Matematika felzárkóztató anyag

Horváth Gábor
Lukács Antal

UgrĂĄs ide:

- Tartalom
- SzĂśveg

Copyright © 2012
UtolsĂł mĂłdosĂtĂĄs ideje:

Tartalom

1. lecke

1. Többtagú kifejezések szorzása és szorzatra bontás

1.1. Bevezető

1.2. Többtagú kifejezések szorzása

1.3. Ellenőrző kérdések

1.4. Szorzatra bontás kiemeléssel

1.5. Szorzatra bontás azonosságok használatával

1.6. Szorzatra bontás csoportosítással és ismételt kiemeléssel

1.7. Ellenőrző kérdések

2. lecke

2. Egyismeretlenes egyenletek megoldása

2.1. Bevezető

2.2. Elsőfokú egyenletek

2.3. Ellenőrző kérdések

2.4. Elsőfokú egyenletek és az egyenes

2.5. Ellenőrző kérdések

2.6. Másodfokú egyenletek

2.7. Ellenőrző kérdések
2.8. Másodfokú egyenletek és a parabola
2.9. Ellenőrző kérdések

3. lecke

3. Kétismeretlenes egyenletrendszerek
3.1. Bevezető
3.2. Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek
3.3. Ellenőrző kérdések
3.4. Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerre visszavezethető egyenletrendszerek
3.5. Ellenőrző kérdések
3.6. Nemlineáris egyenletrendszerek
3.7. Ellenőrző kérdések

4. lecke

4. Egyenlőtlenségek
4.1. Bevezető
4.2. Lineáris egyenlőlenségek
4.3. Ellenőrző kérdések
4.4. Törtes egyenlőtlenségek
4.5. Ellenőrző kérdések

4.6. Másodfokú egyenlőtlenségek
4.7. Ellenőrző kérdések

5. lecke

5. Abszolút értékes egyenletek, egyenlőtlenségek

5.1. Bevezető
5.2. Abszolút értékes egyenletek
5.3. Ellenőrző kérdések
5.4. Abszolút értékes egyenlőtlenségek
5.5. Ellenőrző kérdések

6. lecke

6. Hatványozás és gyökvonás

6.1. Bevezető
6.2. Ellenőrző kérdések

7. lecke

7. Exponenciális és logarimus

7.1. Bevezető
7.2. Ellenőrző kérdések

8. lecke

8. Műveletek függvényekkel

8.1. Bevezető

8.2. Ellenőrző kérdések

9. lecke

9. Értelmezési tartomány

9.1. Bevezető

9.2. Ellenőrző kérdések

10. lecke

10. Függvénytranszformációk

10.1.Bevezető

11. lecke

11. Számtani és mértani sorozatok, pénzügyi alkalmazások

11.1.Bevezető

11.2.Ellenőrző kérdések

12. lecke

12. Vektorok

12.1.Bevezető

12.2.Ellenőrző kérdések

13. lecke

13. Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

13.1.Bevezető

13.2.Ellenőrző kérdések

1. lecke

Többtagú kifejezések szorzása és szorzatra bontás

1. Többtagú kifejezések szorzása és szorzatra bontás

1.1. Bevezető

Matematikai feladatok megoldásakor a formulák átalakítása, egyszerűsítése nagyon gyakori. Az eközben felhasznált azonosságok, formula manipulálási fogások biztos ismerete a későbbiek során elengedhetetlen lesz. Ezek közül igen fontosak a szorzatokkal kapcsolatosak, különösen a szorzatra bontás, ami az egyenletek megoldásának egyik legfontosabb fogása. A következő lecke ezek felelevenítésével és gyakorlásával foglalkozik.

1.2. Többtagú kifejezések szorzása

1-1. tétel: Többtagú algebrai kifejezést úgy szorzunk meg egy többtagú algebrai kifejezésel, hogy minden lehetséges módon kiválasztunk mindkét tényezőből egy-egy tagot és ezeket megszorozzuk egymással, majd az így kapott szorzatokat összeadjuk. Az azonos típusú tagokat össze szokás vonni.

Ha a tényezők azonosak, akkor egy többtagú algebrai kifejezés hatványáról van szó. Ezek közül, a gyakori előfordulásuk miatt, a kéttagú összeg négyzetére és köbére vonatkozó

1-2. tétel:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{1}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{2}$$

azonosságok a legfontosabbak. Ezekből a b helyére $-b$-t írva kapjuk az alábbi azonosságokat:

1-3. tétel:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \tag{3}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \tag{4}$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ezek az azonosságok, és az összes többi is, akkor is érvényesek, ha az a és b helyén tetszőleges algebrai kifejezés áll.

1-1. feladat: Az (1)-(4) azonosságokat használva számoljuk ki többféleképpen is 6 négyzetét.

Megoldás: Mivel például $6 = 4 + 2$, az (1) azonosság alapján

$$6^2 = (4+2)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2^2 = 16 + 16 + 4 = 36.$$

De például $6 = 7 - 1$, ezért a (3) azonosság szerint

$$6^2 = (7-1)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 1 + 1^2 = 49 - 14 + 1 = 36.$$

Végül $6 = 2.5 + 3.5$ is igaz, így

$$6^2 = (2.5)^2 + 2 \cdot 2.5 \cdot 3.5 + (3.5)^2 = 6.25 + 17.5 + 12.25 = 36.$$

1-2. feladat: Emeljük négyzetre a $4 - 2b$ kifejezést.

Megoldás: A (3) azonosságot használjuk, az a helyére 4-et, a b helyére $2b$-t írva:

$$(4-2b)^2 = 4^2 - 2 \cdot (4) \cdot (2b) + (2b)^2 = 16 - 16b + 4b^2.$$

1-3. feladat: Emeljük köbre a $c-2$ kifejezést.

Megoldás: A (4) azonosságot használjuk, az a helyére c-t, a b helyére 2-t írva:

$$(c-2)^3 = c^3 - 3\cdot(c^2)\cdot(2) + 3\cdot(c)\cdot(2)^2 - 2^3 = c^3 - 6c^2 + 12c - 8.$$

1-4. feladat: Emeljük négyzetre az $a-1+x$ kifejezést.

Megoldás: Először is $a-1+x = (a-1)+x$, mert ha a-ból az $1+x$-et kellene kivonnunk, akkor azt zárójelbe kellene tennünk. Így, felhasználva az (1) és a (3) azonosságot is,

$$(a-1+x)^2 = ((a-1)+x)^2 = (a-1)^2 + 2(a-1)x + x^2 = a^2 - 2a + 1 + 2ax - 2x + x^2.$$

1-5. feladat: Végezzük el az $(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)$ szorzást.

Megoldás: A definíciót használva, minden tagot minden taggal megszorozva kapjuk, hogy

$$(\alpha+\beta)(\beta-\alpha) = \alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 - \beta\alpha = \beta^2 - \alpha^2.$$

Gyakran előfordul, ezért érdemes megjegyezni az

1-4. tétel:

$$(a-b)(a+b) = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{5}$$

azonosságot.

1-6. feladat: Végezzük el az $(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)$ szorzást.

Megoldás: Mivel az összeadás kommutativitása miatt $(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)=(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)$, az (5) azonosság felhasználásával

$$(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)=(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=\beta^2-\alpha^2.$$

Nyilván ugyanaz az eredmény, mint az előző feladatban.

1-7. feladat: Végezzük el az $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)$ szorzást.

Megoldás: Minden tagot minden taggal megszorozva kapjuk, hogy

$$(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3-x^3y-x^2y^2-xy^3-y^4=x^4-y^4.$$

1-8. feladat: Végezzük el az $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^2-1)$ szorzást.

Megoldás: Mivel a szorzás asszociatív $(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^2-1)=((a^2+a+1)(a^2-a+1))(a^2-1)$. Először kiszámoljuk $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$-t:

$$(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4+a^3+a^2-a^3-a^2-a+a^2+a+1=a^4+a^2+1.$$

Így

$$(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^2-1)=(a^4+a^2+1)(a^2-1)=a^6+a^4+a^2-a^4-a^2-1=a^6-1.$$

1-9. feladat: Végezzük el az $\left(1+\frac{x}{y}\right)(x-y)$ szorzást.

Megoldás: Minden tagot minden taggal megszorozva, majd egyszerűsítve és közös nevezőre hozva

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)(x-y) = x + \frac{x^2}{y} - y - x = \frac{x^2}{y} - y = \frac{x^2-y^2}{y}.$$

Az utolsó képlet rámutat arra, hogy algebrai átalakítások esetén nem mindig egyértelmű, hogy mit tekintünk végeredménynek, mi a "legegyszerűbb alak". A lehetséges összeadásokat és kivonásokat elvégezzük, és gyakran a törteket is közös nevezőre hozzuk.

1.3. Ellenőrző kérdések

Kvíz

1. Mivel egyenlő $a(b-2a)$?

☐ $ab-2a$ ☐ $ab-2a^2$ ☐ $ab+2a$ ☐ $b-2a^2$

Clear

2. Mi $b-2a$ négyzete?

☐ b^2-2a^2 ☐ b^2-4a^2 ☐ $b^2-4ab+4b^2$ ☐ $b^2-4ab-4b^2$

Clear

3. Mi $b-2a$ négyzete?

☐ b^2-2a^2 ☐ b^2-4a^2 ☐ $b^2-4ab+4b^2$ ☐ $b^2-4ab-4b^2$

Clear

4. A szorzások és összevonások elvégzése után hány tagú lesz az $(1+x)(x-1)(x^2+1)$ kifejezés?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 6 ☐ 8

Clear

5. $1+x+x^2$ négyzetében mennyi az x^3 együtthatója?

☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1

Clear

6. Az $(a-b)(a+2b)(2a-b)$ kifejezésben a szorzások és összevonások elvégzése után hány negatív előjelű tag lesz?

☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1

Clear

Start.

1. Mivel egyenlő $2xy(x+y-1)$?

- ☐ $2x^2y+2x^2y^2-2xy$
- ☐ $2x^2y+2xy^2-2xy^2$
- ☐ $2xy+2xy^2-2xy$
- ☐ $2x^2y+2xy^2-2xy$

2. Mivel egyenlő $(x+2y)(2x-y)$?

- ☐ $2x^2+3xy-2y^2$
- ☐ $2x^2-3xy-2y^2$
- ☐ $2x^2+2xy-2y^2$
- ☐ $2x^2-3xy+2y^2$

3. Mivel egyenlő $(b-2a)^2$?

- ☐ b^2-4a^2
- ☐ b^2+4a^2
- ☐ $b^2-2ab+4a^2$
- ☐ $b^2-4ab+4a^2$

4. Mivel egyenlő $(2x-y)^3$?

- ☐ $8x^3+12x^2y+6xy^2-y^3$
- ☐ $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$
- ☐ $8x^3-12x^2y-6xy^2-y^3$
- ☐ $8x^3-12x^2y+6xy^2+y^3$

5. Mivel egyenlő $(a-2b+1)^2$?

- ☐ $a^2-4ab+2a+4b^2+4b+1$
- ☐ $a^2-2ab+2a+4b^2-4b+1$
- ☐ $a^2-4ab-2a+4b^2-4b+1$
- ☐ $a^2-4ab+2a+4b^2-4b+1$

6. Mivel egyenlő $\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\left(1-\frac{3}{x^3}\right)$?

- ☐ $1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}-\frac{4}{x^6}$
- ☐ $1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\frac{6}{x^5}-\frac{6}{x^6}$
- ☐ $1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}-\frac{6}{x^6}$
- ☐ $1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}-\frac{6}{x^6}$

Pontok: Megold.

Stop.

