcrcrcl} -6x & + & 0 \cdot y & - & 3z & = & 0 \\ -2x & + & 0 \cdot y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 0 \cdot y & - & z & = & 0 \end{array}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával határozhatók meg.

Ennek kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Első lépésként cseréljük fel az első és a harmadik sort:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adjuk ezután hozzá az első sort a másodikhoz és az első sor háromszorosát a harmadikhoz. Ekkor az alábbi kibővített mátrixot kapjuk:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből leolvasható az egyenletrendszer megoldása.

A második sorból kovetkezik, hogy $z = 0$. Az első sorból az, hogy $x = 0$. Az y pedig tetszőleges. Tehát a megoldás paraméteres alakban

$$\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & t, \quad t \in R \\ z & = & 0 \end{array}.$$

Innen az s_1 sajátvektor

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in R.$$

$\lambda_2 = 5$ esetén kapjuk, hogy az együtthatómátrix, sőt egyből a kibővített mátrix

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A megoldás első lépéseként cseréljük fel az első és a harmadik sort, majd osszuk el az első sort kettővel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezután adjuk hozzá az első sor kétszeresét a második, háromszorosát a harmadik sorhoz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A megoldás felírásához ismét a z ismeretlent célszerű paraméternek választani, ekkor

$$\begin{array}{lcl} x & = & -t \\ y & = & -\frac{t}{3}, \quad t \in R \\ z & = & t \end{array}.$$

Tehát az s_2 sajátvektor

$$s_2 = \begin{bmatrix} -t \\ -\frac{t}{3} \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in R.$$

Ez, ha az $u = -3t$ mennyiséget választjuk paraméternek, felírható

$$s_2 = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = -3t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = u \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad u \in R$$

alakban is.

$\lambda_3 = 6$ esetén a kibővített mátrixra

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

adódik.

Cseréljük fel az első és a harmadik sort.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha most az első sort hozzáadjuk a második és a harmadik sorhoz, kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen a megoldás, ismét a z ismeretlent választva paraméternek

$$\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{2}t \\ y & = & -\frac{1}{2}t, \quad t \in R \\ z & = & t \end{array}.$$

Ez alapján az s_3 sajátvektor

$$s_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3t}{2} \\ -\frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in R.$$

Ha ki akarjuk küszöbölni a törteket, akkor ez, az $u = -2t$ mennyiséget választva paraméternek,

$$s_3 = u \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad u \in R$$

alakban is felírható.

4. feladat Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Most

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ -2 & \lambda - 4 & 6 \\ 1 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)\left[(\lambda - 4)(\lambda - 3) - 12\right] + 2(-2(\lambda - 3) - 6) + 3(-4 - (\lambda - 4)) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 7\lambda) - 4\lambda - 12 - 3\lambda + 12 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 7) - 7\lambda =$$

$$= \lambda\left((\lambda - 1)(\lambda - 7) - 7\right) = \lambda(\lambda^2 - 8\lambda) = \lambda^2(\lambda - 8) \cdot$$

A sajátértékek tehát a következők.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 = 8 \cdot$$

A nulla sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához a

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

kibővített mátrixú homogén egyenletrendszert kell megoldanunk. Ha itt felcseréljük az első és a harmadik sort, majd hozzáadjuk az első sor kétszeresét a második, egyszeresét a harmadik

sorhoz, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Most két ismeretlent, az y -t és a z -t, szabodon választhatjuk, a végtelen sok megoldást az

$$\begin{array}{rcl} x & = & -2u+3v \\ y & = & u \qquad u,v \in R \\ z & = & v \end{array}$$

paraméteres alakban adhatjuk meg. Tehát a nulla sajátértékhez tartozó sajátvektorok:

$$s = \begin{bmatrix} -2u+3v \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad u,v \in R.$$

A $\lambda_3 = 8$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához megoldjuk a

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

kibővített mátrixú homogén egyenletrendszert. Felcseréljük az első és a harmadik sort, majd hozzáadjuk az első sor kétszeresét a második, mínusz hétszeresét a harmadik sorhoz. Ekkor

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & -16 & -32 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezután a második sort elosztjuk nyolccal, és a tizenhatszorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Így kapjuk az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kibővített mátrixú egyenletrendszert. A z ismeretlent paraméternek választva ennek a végtelen sok megoldása az

$$\begin{aligned} x &= -t \\ y &= -2t, \quad t \in R \\ z &= t \end{aligned}$$

paraméteres alakban adható meg. Innen az s_3 sajátvektor

$$s_3 = \begin{bmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in R \quad .$$

5. feladat Keressük meg az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Megoldás: A sajátértékek a

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenletből számithatok ki.