1.4. Szorzatra bontás kiemeléssel

A szorzatra bontás az egyenletek megoldásának egyik legfontosabb módszere. Minden egyenlet nullára rendezhető. Ha ezután sikerül a másik oldalt szorzatra bontani, akkor - mivel egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője az - megkapjuk az eredeti egyenlet gyökeit, ha meghatározzuk a tényezők gyökeit. Ezek egyszerűbb kifejezések, mint az eredeti egyenlet.

A kiemelés alapja a szorzásnak az összeadásra való disztibutivitását megfogalmazó

1-5. tétel:

$$a(b+c) = ab + ac. \tag{6}$$

Ha a (6) azonosság jobb oldala helyett a bal oldali szorzatot írjuk, akkor azt mondjuk, hogy "kiemeltünk a-t", és a jobb oldali összeget "szorzatra bontottuk". Persze az a és b helyén most is tetszőleges algebrai kifejezés is állhat.

Fontos, hogy a (6) azonosság bal oldalán szereplő kéttagú összeg többtagú is lehet, például négy tag esetén a (6) azonosság alakja:

1-6. tétel:

$$a(b+c+d+e) = ab + ac + ad + ae. \tag{7}$$

1-10. feladat: Kiemeléssel bontsuk szorzatra az $a^4b^2 - a^3b^4$ kifejezést.

Megoldás: Az egyik lehetséges megoldás

$$a^4b^2 - a^3b^4 = ab(a^3b - a^2b^3),$$

de talán egyértelmű, hogy

$$a^4b^2 - a^3b^4 = a^3b^2(a - b^2)$$

jobb.

A második megoldást azért tartjuk jobbnak, mert itt emeltünk ki a lehető "legtöbbet", az eredeti két tag legnagyobb közös osztóját. Általában is erre érdemes törekedni.

1-11. feladat: Kiemeléssel bontsuk szorzatra az $5x^2y + 10xy - 15xy^2$ kifejezést.

Megoldás: A három tag legnagyobb közös osztója most $5xy$, ezért

$$5x^2y + 10xy - 15xy^2 = 5xy(x + 2 - 3y).$$

1-12. feladat: Kiemeléssel bontsuk szorzatra az $a^{4k}b - a^{2k} + a^kc$ kifejezést, ahol $k \in \mathbb{N}$.

Megoldás: A tagok legnagyobb közös osztója most a^k, ezért

$$a^{4k}b - a^{2k} + a^kc = a^k(a^{3k}b - a^k + c).$$

1.5. Szorzatra bontás azonosságok használatával

A kéttagú összeg négyzetére és köbére vonatkozó (1)-(4) azonosságok egyik oldala szorzat, így ezek is felhasználhatók szorzatra bontásra. Ugyanez igaz az (5) azonosságra is.

1-13. feladat: Bontsuk szorzatra az $(a-b)^2 - a^2$ kifejezést.

Megoldás: Ez a kifejezés két négyzet, $(a-b)^2$ és a^2 különbsége. Ezért az (5) azonosság felhasználásával

$$(a-b)^2 - a^2 = (a-b+a)(a-b-a) = -(2a-b)b.$$

A konstans tényezőket persze összeszorozzuk és a tényezők elé írjuk.

1-14. feladat: Bontsuk szorzatra az $1-(x+y^2)^2$ kifejezést.

Megoldás: Ez a kifejezés is két négyzet különbsége. Ezért

$$1-(x+y^2)^2 = (1+(x+y^2))(1-(x+y^2)) = (1+x+y^2)(1-x-y^2).$$

Figyeljünk a többtagú kifejezés kivonásakor jelentkező előjelváltásokra!

1-15. feladat: Bontsuk szorzatra az $(x-y)^2 - 4(x+y)^2$ kifejezést.

Megoldás: Mivel négyzetek különbségével van dolgunk, és

$$(x-y)^2 - 4(x+y)^2 = (x-y)^2 - (2(x+y))^2 = (x-y)^2 - (2x+2y)^2,$$

azt kapjuk, hogy

$$(x-y)^2 - 4(x+y)^2 = ((x-y)+(2x+2y))((x-y)-(2x+2y)) = (3x+y)(-x-3y) = -(3x+y)(x+3y).$$

1-16. feladat: Bontsuk szorzatra az $a^3 - b^3$ kifejezést.

Megoldás: Ez a két tag előfordul a kéttagú különbség köbére vonatkozó (4) azonosság jobb oldalán, de hiányzik mellőlük két tag. Ha ezeket hozzáadjuk $a^3 - b^3$-hez és ki is vonjuk belőle, egyenlőséget kapunk:

$$a^3 - b^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2b - 3ab^2 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2.$$

Itt az első négy tag $a - b$ köbét adja, az utolsó kettőből kiemelhető $3ab$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

Az $a - b$ kiemelésével és a négyzetre emelés elvégzésével azt kapjuk, hogy

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = (a-b)((a-b)^2 + 3ab) = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

1-17. feladat: Bontsuk szorzatra az $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ kifejezést.

Megoldás: A három utolsó tag olyan típusú, mint amilyen a három utolsó tag $x + y$ köbében, csak az együtthatók különböznek. Mivel az x^3 együtthatója 1, arra gondolunk, hogy $x + ay$ köbével van dolgunk, alkalmas a-val. Kiemelve a középső két tagból az azonosságban szereplő hármas együtthatókat és a maradék konstanst az y elé írva

$$x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = x^3 + 3x^2 2y + 3x4y^2 + 8y^3$$

Mivel $4y^2 = (2y)^2$, és $8y^3 = (2y)^3$

$$x^3 + 3x^2 2y + 3x4y^2 + 8y^3 = x^3 + 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 + (2y)^3 = (x + 2y)^3.$$

1.6. Szorzatra bontás csoportosítással és ismételt kiemeléssel

1-18. feladat: Bontsuk szorzatra az $ax + 2by + ay + 2bx$ kifejezést.

Megoldás: Az első és a harmadik tagból kiemelhető lenne a, ezért megváltoztatjuk a tagok sorrendjét

$$ax + 2by + ay + 2bx = ax + ay + 2by + 2bx.$$

Kiemelve az első két tagból a-t, az utolsó két tagból $2b$-t

$$a + ay + 2by + 2bx = a(x + y) + 2b(y + x).$$

Felismerjük, hogy további kiemelésre van lehetőség, az $x + y$ is kiemelhető, azaz

$$a(x + y) + 2b(y + x) = (x + y)(a + 2b).$$

1-19. feladat: Bontsuk szorzatra az $a^2 + bc + ab + ac$ kifejezést.

Megoldás: Lehet, hogy ez a négy tag is két kéttagú összeg összeszorzásából keletkezett. Ezért úgy csoportosítjuk a tagokat, hogy az első kettőből és a második kettőből is ki lehessen valamit emelni. Egy lehetőség

$$a^2 + bc + ab + ac = a^2 + ab + ac + bc.$$

Kiemelve mostmár az első két tagból a-t, a második kettőből c-t, majd még egy kiemelést végezve

$$a^2 + ab + ac + bc = a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(a + c)$$

A kezdeti csoportosításra van más lehetőség is, érdemes kipróbálni, hogy az mire vezet.

1.7. Ellenőrző kérdések

Kvíz

1. Mi az a^2b^3, $(ab^2)^2$, a^3b^2 kifejezések legnagyobb közös osztója?

☐ a^2b^2 ☐ a^2b^3 ☐ ab^2 ☐ a^2b

Clear

2. Mi az $\dfrac{ax^2}{b^2y^3}$, $\dfrac{a^2x}{b^2y^2}$, $\dfrac{(ax)^2}{(by)^4}$ kifejezések legnagyobb közös osztója?

☐ $\frac{ax}{by^2}$ ☐ $\frac{ax}{b^2y^2}$ ☐ $\frac{a^2x}{b^2y^2}$ ☐ $\frac{ax}{by}$

Clear

3. Hogyan bontható szorzatra a $2x^2 + 3xy - 2y^2$ kifejezés?

☐ $(x - 2y)(2x + y)$ ☐ $(2x + y)(x - y)$ ☐ $(2x + y)(x - 2y)$ ☐ $(x + 2y)(2x - y)$

Clear

4. Mit kell írni a $\square$ helyére, hogy $(a + 2)(a^2 + \square - 4) = a^3 + 4a^2 - 8$ teljesüljön?

☐ $2a$ ☐ a ☐ $3a$ ☐ a^2

Clear

5. Mit kell írni a $\square$ helyére, hogy $(x + y)(x + \square)(x + 3y) = x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$ teljesüljön?

☐ 1 ☐ y ☐ $2y$ ☐ y^2

Clear

6. Milyen számot kell írni mindkét $\square$-be, hogy $(x+y)(x-\square\cdot y)(\square\cdot x-y)=2x^3-3x^2y-3xy^2+2y^3$ teljesüljön?

$\square$ 4 $\square$ 3 $\square$ 2 $\square$ 1

Clear

Start.

1. Mi a $16a^2b^3$, $12a^3b^2$ kifejezések legnagyobb közös osztója?

☐ $2a^2b^2$ ☐ $4a^3b^3$ ☐ $12a^2b^2$ ☐ $4a^2b^2$

2. Mi a $2abc^2$, $4a^2bc$, $6ab^2c^2$ kifejezések legnagyobb közös osztója?

☐ $4a^2bc$ ☐ $2a^2bc$ ☐ $4abc$ ☐ $2abc$

3. Hogyan bontható szorzatra az $x(a+2)-y(2+a)$ kifejezés?

☐ $(a+2)(x-y)$ ☐ $(a-2)(x+y)$ ☐ $(2-a)(x+y)$ ☐ $(2+a)(x+y)$

4. Hogyan bontható szorzatra a $2a(x+y)-x-y$ kifejezés?

☐ $(2x+y)(a-1)$ ☐ $(x-y)(2a-1)$ ☐ $(x+y)(2a-1)$ ☐ $(x-y)(2a+1)$

5. Hogyan bontható szorzatra a $16x^4-9y^2$ kifejezés?

☐ $(4x^2-3y)(4x^2-3y)$ ☐ $(4x^2+3y)(4x^2-3y)$ ☐ $(3x^2+4y)(4x^2-3y)$ ☐ $(4x^2+3y)(4x^2+3y)$

6. Hogyan bontható szorzatra a $4(a-b)^2-(a+b)^2$ kifejezés?

☐ $(3a-b)(a-3b)$ ☐ $(3a-3b)(a+b)$ ☐ $(3a+b)(3a-3b)$ ☐ $(3a-b)(a+3b)$

7. Hogyan bontható szorzatra az x^3+y^3 kifejezés?

☐ $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ ☐ $(x-y)(x^2-xy+y^2)$ ☐ $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ ☐ $(x-y)(x^2-xy+y^2)$

8. Hogyan bontható szorzatra a $9-a^2+2ab-b^2$ kifejezés?

☐ $(3-a-b)(3+a+b)$ ☐ $(3+a-b)(3+a+b)$ ☐ $(3+a-b)(3-a+b)$ ☐ $(3-a-b)(3-a+b)$

9. Hogyan bontható szorzatra a $2x^3-x^2-4x+12$ kifejezés?

☐ $(x-2)(2x^2-5x-6)$ ☐ $(x-2)(2x^2+5x+6)$ ☐ $(x+2)(2x^2-5x+6)$ ☐ $(x-2)(2x^2-5x+6)$

Pontok: Megold.

Stop.

2. lecke

Egyismeretlenes egyenletek megoldása

2. Egyismeretlenes egyenletek megoldása

2.1. Bevezető

Az egyenletek megoldása a matematikában nagyon fontos. Az egyenletek több módon is csoportosíthatók, típusokba sorolhatók. Persze akárhogy csináljuk is ezt, mindig lesznek egyenletek, amelyek egyik típusunkba sem tartoznak, az egyenleteknek végtelen sok fajtája van, minden egyenletre alkalmazható megoldási módszer már csak emiatt sem létezik.

Az egyenletek megoldása során általában átalakítjuk az egyenleteket. Fontos, hogy csak ekvivalens átalakításokat végezzünk, azaz olyanokat, amelyek nem változtatják meg az egyenlet gyökeit. A legfontosabb ekvivalens átalakítások a következők:

1. tetszőleges mennyiség hozzáadása vagy kivonása az egyenlet mindkét oldalából,
2. az egyenlet szorzása vagy osztása nullától különböző számmal vagy olyan mennyiséggel, ami nem veheti fel a nulla értéket.

Ha nem csak ekvivalens átalakítást végzünk gyökvesztés léphet fel vagy hamis gyököket kaphatunk. A gyökvesztés a nagyobb gond, mert a hamis gyökök ellenőrzéssel kiszűrhetők.

Gyökvesztés leggyakrabban akkor lép fel, ha olyan mennyiséggel osztjuk el az egyenletet, ami lehet nulla is. Általában gyökvesztésre vezet, ha mennyiségek négyzetéből úgy vonunk négyzetgyököt, hogy egyszerűen csak elhagyjuk a gyökvonást és a négyzetre emelést. (Azaz, ha $\sqrt{A^2} = |A|$ helyett csak $\sqrt{A^2} = A$-t írunk.)

Hamis gyököket általában az egyenlet négyzetre emelése után kapunk, illetve olyankor, ha az egyenletet olyan mennyiséggel szorozzuk, amely lehet nulla is.

A kiszámolt gyökök helyességéről ellenőrzéssel lehet és kell meggyőződni.

Ebben a tananyagban általában az egyenleteknek a válós számok halmazába eső megoldásait keressük, ezért ezt a kitételt a feladat szövegében nem tüntetjük fel, de ha ettől eltérő alaphalmazra szorítkozunk azt igen.

Ebben a leckében az elsőfokú és a másodfokú egyenletekkel foglalkozunk. A későbbi leckékben másfajta egyenletek is elő fognak fordulni.

2.2. Elsőfokú egyenletek

Az elsőfokú egyenletek a legegyszerűbb típusú egyenletek. Ennek ellenére sok, az egyenletek megoldása során használt lépés az elsőfokú egyenletek megoldása során is felhasználásra kerül, és ezek itt a legegyszerűbb helyzetben gyakorolhatók.

2-1. definíció: Az elsőfokú egyenlet általános alakja

$$\alpha x + \beta = 0. \tag{8}$$

Itt x az ismeretlen, az α, β valós konstansok az együtthatók, és $\alpha \neq 0$.

2-1. tétel: A (8) elsőfokú egyenlet megoldása

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{9}$$

Az elsőfokú egyenletnek tehát egy megoldása van.

Az elsőfokú egyenlet megoldása tehát úgy történik, hogy, ha szükséges, ekvivalens átalakításokkal a (8) alakra rendezzük az egyenletet, ezután leolvassuk az α és a β együtthatókat, majd a (9) képletet használva kiszámoljuk a megoldást.

Fontos tehát, hogy egy egyenlet nézhet ki nagyon furcsán is, ha ekvivalens átalakításokkal a (8) kanonikus alakra rendezhető, akkor az elsőfokú egyenlet.

2-1. feladat: Oldjuk meg a $2x - 4 = 6 - 3x$ egyenletet.

Megoldás: Ekvivalens átalakítást végezve, (mindkét oldalból kivonunk $6 - 3x$-et vagy máshogy mondva, mindkét oldalhoz hozzáadunk $3x - 6$-ot), az

$$5x - 10 = 5x + (-10) = 0$$

kanonikus alakhoz jutunk, $\alpha = 5$, $\beta = -10$. Figyeljünk az együtthatók leolvasására. Alkalmazva a (9) megoldóképletet

$$x = -\frac{-10}{5} = 2.$$

Elvégezve az ellenőrzést

$$2 \cdot 2 - 4 = 6 - 3 \cdot 2,$$
$$0 = 0.$$

Tehát az egyenlet megoldása 2.

Gyakran nem érdemes a (8) alakra rendezni az egyenletet, az $ax = b$ alakból is könnyen leolvasható az $x = \frac{b}{a}$ megoldás. Ekkor persze a korábbi jelöléssel $\alpha = a$ és $\beta = -b$.

2-2. feladat: Oldjuk meg az $\frac{x-5}{6} - \frac{x-6}{12} = \frac{x-1}{3} + \frac{x+2}{4} + 1$ egyenletet.

Megoldás: A zavaróan sok törttől megszabadulhatunk, ha a törtek legkisebb közös nevezőjével, most a 12-vel, megszorozzuk az egyenletet:

$$2(x-5) - (x-6) = 4(x-1) + 3(x+2) + 12.$$

Figyeljük meg a bal oldalon a zárójelbe kerül $x - 6$-ot. Elvégezve a szorzásokat és összevonásokat a

$$-6x - 18 = 0$$

kanonikus alakhoz jutunk. Ebből $x = -3$. Ellenőrizve

$$\frac{-3-5}{6} - \frac{-3-6}{12} = \frac{-3-1}{3} + \frac{-3+2}{4} + 1,$$

$$\frac{-8}{6} - \frac{-9}{12} = \frac{-4}{3} + \frac{-1}{4} + 1,$$

$$\frac{-16}{12} - \frac{-9}{12} = \frac{-16}{12} + \frac{-3}{12} + 1,$$

$$\frac{-7}{12} = \frac{-19}{12} + 1,$$

$$\frac{12}{12} = 1.$$

Ellenőrzéskor mindig az eredeti egyenletbe kell visszahelyettesíteni, akkor is, ha azt a megoldás során sokat egyszerűsítettük.

2-3. feladat: Oldjuk meg az $1 - 2[5(3x-1) - 5(1+2x)] = 2(7-4x) - x$ egyenletet.

Megoldás: Felbontjuk a zárójeleket. Ilyenkor általában belülről kifelé érdemes haladni.

$$1 - 2[15x - 5 - (5 + 10x)] = 14 - 8x - x,$$

$$1 - 2[5x - 10] = 14 - 9x,$$

$$1 - 10x + 20 = 14 - 9x,$$

$$-x = -7,$$

$$x = 7.$$

Ellenőrzést végzünk:

$$1-2[5(3\cdot 7-1)-5(1+2\cdot 7)]=2(7-4\cdot 7)-7,$$

$$1-2[5\cdot 20-5\cdot 15]=2\cdot(-21)-7,$$

$$1-2\cdot 25=-49,$$

$$-49=-49,$$

tehát az 5 a megoldás.

2-4. feladat: Oldjuk meg a $\dfrac{2x+1}{x-3}+1=\dfrac{4x-5}{3-x}$ egyenletet.

Megoldás: Az ismeretlen a nevezőben is szerepel, és a két nevező egymás mínusz egyszerese. Először az egyenlet jobb oldalának nevezőjéből kiemelünk mínusz egyet, hogy azonosak legyenek a nevezők:

$$\frac{2x+1}{x-3}+1=-\frac{4x-5}{x-3}.$$

Ezután közös nevezőre hozunk a bal oldalon

$$\frac{(2x+1)+(x-3)}{x-3}=-\frac{4x-5}{x-3},$$

$$\frac{3x-2}{x-3}=\frac{-(4x-5)}{x-3}.$$

A két tört nevezője egyenlő, ezért a törtek pontosan akkor egyenlők, ha értelmesek, azaz egyik nevező sem nulla, és a számlálók is egyenlők. A számlálók egyenlőségéből kapjuk, hogy

$$3x-2=-(4x-5),$$

rendezve

$$7x - 7 = 0,$$

amiből

$$x = 1.$$

Mindkét nevező a 3-ban lenne nulla, $1 \neq 3$, ezért egy megoldás lehet, az 1.

Ellenőrzés:

$$\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 - 3} + 1 = \frac{4 \cdot 1 - 5}{3 - 1},$$

$$\frac{3}{-2} + 1 = \frac{-1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}.$$

< >

Miután a fenti megoldás során eljutottunk a

$$\frac{3x - 2}{x - 3} = \frac{-(4x - 5)}{x - 3}$$

törthöz, a megoldást így is folytathattuk volna: a két nevező 3-ban lenne nulla. Feltesszük ezért, hogy a továbbiakban az x nem lehet három, azaz az $x - 3$ nem lehet nulla. Ezért ha átszorzunk vele, az ekvivalens átalakítás. Mindkét oldalt megszorozva $x - 3$-al a

$$3x - 2 = -(4x - 5)$$

egyenletet kapjuk, innen ismét $x = 1$, és ezt az értéket nem zártuk ki, tehát ez lehet a megoldás. Az ellenőrzés ugyanaz, mint az előbb.

2-5. feladat: Oldjuk meg a $\dfrac{18x+2}{x-4} - \dfrac{15x+1}{x+5} = 3$ egyenletet.

Megoldás: Közös nevezőre hozzuk a bal oldalt, a közös nevező persze legyen $(x-4)(x+5)$:

$$\frac{(18x+2)(x+5)-(15x+1)(x-4)}{(x-4)(x+5)} = 3,$$

$$\frac{(18x^2+92x+10)-(15x^2-59x-4)}{(x-4)(x+5)} = 3,$$

$$\frac{3x^2+151x+14}{(x-4)(x+5)} = 3.$$

A bal oldali tört nevezője 4-ben és -5-ben nulla. Feltesszük tehát, hogy a továbbiakban x nem lehet sem 4, sem -5. Ekkor mindkét oldalt megszorozhatjuk a nem nulla $(x-4)(x+5) = x^2+x-20$ mennyiséggel.

$$3x^2+151x+14 = 3x^2+3x-60,$$

$$148x+74 = 0, \quad \text{azaz} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Mivel ezt az értéket nem zártuk ki, ez lehet egyedül a megoldás. Ellenőrzés:

$$\frac{18\cdot(-\frac{1}{2})+2}{-\frac{1}{2}-4} - \frac{15\cdot(-\frac{1}{2})+1}{-\frac{1}{2}+5} = 3,$$

$$\frac{-7}{-\frac{9}{2}} - \frac{\frac{-13}{2}}{\frac{9}{2}} = 3,$$

$$\frac{14}{9} + \frac{13}{9} = 3,$$

$$\frac{27}{9} = 3.$$

2-6. feladat: Oldjuk meg a $\dfrac{x-4}{x+4} - \dfrac{x+4}{x-4} + \dfrac{16x}{x^2-16} = 0$ egyenletet.

Megoldás: Először a bal oldali első két törtet közös nevezőre hozzuk.

$$\frac{(x-4)^2-(x+4)^2}{x^2-16} + \frac{16x}{x^2-16} = 0.$$

Elvégezve a négyzetre emeléseket, és összevonva a törteket

$$\frac{(x^2-8x+16)-(x^2+8x+16)+16x}{x^2-16} = 0,$$

$$\frac{0}{x^2-16} = 0.$$

Az utolsó egyenlet minden x-re igaz, amire értelmes. Az eredeti egyenlet tehát nem egy elsőfokú egyenlet, hanem egy olyan azonosság, amely a -4 és a 4 számokon kívül minden számra igaz.

2-7. feladat: Oldjuk meg a $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{4}{x-2} - \dfrac{1}{x+3}$ egyenletet.