Fejtsük ki a determinánst az első sora szerint. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Ha az itt szereplő 3×3-as determinánsok közül az első kettőt az első sora, a harmadikat az első oszlopa szerint kifejtjük, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\lambda \left[\lambda(\lambda^2 - 1) - \lambda\right] + (-1(\lambda^2 - 1) - 1) + (-1 - (\lambda^2 - 1)) = 0 \cdot$$

Rendezve a jobb oldalt az

$$\lambda^2(\lambda^2 - 1) - \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 4) = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek gyökei

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_4 = 2\,,$$

ezek az A mátrix sajátértékei.

A nulla sajátértékhez tartozó sajátvektorok az

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kibővített mátrixú homogén egyenletrendszer megoldásából kaphatók meg.

Cseréljük fel az első két sort, majd szorozzuk meg az első sort mínusz eggyel, végül adjuk hozzá az első sort a negyedikhez. Ez az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kibővített mátrixot adja. Most a második sort megszorozzuk mínusz eggyel és hozzáadjuk a harmadik sorhoz, ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha az egyenletrendszerünk ismeretleneit $x,\ y,\ z,\ w$, akkor két ismeretlent, a z-t és a w-t tetszőlegesen választhatjuk, ezekkel a most is végtelen sok megoldás az

$$\begin{aligned} x &= -u \\ y &= -v \\ z &= u, \quad u,v \in R \\ w &= v \end{aligned}$$

paraméteres alakban adható meg. A nullához tartozó sajátvektorok tehát az

$$s = \begin{bmatrix} -u \\ -v \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad u,v \in R$$

vektorok.

A $\lambda_3 = -2$ sajátérték esetén a

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

kibővített mátrixból indulunk ki.

Felcseréljük az első két sort, megszorozzuk az első sort mínusz eggyel, majd hozzáadjuk az első sor kétszeresét a második, egyszeresét a negyedik sorhoz. Kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezután felcseréljük a második és harmadik sort, megszorozzuk a második sort mínusz eggyel és hozzáadjuk a mínusz háromszorosát a harmadik, mínusz kétszeresét a negyedik sorhoz. Ekkor a kibővített mátrix az alábbi lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Végül osszuk el a harmadik sort mínusz néggyel és adjuk hozzá a negyedikhez:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen leolvashatjuk a megoldást:

$$\begin{aligned} x &= -t \\ y &= t \\ z &= -t, \quad t \in R \\ w &= t \end{aligned},$$

ami alapján a λ_3-hoz tartozó s_3 sajátvektor

$$s_3 = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in R.$$

$\lambda_4 = 2$ esetén a

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

kibővített mátrixú egyenletet kell megoldanunk. Felcseréjük az első két sort, megszorozzuk az első sort mínusz eggyel, majd hozzáadjuk az első sor mínusz kétszeresét a második sorhoz, egyszeresét a negyedik sorhoz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből kapjuk a következőt: (az olvasó bizonyára kitalálja, hogy milyen átalakításokkal)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

majd

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Most egy ismeretlent választhatunk szabadon. Ha ez a w, akkor az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \\ z &= t, \quad t \in R \\ w &= t \end{aligned}$$

Vagyis az s_4 sajátvektor

$$s_4 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in R$$

Ellenőrző kérdések

1. kérdés Az $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **mátrix sajátértékei**

- $4, \ -1.$
- $-1, \ 4.$
- $1, \ 4.$
- $-1, \ -4.$

2. kérdés Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **mátrix sajátértékei**

- $1, \ 7, \ -4.$
- $1, \ 7, \ 4.$
- $-1, \ 7, \ -4.$
- $1, \ -7, \ 4.$

3. kérdés Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **mátrix sajátértékei**

- $-1, \ -3, \ -3.$
- $1, \ 3, \ -3.$
- $1, \ 3, \ 3.$
- $-1, \ -3, \ 3.$

4. feladat Az $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

- $1, \ 2, \ 4.$
- $2, \ -1, \ -4.$
- $4, \ -1, \ -2.$
- $2, \ 4, \ -1.$

5. kérdés Az $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ **mátrix egyik sajátvektora**

- $s = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $s = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.
- $s = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- $s = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$.

6. kérdés Az $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **mátrix egyik sajátvektora**

- $s = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$.
- $s = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- $s = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$.
- $s = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7. kérdés Az $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **mátrix egyik sajátvektora**

- $s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$.
- $s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}$.
- $s = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 3-2\sqrt{3} \end{bmatrix}$.
- $s = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Tanulási cél: Begyakorolni az inverz mátrix Gauss-féle algoritmussal történő meghatározását.

Elméleti összefoglaló: Tekintsük az, egyszerűség kedvéért, 3×3-as A mátrixot és tegyük fel, hogy létezik inverze. Ennek, egyelőre ismeretlen X inverz mátrixára teljesül, hogy

$$AX = I\,,$$

vagy, kiírva a mátrixok elemeit,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

Ha a bal oldalon elvégeznénk a szorzást, akkor kapnánk egy 3×3-as mátrixot, ami egyenlő az egység mátrixal. Könnyű átlátni, hogy ennek első oszlopában szereplő elemek felírásában csak az A mátrix elemei és az X mátrix **első oszlopának elemei** szerepelnek. Ebből az következik, hogy az inverz mátrix első oszlopa az

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása. Teljesen hasonló igaz az inverz mátrix második és harmadik oszlopára is.

Tehát az inverz mátrix megoldásához meg kell oldanunk az alábbi kibővített mátrixú szimultán egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot$$

Ha van inverz mátrix, akkor mindhárom egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.

Célszerű most a Gauss-féle algoritmus alakalmazásával nem megállni akkor, amikor az együtthatómátrixot felső háromszögmátrixá alakítottuk, hanem folytatni egészen addig, míg az

együttható mátrix az egységmátrixá válik. Ez mindig megtehető. Ilyenkor a jobb oldalon megjelenő mátrix a keresett inverz mátrix.

Ugyanez az eljárás más méretű mátrixok esaetén is.

Tananyag:

Kidolgozott feladatok

1. feladat Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ 2x & + & 3y & = & 5 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -3 \\ 2x & + & 3y & = & 4 \end{array}$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a két egyenletrendszer együtthatómátrixa azonos. A Gauss-féle algoritmus alakalmazása során csak az együtthatómátrix elemei döntik el, hogy mikor milyen lépést hajtunk végre. A kibővített mátrix utolsó oszlopa abban játszik szerepet, hogy azt felhasználva derül ki, hogy van-e megoldás, és ha van, akkor az hogyan adható meg.

Ennek az a következménye, hogy a két egyenletrendszer megoldása "sokáig" azonos lépések szerint halad, amit egy mátrixban is összefoglalhatunk.

Induljunk ki tehát az

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

kibővített mátrixból.

Vonjuk ki az első sor kétszeresét a másodikból.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Elvégeztük az együtthatómátrix felső háromszögmátrixá alakítását, leolvashatjuk a megoldásokat.

Az első egyenletrendszer megoldását úgy kapjuk, hogy a kibővített mátrix utolsó előtti oszlopát vesszük figyelembe. Ekkor a megoldás, mint az könnyen leolvasható: $x = 1, \quad y = 1$.

A második egyenletrendszer megoldásához a kibővített mátrix utolsó oszlopát kell figyelembe venni, ekkor kapjuk, hogy ekkor $x = -1, \quad y = 2$.

2. feladat Oldjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ -x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \\ -x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$$

egyenletrendszereket.

Megoldás: Az eggyütthatómátrixok azonossága miatt közös kibővített mátrixot használhatunk. Ez

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Első lépésként kivonjuk az első sort a másodikból, majd hozzáadjuk az első sort a hamadikhoz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Adjuk hozzá ezután a második sort a harmadikhoz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Mivel az együtthatómátrix felső háromszögmátrix, véget ért a Gauss-féle algoritmus.

Az első egyenletrendszer megoldása a kibővített mátrix utolsó előtti oszlopával:
$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$.

A második egyenletrendszer megoldása, a kibővített mátrix utolsó oszlopát véve figyelembe:
$x = 0,\ y = 1, \quad z = 2\,.$

3. feladat Számoljuk ki Gauss-féle algoritmus felhasználásával az $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

Megoldás: A kiinduló mátrixunk a következő:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Adjuk hozzá az első sort a másodikhoz.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ezután adjuk hozz a második sor kétszeresét az elsőhöz.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A balodali mátrixot a Gauss-féle algoritmust felhasználva egységmátrixá alakítottuk, tehát a jobb oldalon álló mátrix a keresett inverz mátrix, azaz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Könnyen leellenőrizhető, hogy valóban teljesül, hogy $AA^{-1} = A^{-1}A = I\,.$

4. feladat Számoljuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét.