Megoldás: Egy oldalra gyűjtve az ugyanolyan nevezőjű törteket

$$\frac{2}{x+3} = \frac{2}{x-2}.$$

Feltesszük, hogy x nem lehet -3 és 2, és mindkét oldalt megszorozzuk az $(x+3)(x-2)$ mennyiséggel:

$$2(x-2) = 2(x+3),$$

$$2x-4 = 2x+6.$$

2.3. Ellenőrző kérdések

2.4. Elsőfokú egyenletek és az egyenes

2.5. Ellenőrző kérdések

2.6. Másodfokú egyenletek

A másodfokú egyenlet az egyik legfontosabb egyenlet típus. Rengeteg helyen elő fog fordulni, és a matematika alkalmazásaiban is rendszeresen fellép, ezért megoldásuk alapos begyakorlása rendkívül fontos. Az

$$x^2 = 0,$$

$$x^2 = 4,$$

$$2x^2 - 4x = 2x,$$

$$-x^2 - 3x + 1 = 2$$

egyenletek mind másodfokú egyenletek, az első három abban speciális, hogy a lehetséges tagok közül egy vagy kettő hiányzik.

A hiányos másodfokú egyenletek megoldása jóval egyszerűbb, mint az általános eset, de persze a mindjárt következő megoldó képlet minden esetben használható.

2-2. definíció: A másodfokú egyenlet általános alakja

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0. \tag{10}$$

Itt x az ismeretlen, az α, β és γ konstansok az együtthatók, és $\alpha \neq 0$.

2-3. definíció: A (10) másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = \beta^2 - 4\alpha\gamma. \tag{11}$$

2-2. tétel:

- Ha a (10) másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, akkor az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.
- Ha a diszkrimináns nulla, akkor az egyenlet egyetlen kétszeres gyöke

$$x_1 = \frac{-\beta}{2\alpha}. \tag{12}$$

- Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenlet két különböző gyöke

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}. \tag{13}$$

  Ezt a két képletet szokás összevonva az

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}. \tag{14}$$

  alakban felírni, általában ezt nevezik a másodfokú egyenlet megoldóképletének.

Két elsőfokú polinom szorzata másodfokú polinom. Felmerül a kérdés, hogy minden másodfokú polinom két elsőfokú polinom szorzata-e? Erre a kédésre nem a válasz, például az $x^2 + 1$ polinom nem bontható fel elsőfokú polinomok szorzatára. De sok másodfokú polinom elsőfokúak szorzata. Erről szól a következő tétel.

2-3. tétel:

- Ha a (10) másodfokú egyenletnek két különböző x_1 és x_2 gyöke van, akkor az egyenlet bal oldalán álló másodfokú polinom gyöktényezős felbontása

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2). \tag{15}$$

- Ha a (10) másodfokú egyenletnek egy darab kétszeres x_1 gyöke van, akkor az egyenlet bal oldalán álló másodfokú polinom gyöktényezős felbontása

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_1) = \alpha(x - x_1)^2. \tag{16}$$

2-8. feladat: Oldjuk meg a $3x^2 - 27 = 0$ egyenletet.

Megoldás: Ha az egyenletünket egy kicsit átalakítjuk, $3x^2 - 27 = 3x^2 + (-27) = 0$, akkor ez egy kanonikus alakra rendezett egyenlet, $\alpha = 3$, $\beta = 0$ és $\gamma = -27$. Az együtthatók leolvasásakor még gondosabban kell eljárni, mint az elsőfokú esetben. Alkalmazva a (14) megoldóképletet

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-27)}}{2 \cdot 3} = \frac{0 \pm \sqrt{324}}{6} = \frac{0 \pm 18}{6}.$$

Ebből

$$x_1 = \frac{0 + 18}{6} = 3, \qquad x_2 = \frac{0 - 18}{6} = -3.$$

Ellenőrzést végezve

$$3 \cdot (3)^2 - 27 = 0, \qquad 3 \cdot (-3)^2 - 27 = 0,$$

tehát mindkét szám kielégíti az egyenletet, ezek az egyenlet gyökei.

2-9. feladat: Oldjuk meg az $(x+3)^2 = 2x+6$ egyenletet.

Megoldás: Hogy a megoldóképletet használni tudjuk a kanonikus alakra van szüségünk, rendezzük tehát az egyenletet. Először a négyzetre emelést végezzük el.

$$x^2 + 6x + 9 = 2x + 6.$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Ezután már alkalmazhatjuk a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2},$$

tehát $x_1 = -1$ és $x_2 = -3$. Ellenőrzés: $(-1+3)^2 = 4$ és $2 \cdot (-1) + 6 = 4$, illetve $(-3+3)^2 = 0$ és $2 \cdot (-3) + 6 = 0$, tehát mindkét szám kielégíti az egyenletet.

2-10. feladat: Oldjuk meg a $3x^2 - 3x - 1 = 0$ egyenletet.

Megoldás: Rögtön alkalmazhatjuk a megoldóképletet:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (3) \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6},$$

ebből

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6}, \qquad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

Az ellenőrzés most az eddigieknél kicsit körülményesebb. Külön kiszámoljuk az egyenlet első két tagjának a gyökökben vett helyettesítési értékét:

$$3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{6}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{21}}{6} + \frac{21}{36}\right) = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

$$3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{6}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Ezek különbsége 1, ha abból még levonjuk a harmadik tagot, nullát kapunk, x_1 tehát gyök. Hasonlóan

$$3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{6}\right)^2=3\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{21}}{6}+\frac{21}{36}\right)=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

$$3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{6}\right)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Ezek különbsége is 1, tehát x_2 is gyök.

2-11. feladat: Oldjuk meg a $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=0$ egyenletet.

Megoldás: A két szélső tört nevezője könnyen szorzatra bontható, és a szorzatra bontásokban az $x-2$, az $x+2$ és az x tényezők fordulnak elő. Mivel a középső tört nevezője is ezek közül kerül ki, bővíthetjük a törteket úgy, hogy a közös nevező $x(x-2)(x+2)$ legyen, mert a közös nevezőre hozás ekvivalens átalakítás. Ekkor az

$$\frac{2x}{x(x-2)(x+2)}-\frac{5x(x+2)}{x(x-2)(x+2)}+\frac{(x-4)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{2x-5x(x+2)+(x-4)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{-4x^2-14x+8}{x(x-2)(x+2)}=0$$

egyenletet kapjuk. Most sem szorozzuk meg az egyenletet a nevezővel, mert az lehet nulla is. Egy tört pontosan akkor nulla, ha a számlálója nulla, de a nevezője nem. A megoldóképlettel a számláló gyökei

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196+128}}{-8} = \frac{14 \pm 18}{-8},$$

ahonnan $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{1}{2}$, és ezekben a számokban a nevező nem nulla, ezek az egyenlet megoldásai.

Az ellenőrzéskor külön-külön kiszámoljuk a bal oldalon szereplő három tört értékét. $x_1 = -4$ esetén

$$\frac{2}{16-4} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{5}{-4-2} = -\frac{5}{6}, \qquad \frac{-4-4}{16-8} = -1$$

adódik, és $\frac{1}{6} - \left(-\frac{5}{6}\right) + (-1) = 0$. x_2 esetén a három tört

$$\frac{2}{\frac{1}{4}-4} = -\frac{8}{15}, \qquad \frac{5}{\frac{1}{2}-2} = -\frac{10}{3}, \qquad \frac{\frac{1}{2}-4}{\frac{1}{4}+1} = -\frac{14}{5},$$

és $-\frac{8}{15} - \left(-\frac{10}{3}\right) + \left(-\frac{14}{5}\right) = -\frac{8}{15} + \frac{50}{15} - \frac{42}{15} = 0$, tehát valóban ezek a gyökök.

2-12. feladat: Bontsuk szorzatra az $x^2 - 6x + 8$ kifejezést.

Megoldás: Tekintjük az $x^2 - 6x + 8 = 0$ egyenletet, meghatározzuk a gyökeit, és a (15) vagy a (16) formulát használva szorzatra bontjuk a polinomunkat.

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2},$$

tehát $x_1 = 4$ és $x_2 = 2$. A (15) formula alapján tehát

$$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2).$$

Beszorzással könnyen meggyőződhetünk a felbontás helyességéről.

2-13. feladat: Bontsuk szorzatra az $x^4 + x^3 - 12x^2$ kifejezést.

Megoldás: Először is látszik, hogy x^2 kiemelhető:

$$x^4 + x^3 - 12x^2 = x^2(x^2 + x - 12).$$

Az $x^2 + x - 12$ másodfokú polinomot pedig gyöktényezők szorzatára bonthatjuk, ha megoldjuk az $x^2 + x - 12 = 0$ egyenletet.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2},$$

tehát $x_1 = 3$, $x_2 = -4$. Ezt felhasználva

$$x^2 + x - 12 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 3)(x + 4).$$

Végül is tehát

$$x^4 + x^3 - 12x^2 = x^2(x - 3)(x + 4).$$

Beszorzással most is meggyőződhetünk a felbontás helyességéről.

2-14. feladat: Oldjuk meg az $x^6 - 2x^3 - 8 = 0$ egyenletet.

Megoldás: Ez nem másodfokú egyenlet, de ha elvégezzük az $u = x^3$ helyettesítést akkor egy másodfokú egyenletet kapunk, hiszen $x^6 = \left(x^3\right)^2$. A másodfokú egyenletet meg tudjuk oldani. A helyettesítési képletből $x = \sqrt[3]{u}$, ha tehát a másodfokú egyenletet gyökeiből köbgyököt vonunk, megkapjuk az eredeti egyenlet gyökeit. Kezdjük a másodfokú egyenlettel:

$$u^2 - 2u - 8 = 0,$$

$$u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2},$$

innen $u_1 = 4$, $u_2 = -2$. Köbgyököt minden számból vonhatunk, és a köbgyök vonás egyértelmű művelet, tehát két valós gyököt kapunk: $x_1 = \sqrt[3]{u_1} = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$, és $x_2 = \sqrt[3]{u_2}_1 = \sqrt[3]{-2} \approx -1.26$.

Ellenőrzéskor mindig a gyökök pontos értékét használjuk:

$$\left(\sqrt[3]{4}\right)^6 - 2\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 - 8 = 4^2 - 2 \cdot 4 - 8 = 0,$$

$$\left(\sqrt[3]{-2}\right)^6 - 2\left(\sqrt[3]{-2}\right)^3 - 8 = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0.$$

2-15. feladat: Oldjuk meg az $x^8 - 3x^4 - 4 = 0$ egyenletet.

Megoldás: Az előző feladat módszerét követjük. Az egyenlet most x^4-ben másodfokú, tehát az $u = x^4$ helyettesítést alkalmazzuk. Kapjuk, hogy

$$u^2 - 3u - 4 = 0,$$

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2},$$

tehát $u_1 = 4$, $u_2 = -1$. Negyedik gyököt csak pozitív számból vonhatunk, és a negyedik gyök vonásnak két értéke van. Ezért u_2 nem ad valós gyököt. A másik gyökből $x_{1,2} = \sqrt[4]{u_1} = \pm\sqrt[4]{4}$, vagyis $x_1 = \sqrt[4]{4} = \sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2} \approx 1.41$, és $x_2 = -\sqrt[4]{4} = -\sqrt{\sqrt{4}} = -\sqrt{2} \approx -1.41$. Ellenőrzést végezve

$$\left(\sqrt{2}\right)^8 - 3\left(\sqrt{2}\right)^4 - 4 = 2^4 - 3 \cdot 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0,$$

$$\left(-\sqrt{2}\right)^8 - 3\left(-\sqrt{2}\right)^4 - 4 = 2^4 - 3 \cdot 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0.$$

2.7. Ellenőrző kérdések

2.8. Másodfokú egyenletek és a parabola

2.9. Ellenőrző kérdések

3. lecke

Kétismeretlenes egyenletrendszerek

3. Kétismeretlenes egyenletrendszerek

3.1. Bevezető

Az egyismeretlenes egyenletek megoldása mellett gyakran van szükség többismeretlenes egyenletrendszerek megoldására. Mi csak két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerekkel foglalkozunk.