Megoldás: A

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

mátrixból indulunk ki. Első lépésként felcseréljük az első és a második sort, majd az első sort megszorozzuk mínusz eggyel.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ezután hozzáadjuk az első sor kétszeresét a második sorhoz, mínusz kétszeresét a harmadik sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Szerencsés módon a bal oldali 3×3-as mátrix máris felső háromszögmátrixá vált.

Következő lépésként hozzáadjuk a harmadik sort a második és az első sorhoz is.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Végül hozzáadjuk a második sort az elsőhöz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Elértük, hogy a bal oldali 3×3-as mátrix az egységmátrixá vált, ekkor a jobb oldali 3×3-as mátrix akeresett inverz mátrix, azaz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. feladat Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Felírva az

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

kiinduló mátrixot, látszik, hogy első lépésként célszerű kivonni az első sort a második és a harmadik sorból.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Most a második sor kétszeresét kivonjuk a harmadik sorból.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Osszuk el ezután a harmadik sort mínusz eggyel, majd vonjuk ki a második és a harmadik sorból.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Végül vonjuk ki a második sor négyszeresét az első sorból.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Innen leolvashatjuk, hogy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. feladat Mi az

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix inverz mátrixa?

Megoldás: Tekintsük a

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

kiinduló mátrixot, és elsőként cseréljük fel az első és a harmadik sort.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ezután vonjuk ki az első sor kétszeresét a másodikból, majd adjuk hozzá az első sort a harmadikhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Most több féle úton is folytathatjuk a számolást. Érdemes törekedni arra, hogy minél tovább elkerüljük a törtekkel való számolást, valamint arra, hogy az egyesekkel nullázuk ki az oszlopuk többi elemét. Ezért a következő lépésként hozzáadjuk a második sor kétszeresét az első sorhoz, háromszorosát a harmadik sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -10 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

Ezután cseréljük fel a második és a harmadik sort, majd a második sort osszuk el -14-el.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -10 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ 0 & -6 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Végül adjuk hozzá a második sort az elsőhöz, illetve hatsorosát a adjuk hozzá a harmadik sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{14} & -\frac{2}{14} & \frac{8}{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{2}{14} \end{array}\right]$$

Vagyis az inverz mátrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{14} & -\frac{2}{14} & \frac{8}{14} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} \\ -\frac{6}{14} & -\frac{4}{14} & \frac{2}{14} \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -10 & -2 & 8 \\ -1 & -3 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az utóbbi felírás az ellenőrzéskor hasznos. Ha csak a mátrixokat szorozzuk össze, akkor az egységmátrix 14 -szeresét kell kapnunk. Az olvasó ellenőrizze ezt le!

7. feladat Számoljuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét.

Megoldás: Ebben a feladatban csak a mátrixokat írjuk fel egymás után. Az olvasó találja ki, hogy mikor milyen átalakítást végeztünk!

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2/4 & 0 & -2/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right]$$

Vagyis

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Ellenőrző kérdések

Az alábbi feladatokban **a Gauss-féle algoritmust felhasználva határozzuk meg a mátrix**

inverzét, és válasszuk ki a megadott válaszok közül a helyeset.

1. kérdés Legyen $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

- Az inverz mátrix egyik eleme -1.
- Az inverz mátrix egyik oszlopvektora $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.
- Az inverz mátrix egyik eleme -5.
- Az inverz mátrix minden eleme pozitív.

2. kérdés Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ **mátrixot. Ekkor**

- az inverz mátrixnak pontosan két eleme nulla.
- az inverez mátrix elemei között több a pozitív, mint a negatív.
- a -2 az inverz mátrix egyik eleme.
- az inverz mátrixnak van olyan sora, amelyben két darab nulla szerepel.

3. kérdés Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$**. Ekkor az inverz mátrix**

- szimmetrikus.
- egyik oszlopvektora $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- minden eleme egész.
- elemei közül a legnagyobb 3.

4. feladat Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$**. Ekkor az inverz mátrix**

- egyik sorában minden elem egyenlő.
- egyik eleme 2.
- egyik eleme $\frac{1}{4}$.
- egyik eleme nulla.

5. kérdés Tekintsük az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrixot. Ekkor az inverz mátrix

- egyik sorvektora $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- legnagyobb eleme 4.
- egyik sorában minden elem pozitív.
- valamelyik eleme nulla.