Az alapvető megoldási módszer vázlata:

- az egyik egyenletből kifejezzük az egyik ismeretlent a másik segítségével,
- ezt a kifejezést a másik egyenletbe beírva egy egyismeretlenes egyenletet nyerünk, amit megoldunk,
- a megoldást behelyettesítve az egyik eredeti egyenletbe a másik ismeretlenre is egy egyismeretlenes egyenletet nyerünk, amit megoldva megkapjuk az egyenletrendszer megoldását.

Ez az út azonban több buktatót is rejthet, és egyáltalán nem biztos, hogy egyáltalán járható vagy, hogy érdemes ezt csinálni. A részleteket és a legfontosabb egyenletrendszer típusokat a kidolgozott feladatokon keresztül mutatjuk be.

3.2. Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerek

A legegyszerűbb és legfontosabb kétismeretlenes egyenletrendszer a kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Ennek általános alakja:

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha x & + & \beta y & = & a, \\ \gamma x & + & \delta y & = & b. \end{array} \tag{17}$$

Itt x és y jelöli az ismeretleneket, α, β, γ és δ az együtthatók, amik, a-val és b-vel együtt, adott valós számok. Egy lineáris egyenletrendszernek vagy nincs megoldása vagy egyetlen megoldása van vagy végtelen sok megoldása van.

3-1. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 2, \\ 3x & - & 2y & = & 9. \end{array}$$

Megoldás: Ez persze egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer, most az együtthatók: $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$, $\delta = -2$, $a = 2$ és $b = 9$.

Ebben a példában bármelyik egyenletből bármelyik ismeretlen egyértelműen kifejezhető a másikkal. Fejezzük most ki az első egyenletből az y-t az x-el:

$$y = x - 2.$$

Ha ezt behelyettesítjük a második egyenletbe, kapjuk, hogy

$$3x - 2(x - 2) = 9,$$

$$3x - 2x + 4 = 9,$$

$$x + 4 = 9,$$

amiből $x = 5$. Ha ezt az első egyenletbe behelyettesítjük

$$5 - y = 2,$$

ahonnan $y = 3$. Az egyenletrendszerünk megoldása tehát: $x = 5$, $y = 3$.

A megoldásunk helyességét visszahelyettesítéssel ellenőrizzük:

$$\begin{array}{rcrcl} 5 & - & 3 & = & 2, \\ 3 \cdot 5 & - & 2 \cdot 3 & = & 9. \end{array}$$

Az előbbi kifejezéses módszer mellett a másik megoldási módszer az eliminálás. Ilyenkor megszorozzuk az egyik vagy mind a két egyenletet egy-egy alkalmas számmal, úgy, hogy valamelyik ismeretlennek az együtthatói a kapott egyenletekben egyenlők vagy egymás mínusz egyszeresei legyenek. Ezután kivonva, vagy összeadva a két egyenletet ez az ismeretlen kiesik, és a kapott egyenletből a másik ismeretlen meghatározható.

3-2. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 5, \\ x & - & 3y & = & -1. \end{array}$$

Megoldás: Két megoldást is mutatunk.

1. Szorozzuk meg az első egyenletet hárommal, a másodikat pedig hagyjuk változatlanul.

$$\begin{array}{rcrcr} 6x & + & 3y & = & 15, \\ x & - & 3y & = & -1. \end{array}$$

Összeadva az egyenleteket kapjuk, hogy $7x = 14$, amiből $x = 2$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve $2 - 3y = -1$, azaz $3y = 3$, vagyis $y = 1$. Visszehelyettesítéssel ellenőrizzük a megoldásunkat:

$$\begin{array}{rcrcr} 2 \cdot 2 & + & 1 & = & 5, \\ 2 & - & 3 \cdot 1 & = & -1. \end{array}$$

2. Persze más úton is megoldhatjuk a feladatunkat. Például megtehetjük azt is, hogy az első egyenletet nem változtatjuk meg, de a másodikat megszorozzuk -2-vel. Ekkor az

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 5, \\ -2x & + & 6y & = & 2, \end{array}$$

egyenletrendszert nyerjük, amiből összeadással $7y = 7$, azaz $y = 1$, amit az első egyenletbe beírva $2x + 1 = 5$, ahonnan $x = 2$. Nyilván most is ugyanazt a megoldást kapjuk, mint előbb.

Egy egyenletrendszer tehát általában több úton is megoldható. Lineáris egyenletrendszer esetén az eliminálás módszere gyakran célravezetőbb, ezt érdemes preferálni.

3-3. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + \frac{3y}{4} &= 13, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} &= 6. \end{aligned}$$

Megoldás: Most az első egyenletet hagyjuk változatlanul, és a másodikat megszorozzuk kettővel. Ekkor a két egyenletben az x együtthatója egyenlő lesz, hiszen azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} x + \frac{3y}{4} &= 13, \\ x - \frac{2y}{3} &= 12. \end{aligned}$$

Ha most kivonjuk a második egyenletet az elsőből, akkor

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) y = 1,$$

$$\frac{17}{12} y = 1,$$

amiből $y = \frac{12}{17}$. Ezt behelyettestíve az eredeti második egyenletbe

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{17} = 6,$$

$$\frac{x}{2} = 6 + \frac{4}{17} = \frac{106}{17},$$

amiből $x = \frac{212}{17}$. Ellenőrzünk:

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{212}{17} & + & \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{17} & = & 13, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{212}{17} & - & \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{17} & = & 6. \end{array}$$

Az első egyenletben a bal oldalon $\frac{221}{17}$ van, ami valóban 13, a második egyenletben a bal oldalon $\frac{102}{17}$ áll, ami 6.

3-4. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcl} x+y & + & 5(x-y) & = & 2, \\ 3(x+y) & + & 6(x-y) & = & 6. \end{array}$$

Megoldás: Ez is egy lineáris egyenletrendszer, csak nincs az (17)-beli kanonikus alakra rendezve. Elvégezve a műveleteket a

$$\begin{array}{rcrcr} 6x & - & 4y & = & 2, \\ 9x & - & 3y & = & 6 \end{array}$$

egyenletrendszer adódik. Szorozzuk meg az első egyenletet hárommal, a második egyenletet kettővel:

$$\begin{array}{rcrcr} 18x & - & 12y & = & 6, \\ 18x & - & 6y & = & 12. \end{array}$$

Ha most a második egyenletből kivonjuk az elsőt $6y = 6$, azaz $y = 1$ adódik. Ezt helyettesítve bármelyik egyenletbe, mondjuk az utolsóba, $18x - 6 = 12$, amiből nyerjük, hogy $x = 1$. Ellenőrzünk, ekkor az eredeti

egyenletrendszert kell használni:

$$\begin{array}{rcrcl} 2(1+1) & + & 5(1-1) & = & 2, \\ 3(1+1) & + & 6(1-1) & = & 6. \end{array}$$

3.3. Ellenőrző kérdések

3.4. Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerre visszavezethető egyenletrendszerek

Egy nemlineáris egyenletrendszer néha helyettesítéssel lineáris egyenletrendszerre vezethető vissza. Ehhez az kell, hogy az egyenletekben az ismeretleneknek csak ugyanolyan függvényei, illetve azok számszorosai szerepeljenek.

3-5. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & \dfrac{5}{y} & = & 15, \\ 2x & - & \dfrac{25}{y} & = & 23. \end{array}$$

Megoldás: Ez nem lineáris egyenletrendszer, de ha bevezetjük a $z = \frac{5}{y}$ helyettesítést, az x és z változókban lineáris egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & z & = & 15, \\ 2x & - & 5z & = & 23. \end{array}$$

Szorozzuk az első egyenletet kettővel:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 2z & = & 30, \\ 2x & - & 5z & = & 23. \end{array}$$

Az első egyenletből kivonjuk a másodikot, ekkor $7z = 7$, amiből $z = 1$. Ezt beírva az $x + z = 15$ egyenletbe $x = 14$ adódik. A helyettesítési képletből $y = 5$. Ellenőzést végezve:

$$\begin{aligned} 14 \quad + \quad \frac{5}{5} \quad &= \quad 15, \\ 28 \quad - \quad \frac{25}{5} \quad &= \quad 23. \end{aligned}$$

3-6. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+4} \quad - \quad \frac{3}{y-1} \quad &= \quad 5, \\ \frac{5}{x+4} \quad - \quad 10 \quad &= \quad \frac{5}{y-1}. \end{aligned}$$

Megoldás: Rendezve a

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+4} \quad - \quad \frac{3}{y-1} \quad &= \quad 5, \\ \frac{5}{x+4} \quad - \quad \frac{5}{y-1} \quad &= \quad 10. \end{aligned}$$

egyenletrendszerről van szó, ami $\frac{1}{x+4}$-ben és $\frac{1}{y-1}$-ben lineáris. Bevezetve az $u = \frac{1}{x+4}$, $v = \frac{1}{y-1}$ helyettesítéseket a

$$\begin{aligned} 2u \quad - \quad 3v \quad &= \quad 5, \\ 5u \quad - \quad 5v \quad &= \quad 10 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletet öttel, a másodikat kettővel szorozva ebből a

$$\begin{array}{rcrcr} 10u & - & 15v & = & 25, \\ 10u & - & 10v & = & 20 \end{array}$$

egyenletrendszer keletkezik. Kivonva az első egyenletből a másodikat $-5v = 5$, azaz $v = -1$, ezt a $2u - 3v = 5$ egyenletbe helyettesítve $2u + 3 = 5$ keletkezik, amiből $u = 1$. Ezután az $\dfrac{1}{x+4} = 1$ egyenletből $x = -3$, az $\dfrac{1}{y-1} = -1$ egyenletből $y = 0$ következik. Ellenőrzést végezve

$$\begin{array}{rcrcr} \dfrac{2}{-3+4} & - & \dfrac{3}{0-1} & = & 5, \\ \dfrac{5}{-3+4} & - & 10 & = & \dfrac{5}{0-1}, \end{array}$$

azaz

$$\begin{array}{rcrcr} 2 & - & (-3) & = & 5, \\ 5 & - & 10 & = & -5 \end{array}$$

adódik. Ezek az egyenlőségek pedig igazak.

3.5. Ellenőrző kérdések

3.6. Nemlineáris egyenletrendszerek

A nemlineáris egyenletrendszerek megoldására nincs minden esetben működő módszer, és gyakran egyik egyenletből sem egyszerű kifejezni valamelyik ismeretlent a másikkal, tehát az alapvető módszer sem alkalmazható. Ilyenkor sokszor át kell alakítani az egyenletrendszert, hogy valamilyen módszer alkalmazhatóvá váljon. Eközben általában arra törekszünk, hogy előállítsunk egy összefüggést - egyenletet - az

ismeretlenek között, amely a megadottaknál egyszerűbb. Ennek érdekében gyakran összeadjuk, kivonjuk az eredeti egyenleteket. A következő feladatokban mutatunk néhány jellegzetes példát.

3-7. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x+y &= 5, \\ xy &= 6. \end{aligned}$$

Megoldás: Ez az egyenletrendszer nemlineáris, mert nem rendezhető a (17) kanonikus alakra, ugyanis a második egyenletben az ismeretlenek szorzata szerepel. Az általános módszerhez folyamodunk, az első egyenletből kifejezzük mondjuk az y-t. $y = 5 - x$. Ezt a második egyenletbe beírva $x(5-x) = 6$ adódik, ami rendezve $x^2 - 5x + 6 = 0$. Ebből a másodfokú egyenletből

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

azaz $x_1 = 3$, és $x_2 = 2$.

Ha $x_1 = 3$, akkor az $y = 5 - x$ képletből $y_1 = 5 - x_1 = 5 - 3 = 2$. Ha $x_2 = 2$, akkor $y_2 = 5 - x_2 = 5 - 2 = 3$. Tehát csak az lehet, hogy:

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 2, \qquad \text{és} \qquad x_2 = 2, \quad y_2 = 3,$$

és mivel nem végeztünk olyan átalakítást, ahol gyökvesztés léphet fel, más megoldás nem jöhet szóba. Mindkét számpár ellenőrzését elvégezve

$$\begin{aligned} 3+2 &= 5, \\ 3 \cdot 2 &= 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2+3 &= 5, \\ 2 \cdot 3 &= 6. \end{aligned}$$

Tehát két megoldást kaptunk.

A lineáris egyenletrendszereknél tapasztaltakkal ellentétben egy nemlineáris egyenletrendszernek lehet, hogy nincs megoldása, lehet, hogy egy megoldása van, lehet, hogy több, de véges sok megoldása van, és az is lehet, hogy végtelen sok megoldása van.

3-8. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcl} x^2 & + & xy & = & 35, \\ y^2 & + & xy & = & 14. \end{array}$$

Megoldás: 1. Megpróbálkozunk az általános módszerünkkel. Ennek érdekében először is vegyük észre, hogy egyik ismeretlen sem lehet nulla, mert akkor valamelyik egyenlet bal oldalán nulla állna, és így az az egyenlet nem teljesülne. Oszthatunk tehát az ismeretlenekkel. Például az első egyenletből x-el osztva $x + y = \frac{35}{x}$, azaz $y = \frac{35}{x} - x$ következik. Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe:

$$\left(\frac{35}{x} - x\right)^2 + x\left(\frac{35}{x} - x\right) = 14,$$

$$\frac{35^2}{x^2} - 70 + x^2 + 35 - x^2 = 14,$$

$$\frac{35^2}{x^2} = 49,$$

innen $x^2 = 25$. Ha $x_1 = 5$, akkor $y_1 = \frac{35}{5} - 5 = 2$, ha $x_2 = -5$, akkor $y_2 = \frac{35}{-5} - (-5) = -2$. Ellenőrizve a kapott értékeket a

$$\begin{array}{rcrcl} 2^2 & + & 5 \cdot 2 & = & 35, \\ 2^2 & + & 5 \cdot 2 & = & 14, \end{array}$$

és a

$$\begin{array}{rcrcl} (-5)^2 & + & (-5)(-2) & = & 35, \\ (-2)^2 & + & (-5)(-2) & = & 14 \end{array}$$

egyenletek teljesülnek, ezek tehát a megoldások.

2. Egy másik megoldás. Ha összeadjuk az egyenleteket

$$x^2 + xy + y^2 + xy = (x+y)^2 = 49.$$

Ha $x + y = 7$, akkor az első egyenletből $x^2 + xy = x(x+y) = 35$, azaz $x_1 = 5$ és $y_1 = 2$. Ha $x + y = -7$, akkor az első egyenletből $x^2 + xy = x(x+y) = 35$, azaz $x_2 = -5$ és $y_2 = -2$. Így sokkal gyorsabban, egyszerűbb számolásakkal kapjuk meg a megoldásokat.

3-9. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcl} x^2 & - & y^2 & = & 2(x+y), \\ x^2 & + & y^2 & = & 5(x-y). \end{array}$$

Megoldás: Az első egyenlet $(x+y)(x-y) = 2(x+y)$ alakban is felírható. Ez két esetben teljesül.

1. Ha $x + y = 0$, akkor $y = -x$, amit a második egyenletbe helyettesítve

$$x^2 + (-x)^2 = 5(x - (-x)),$$

azaz $2x^2 = 10x$. Ez igaz, ha $x_1 = 0$, és akkor $y_1 = 0$ vagy ha $x_2 = 5$, és ekkor $y_2 = -5$.

2. Ha $x + y \neq 0$, akkor oszthatunk vele, és $x - y = 2$, azaz $y = x - 2$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$x^2 + (x-2)^2 = 10,$$

azaz $2x^2 - 4x - 6 = 0$, amiből

$$x_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4}.$$

Innen $x_3 = 3$ és $y_3 = 1$, illetve $x_4 = -1$ és $y_4 = -3$.

Elvégezzük mind a négy számpár ellenőrzését:

$$\begin{array}{rcrcl} 0^2 & - & 0^2 & = & 2(0+0), \\ 0^2 & + & 0^2 & = & 5(0-0), \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} 5^2 & - & (-5)^2 & = & 2(5-5), \\ 5^2 & + & (-5)^2 & = & 5(5+5), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} 3^2 & - & 1^2 & = & 2(3+1), \\ 3^2 & + & 1^2 & = & 5(3-1), \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} (-1)^2 & - & (-3)^2 & = & 2(-1-3), \\ (-1)^2 & + & (-3)^2 & = & 5(-1+3), \end{array}$$

és látjuk, hogy mind a négy megoldás.

< >

3.7. Ellenőrző kérdések

Kvíz

1. Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ 3x & - & y & = & -4 \end{array}$$

Melyik x, y számpár megoldása az egyenletrendszernek?

- ☐ $x = 1$, $y = 1$
- ☐ $x = 2$, $y = -1$
- ☐ $x = -1$, $y = 1$
- ☐ $x = 1$, $y = -1$

4. lecke

Egyenlőtlenségek

4. Egyenlőtlenségek

4.1. Bevezető

Az egyenletek megoldása mellett gyakran van szükség egyenlőtlenségek megoldására is. Egyenlőtlenségek megoldása során jól használható az egyenletek megoldásakor begyakorolt átalakítások egy része, de fontos eltérések is vannak. Általában az egyenlőlenségek megoldása bonyolultabb, mint az egyenleteké.

Négy féle egyenlőtlenség van: a kisebb, a kisebb vagy egyenlő, a nagyobb és a nagyobb vagy egyenlő, ezek jele rendre: $<$, $\leq$, $>$ és $\geq$. Ezeket a szimbólumokat relációjeleknek is hívjuk.

Egy egyenlet megoldása leggyakrabban egy vagy több, de véges sok szám, esetleg végtelen sok, egymástól "elkülönülő" szám, pl. trigonometrikus egyenletek esetén. Egy egyenlőtlenség megoldáshalmaza ezzel szemben általában egy véges vagy végtelen intervallum, illetve ilyenek diszjunkt uniója. Az intervallumok az alábbi halmazok. Az első négyet véges, a második négyet végtelen intervallumnak hívjuk.

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, & (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, \\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}, \\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} | x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Tehát például az $x \in (a,b)$ állítás ugyanazokra az x valós számokra igaz, mint amelyek kielégítik az $a < x < b$ feltételt, és így tovább a többi esetben is. ($a < x < b$ azt jelenti, hogy $a < x$ és $x < b$, stb.)

Egy egyenlőtlenség ekvivalens átalakítása egy olyan átalakítás, amely nem változtatja meg az egyenlőlenség megoldáshalmazát.

Megoldani egy egyenlőtlenséget annyit jelent, hogy ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk, hogy a megoldáshalmaz intervallumai egyértelműen azonosíthatók legyenek - az egyenlőtlenség a fenti nyolc intervallum definíciójában szereplő valamelyik egyenlőtlenséggé váljon, illetve ilyen egyenlőtlenségeknek a logikai "vagy" művelettel összekapcsolt rendszerévé.

Az egyenlőtlenségek ekvivalens átalakításai nem azonosak az egyenletek ekvivalens átalakításaival. Az alábbi felsorolásban pozitív (negatív) mennyiségen egy pozitív számot vagy egy olyan formulát értünk, amely a változó minden értékére pozitív (negatív). A legfontosabb ekvivalens átalakítások a következők:

1. tetszőleges mennyiség hozzáadása vagy kivonása az egyenlőtlenség mindkét oldalából,
2. mindkét oldal szorzása vagy osztása egy pozitív mennyiséggel,
3. mindkét oldal szorzása vagy osztása egy negatív mennyiséggel, és az egyenlőtlenség megfordítása,
4. az egyenlőtlenség mindkét oldalának páros kitevős hatványra emelése vagy páros kitevőjű gyökvonás mindkét oldalból, ha mindkét oldalon nullánál nagobb vagy egyenlő mennyiség áll,
5. az egyenlőtlenség mindkét oldalának páros kitevős hatványra emelése és az egyenlőtlenség megfordítása, ha mindkét oldalon nullánál kisebb vagy egyenlő mennyiség szerepel,
6. az egyenlőtlenség mindkét oldalának páratlan kitevős hatványra emelése vagy páratlan kitevőjű gyökvonás mindkét oldalból,
7. mindkét oldal reciprokának vétele és az egyenlőtlenség megfordítása, ha mindkét oldalon pozitív vagy mindkét oldalon negatív előjelű mennyiség áll.

Az egyenlőtlenségek megoldása során gyakran diszkussziót hajtunk végre. Ez azt jelenti, hogy a változóra feltételeket kötünk ki - ezek maguk is általában egyenlőtlenségek. Ezek a feltételek olyanok, hogy egyszerre semelyik kettő sem teljesülhet, de valamelyik biztosan teljesül. Ezután mindegyik feltétel mellett megoldjuk az egyenlőtlenséget, és a teljes megoldáshalmaz az így kapott "rész" megoldáshalmazok uniója.

Az eddig elmondottakon túl külön módszerek vannak a törtes, a másodfokú és az abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek kezelésére, ezeket a következő feladatokban vagy a későbbi leckékben mutatjuk be.

Minden egyenlőtlenség ekvivalens átalakítással nullára rendezhető, sőt, olyan alakra hozható, hogy a jobb oldalon áll a nulla. Gyakran az lesz az első cél, hogy ilyen alakra rendezzük az egyenlőtlenséget.

Az egyenlőtlenségeket is típusokba sorolhatjuk, a legegyszerűbb típusokat a kanonikus alakjukkal vagy

valamilyen jellemző tulajdonságukkal, pl. abszolút értéket tartalmazó, lehet megadni.

Az egyenlőtlenségek sokszor grafikusan is megoldhatók. Ilyenkor először nullára rendezzük az egyenlőtlenséget úgy, hogy a jobb oldalon álljon a nulla. Ezután a bal odalon álló kifejezést egy függvény hozzárendelési utasításának tekintve ábrázoljuk ezt a függvényt egy derékszögű koordináta rendszerben. Ahol a grafikon az x tengely fölött van ott pozitív a függvény, ahol alatta ott negatív.

A módszer alkalmazhatósága tehát azon múlik, hogy fel tudjuk-e rajzolni ennek a függvénynek a grafikonját legalább az előjelét tekintve helyesen. Ebben nagy segítséget nyújt, ha meghatározzuk a függvény zérushelyeit.

Ezután az ábráról a relációjel konkrét típusától függően leolvasható a megoldáshalmaz. A megoldáshalmaz intervallumainak szélén álló számokat teli vagy üres körrel megjelöljük, attól függően, hogy a megoldáshalmazhoz tartoznak vagy nem. A megoldáshalmaz többi pontját megvastagítjuk.

4.2. Lineáris egyenlőlenségek

4-1. definíció: A lineáris egyenletőtlenségek az ekvivalens átalakításokkal az alábbi alakok valamelyikére rendezhető egyenlőtlenségek:

$$\alpha x + \beta > 0, \quad \alpha x + \beta \geq 0, \quad \alpha x + \beta < 0, \quad \alpha x + \beta \leq 0. \tag{19}$$

Itt x az ismeretlen, az α, β konstansok az együtthatók, és $\alpha \neq 0$.

Ezek mindegyike egyszerű átalakítással a (18)-ban szereplő egyenlőtlenségek valamelyikére rendezhető.

4-1. feladat: Oldjuk meg a $3x + 8 \leq 5$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Mindkét oldalból kivonva 8-at, majd osztva a pozitív 3-al, amikor nem fordul meg az egyenlőtlenség iránya, az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$3x \leq -3,$$

$$x \leq -1.$$

Az egyenlőtlenségünk megoldása tehát az $\{x \in \mathbb{R} | x \leq -1\} = (-\infty, -1]$ halmaz.

4-2. feladat: Oldjuk meg az $x - 2 < 3x + 4$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Mindkét oldalhoz hozzáadva 2-t és kivonva $3x$-et kapjuk, hogy

$$x < 3x + 6,$$

$$-2x < 6.$$

Osztva a negatív -2-vel megfordul meg az egyenlőtlenség iránya:

$$x > -3.$$

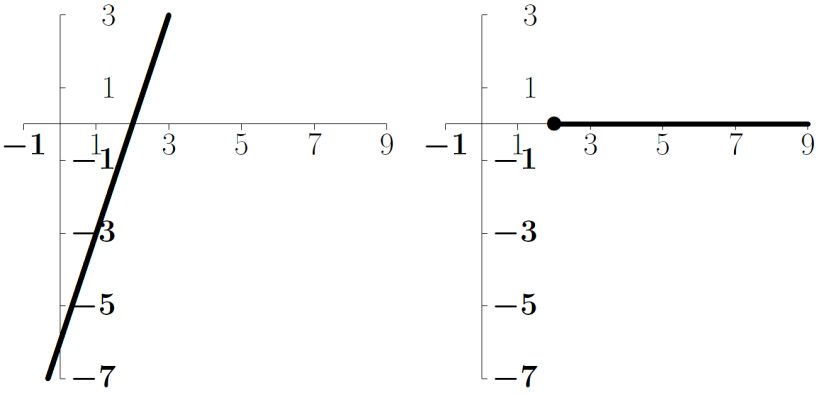
Az egyenlőtlenség megoldása tehát az $\{x \in \mathbb{R} | x > -3\} = (-3, \infty)$ halmaz.

4-3. feladat: Oldjuk meg grafikusan a $2x - 2 \geq 4 - x$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Rendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$3x - 6 \geq 0.$$

Ezután felrajzoljuk annak a függvénynek a grafikonját, amelynek a hozzárendelési utasítása az előző egyenlőtlenség bal oldala, ez most az $f(x) = 3x - 6$ lineáris függvény, aminek a grafikonja egy egyenes. Az egyenes meredeksége pozitív, így az $x = 2$ zérushelytől jobbra eső pontokban pozitív a függvény. Leolvasható tehát az (1.) ábráról, hogy a megoldáshalmaz $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\} = [2, \infty)$. A 2 is benne van a megoldáshalmazban, hiszen az egyenlőtlenségben $\geq$ szerepel.



1. ábra. Az $f(x) = 3x - 6$ egyenes grafikonja és a $3x - 6 \geq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza.

4-4. feladat: Oldjuk meg a $(3-2x)^2 > (2x-1)^2 + 12$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Ha elvégezzük a kijelölt négyzetre emeléseket és rendezünk, láthatjuk, hogy valójában lineáris egyenlőtlenségről van szó:

$$9 - 12x + 4x^2 > 4x^2 - 4x + 1 + 12,$$

$$-8x > 4,$$

$$x < -\frac{1}{2}.$$

Az egyenlőtlenség megoldása tehát az $\left\{x \in \mathbb{R} | x < -\frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ halmaz.

4.3. Ellenőrző kérdések

4.4. Törtes egyenlőtlenségek

Akkor nevezünk egy egyenlőtlenséget törtes egyenlőtlenségnek, ha abban az ismeretlen egy tört nevezőjében is előfordul. Csak azzal az esettel fogunk foglalkozni, amikor a nevezők lineáris függvények.

A törtes egyenlőtlenségek megoldása során gyakran diszkussziót végzünk.

4-5. feladat: Oldjuk meg a $\dfrac{-3}{2x-4} > 0$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: A törtünk számlálója negatív, így a tört pontosan akkor lesz pozitív, ha a nevezője is negatív. Az eredeti egyenlőtlenség tehát ekvivalens a

$$2x - 4 < 0$$

lineáris egyenlőtlenséggel. Ebből $x < 2$, tehát a megoldása az $\{x \in \mathbb{R} | x < 2\} = (-\infty, 2)$ halmaz.

Figyeljük meg, hogy nem azzal kezdtük a megoldást, hogy kikötöttük, hogy a nevező nem lehet nulla. Ha az átalakítások során csak ekvivalens átalakítást végzünk, a diszkusszió során pedig minden lehetőséget figyelembe veszünk, akkor megkapjuk a változó minden lehetséges értékét, olyan szám pedig, ami meg nincs a megoldáshalmazban nem lehet a változó értéke.

4-6. feladat: Oldjuk meg az $\dfrac{1}{x-2} \leq 1$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Először nullára rendezünk, majd közös nevezőre hozzuk a bal oldalt.

$$\frac{1}{x-2} - 1 \leq 0,$$

$$\frac{1-(x-2)}{x-2} \leq 0,$$

$$\frac{3-x}{x-2} \leq 0.$$

Szeretjük inkább azt vizsgálni, hogy egy tört mikor pozitív vagy mikor nagyobb vagy egyenlő mint nulla, ezért megszorozzuk az utolsó egyenlőtlenséget -1-el, amit úgy végzünk el, hogy a bal oldalon a tört számlálóját szorozzuk meg -1-el. Szorozhatnánk a nevezőt is, de az $x-2$ alakot jobban szeretjük, mint a $2-x$ alakot.

$$\frac{x-3}{x-2} \geq 0.$$

Diszkussziót végzünk.

Egy tört akkor nagyobb vagy egyenlő mint nulla, ha egyenlő nullával vagy ha nagyobb, mint nulla. Ez utóbbi két esetben teljesül, ha pozitív számot osztunk pozitív számmal vagy, ha negatívat osztunk negatívval.

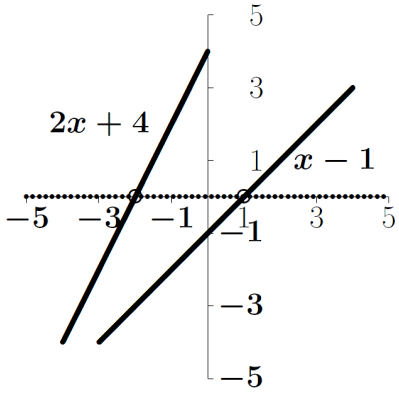
Ha H_1 jelöli azoknak a számoknak a halmazát, amelyekre az egyenlőtlenségünk azért nagyobb vagy egyenlő mint nulla, mert egyenlő nullával, H_2 azoknak a számoknak a halmazát, amelyekre az egyenlőtlenségünk azért nagyobb mint nulla, mert a számlálója is pozitív és a nevezője is, H_3 azoknak a számoknak a halmazát, amelyekre az egyenlőtlenségünk azért nagyobb mint nulla, mert a számlálója is negatív és a nevezője is, akkor a megoldáshalmaz $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

Először meghatározzuk a H_1 halmazt. A törtünk olyan x-re nulla, amelyre a számlálója nulla, de a nevezője nem. Ez most egyedül a 3 számra teljesül, tehát $H_1 = \{3\}$, ez tehát egy egyelemű halmaz.

H_2 meghatározásakor a számláló pozitív, ha $x > 3$, a nevező pozitív, ha $x > 2$, mind a két feltétel teljesül, ha $x > 3$, tehát $H_2 = (3,\infty)$.

H_3 meghatározásakor a számláló negatív, ha $x < 3$, a nevező negatív, ha $x < 2$, mind a két feltétel teljesül, ha $x < 2$, tehát $H_3 = (-\infty,2)$. Tehát a megoldáshalmaz

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = (-\infty,2) \cup [3,\infty).$$



2. ábra. Az nevezők grafikonja és a gyökeik által kijelölt intervallumok.

Figyeljük meg, hogy a 3 hozzávétele a H_2 halmazhoz a balról nyílt $(3,\infty)$ félegyenest a balról zárt $[3,\infty)$ félegyenessé változtatja. Intervallumok diszjunkt uniójának tagjait a számegyenesen elfoglalt sorrendjükben adjuk meg.

4-7. feladat: Oldjuk meg a $\dfrac{3}{x-1} < \dfrac{2}{2x+4}$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Törtes egyenlőtlenségek megoldása során gyakran eltüntetjük a nevezőkből, szorzás segítségével, az ismeretlent. Ekkor diszkussziót kell végezni aszerint, hogy milyen előjelű mennyiségekkel szorzunk.

A bal oldali tört nevezője 1-ben nulla, a jobboldali tört nevezője pedig -2-ben. Ez a két szám három intervallumra bontja a számegyenest: ezek a $(-\infty,-2)$, a $(-2,1)$ és az $(1,\infty)$ intervallumok. Ezeken az intervallumokon a törtek nevezői állandók, és a (2.) ábráról leolvasható, hogy milyen az előjelük.

Először megoldjuk az egyenlőtlenséget az $x < -2$, azaz az $x \in (-\infty, -2)$ feltétel mellet. Legyen az így kapott megoldások halmaza H_1.

Ha $x < -2$, akkor mindkét tört nevezője negatív, amikor egymás után átszorzunk velük mind a kétszer megfordul az egyenlőtlenség iránya, tehát végül is marad az eredeti:

$$3(2x+4) < 2(x-1).$$

$$6x + 12 < 2x - 2$$

$$4x < -14, \text{ azaz } x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right).$$

Így $H_1 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -\frac{7}{2}) = (-\infty, -\frac{7}{2})$.

A $-2 < x < 1$, azaz az $x \in (-2{,}1)$ feltétel mellet kapot megoldások halmazát jelölje H_2.

Ha $-2 < x < 1$, akkor a jobb oldali tört nevezője pozitív, a bal oldalié negatív, így átszorozva velük megfordul az egyenlőtlenség iránya:

$$3(2x+4) > 2(x-1).$$

$$6x + 12 > 2x - 2$$

$$4x > -14, \text{ azaz } x \in \left(-\frac{7}{2}, \infty\right).$$

Ezért $H_2 = (-2{,}1) \cap (-\frac{7}{2}, \infty) = (-2{,}1)$.

Végül az $x > 1$, azaz az $x \in (1, \infty)$ feltétel mellet kapot megoldások halmazát jelölje H_3.

Ha $x > 1$, akkor mindkét tört nevezője pozitív, amikor egymás után átszorzunk velük nem fordul meg az egyenlőtlenség iránya:

$$3(2x+4) < 2(x-1).$$

$$6x + 12 < 2x - 2$$

$$4x < -14, \text{ azaz } x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right).$$

Így $H_3 = (1,\infty) \cap (-\infty, -\frac{7}{2}) = \emptyset$.

A eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza, mint tudjuk, a diszkusszió során kapott H_1, H_2 és H_3 rész megoldáshalmazok uniója, tehát a

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup (-2,1) \cup \emptyset = \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup (-2,1)$$

halmaz.

4.5. Ellenőrző kérdések

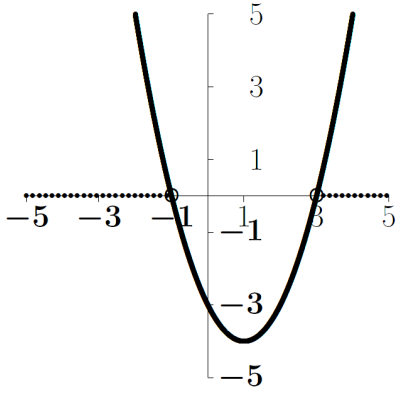
4.6. Másodfokú egyenlőtlenségek

Azokat az egyenlőtlenségeket hívjuk másodfokú egyenlőtlenségnek, amelyek ekvialens átalakításokkal nullára rendezhetők úgy, hogy a bal oldalon egy másodfokú polinom áll.

Tudjuk, hogy minden másodfokú polinom grafikonja parabola. Felfelé nyíló, ha a főegyüttható pozitív, és lefelé nyíló, ha az negatív. Így a másodfokú polinomok grafikonja könnyen felrajzolható, ha meghatározuk a gyököket.

A gafikon segítségével az egyenlőtlenség megoldáshalmaza leolvasható. Ha a parbola felfelé nyíló, akkor a másodfokú polinom a gyökökön kívül pozitív, a gyökök között negatív. Ha a parbola lefelé nyíló, akkor a másodfokú polinom a gyökök között pozitív, a gyökökön kívül negatív.

Ha nincsenek gyökök, akkor pedig nincs is szükség ábrára, mert ilyenkor a polinom minden x-re pozitív vagy negatív, attól függően, hogy a főegyüttható pozitív vagy negatív, így a megoldáshalmaz most is meghatározható.



3. ábra. $x^2 - 2x - 3$ grafikonja és a gyökein kívüli halmaz.

4-8. feladat: Oldjuk meg az $x^2 > 2x + 3$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Rendezve az egyenlőtlenséget

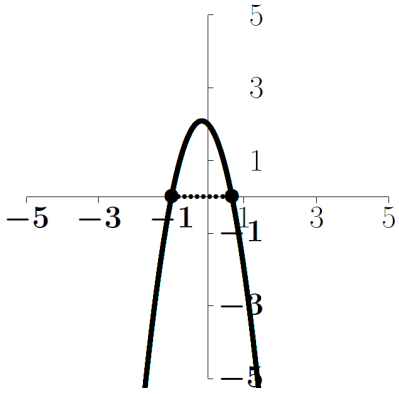
$$x^2 - 2x - 3 > 0.$$

A bal oldalon álló másodfokú polinom győkei

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

azaz $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

A parabola felfelé nyíló, tehát a gyökökön kívül pozitív, vagyis a megoldáshalmaz, amint az a (3.) ábráról leolvasható, a $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ halmaz.



4. ábra. $-3x^2 - x + 2$ grafikonja és a gyökei közötti halmaz.

4-9. feladat: Oldjuk meg a $2 \geq 3x^2 + x$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Rendezés után a

$$-3x^2 - x + 2 \geq 0$$

másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk.

$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{(-1)^2 + 24}}{-6} = \frac{1 \pm 5}{-6},$$

vagyis $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

A parabola lefelé nyíló, tehát a gyökök között nem negatív, beleértve a gyököket is. A megoldáshalmaz, amint az a (4.) ábráról leolvasható, a $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$ halmaz.

4-10. feladat: Oldjuk meg az $\dfrac{1}{6x-6} \geq \dfrac{1}{6x+12}$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Ez ugyan nem másodfokú egyenlőtlenség, de a megoldása visszavezethető egy másodfokú egyenlőtlenség megoldására. Rendezéssel ugyanis az

$$\frac{1}{6x-6} - \frac{1}{6x+12} \geq 0,$$

$$\frac{(6x+12)-(6x-6)}{(6x-6)(6x+12)} = \frac{(6x+12)-(6x-6)}{36(x-1)(x+2)} \geq 0,$$

vagyis az

$$\frac{1}{2(x-1)(x+2)} \geq 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

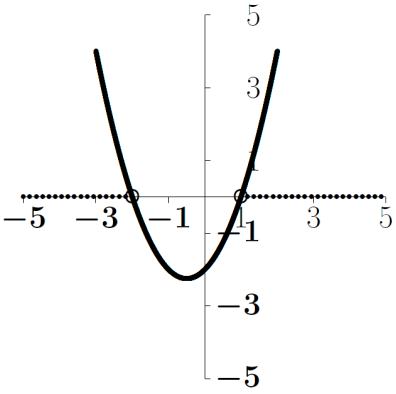
Mivel itt a bal oldali tört számlálója pozitív, a tört akkor lesz pozitív, ha a nevezője is az. A törtünk nulla nem lehet, mert a számláló konstans. Így az eredeti egyenlőtlenség ekvivalens az

$$(x-1)(x+2) > 0$$

egyenlőtlenséggel. Itt a bal oldal egy másodfokú polinom, ha elvégeznénk a szorzást, a főegyüttható 1 lenne, tehát a grafikon felfelé nyíló parabola, és a gyökök persze $x_1 = -2$ és $x_2 = 1$.

Tehát a megoldáshalmaz, amint az az (5.) ábráról leolvasható, a $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ halmaz.

4.7. Ellenőrző kérdések



5. ábra. $(x-1)(x+2)$ grafikonja és a gyökein kívüli halmaz.

5. lecke

Abszolút értékes egyenletek, egyenlőtlenségek

5. Abszolút értékes egyenletek, egyenlőtlenségek

5.1. Bevezető

A függvényekkel kapcsolatos egyik legfontosabb fogalom a határérték. Ennek megértéséhez nélkülözhetetlen az abszolút értékes egyenlőtlenségek biztos ismerete. Ebben a leckében először az abszolút értékes egyenletekkel, majd az abszolút értékes egyenlőtlenségekkel foglalkozunk.

Az a szám $|a|$ abszolút értéke

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ha } a \geq 0, \\ -a & \text{ha } a < 0. \end{cases} \tag{20}$$

Fontos összefüggések az alábbiak:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \text{és} \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}. \tag{21}$$

5.2. Abszolút értékes egyenletek

Az egyik legegyszerűbb abszolút értékes egyenlet az

$$|A| = \alpha \tag{22}$$

alakú egyenlet, ahol A az x változótól függő tetszőleges kifejezés, α tetszőleges nem negatív valós szám. (Ha α negatív, akkor az $|A| = \alpha$ egyenletnek nincs megoldása, egy mennyiség abszolút értéke nem lehet negatív.)

Egy ilyen abszolút értékes egyenlet megoldásához gyakran két, abszolút értéket nem tartalmazó egyenletet kell megoldani. Ugyanis

$$|A| = \alpha \text{ pontosan akkor teljesül, ha } A = \alpha \text{ vagy } A = -\alpha. \tag{23}$$

Ha az $A = \alpha$ egyenlet megoldáshalmaza H_1, az $A = -\alpha$ egyenlet megoldáshalmaza H_2, akkor az eredeti $|A| = \alpha$ abszolút értékes egyenlet megoldáshalmaza $H_1 \cup H_2$.

Egyszerűbb a helyzet, ha A minden lehetséges x-re állandó előjelű. Ilyenkor $A \geq 0$ esetén $|A| = \alpha$ azzal ekvivalens, hogy $A = \alpha$, míg $A < 0$ esetén $|A| = \alpha$ azzal ekvivalens, hogy $-A = \alpha$.

Persze nem minden abszolút értékes egyenlet rendezhető $|A| = \alpha$ alakra. Ilyenkor más módszerre van szükség, néhány egyszerű esetre a feladatokban kitérünk.

5-1. feladat: Oldjuk meg a $2|x| - 5 = 7 - |x|$ egyenletet.

Megoldás: Először a (22)-ben szereplő alakra rendezzük az egyenletet.

$$3|x| = 12,$$

$$|x| = 4.$$

Innen $x = 4$ vagy $x = -4$, tehát a megoldáshalmaz $\{-4,4\}$. Az ellenőrzés csak annyi, hogy mindkét megoldás esetén

$$2 \cdot 4 - 5 = 7 - 4,$$

ami persze igaz.

5-2. feladat: Oldjuk meg a $|2x - 1| = 5$ egyenletet.

Megoldás: Vagy $2x - 1 = 5$ teljesül, amiből $x = 3$, vagy $2x - 1 = -5$ teljesül, ahonnan $x = -2$. A megoldáshalmaz tehát $\{-2,3\}$. Ellenőrzés:

$$|2 \cdot (-2) - 1| = |-5| = 5,$$

és

$$|2 \cdot 3 - 1| = 5,$$

tehát mindkét szám megoldás.

5-3. feladat: Oldjuk meg az $|x| + x = 2$ egyenletet.

Megoldás: Az egyenletünk

$$|x| = 2 - x$$

alakra rendezhető, ami ugyan nem a (22)-beli alak, de elég egyszerű ahhoz, hogy meg tudjuk oldani.

Ha $x \geq 0$, akkor arról van szó, hogy $x = 2 - x$, azaz $x = 1$.

Ha $x < 0$, akkor $-x = 2 - x$, ami ellentmondás. Tehát egy megoldás van, az 1, amit leellenőrizni is nagyon könnyű.

5-4. feladat: Oldjuk meg az $\left||x| - \dfrac{3}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ egyenletet.

Megoldás: Ha $|x| - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$, akkor $|x| = 2$, amiből $x = \pm 2$.

Ha $|x| - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}$, akkor $|x| = 1$, amiből $x = \pm 1$. A megoldáshalmaz tehát $\{-2, -1, 1, 2\}$. Ellenőrzés: -2 és 2 esetén $\left|2 - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$ teljesül, -1 és 1 esetén $\left|1 - \frac{3}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ szintén teljesül.

5-5. feladat: Oldjuk meg a $|2x - 1| = |x + 4|$ egyenletet.

Megoldás: Két mennyiség abszolút értéke egyenlő, ha egyenlők a mennyiségek vagy egymás mínusz egyszeresei.

Ha $2x - 1 = x + 4$, akkor $x = 5$.

Ha $2x - 1 = -(x + 4) = -x - 4$, akkor $3x = -3$, azaz $x = -1$.

Ellenőrzés: $x = 5$ esetén

$$|10 - 1| = |5 + 4|,$$

ami igaz, $x = -1$ esetén

$$|-2 - 1| = |-1 + 4|$$

ami szintén igaz, tehát a megoldáshalmaz $\{-1{,}5\}$.

5-6. feladat: Oldjuk meg a $\left|\dfrac{2x+6}{x+1}\right| = 2$ egyenletet.

Megoldás: Ha

$$\frac{2x+6}{x+1} = 2, \quad \text{akkor} \quad \frac{2x+6}{x+1} - 2 = 0,$$
$$\frac{2x+6-2(x+1)}{x+1} = 0, \quad \frac{4}{x+1} = 0.$$

Ez az egyenlőség soha nem teljesül.

Ha

$$\frac{2x+6}{x+1} = -2, \quad \text{akkor} \quad \frac{2x+6}{x+1} + 2 = 0,$$
$$\frac{2x+6+2(x+1)}{x+1} = 0, \quad \frac{4x+8}{x+1} = 0.$$

Egy tört ott nulla, ahol a számlálója nulla és a nevezője nem. Ebből $x = -2$-t kapunk.

Mivel

$$\left|\frac{-4+6}{-2+1}\right| = |-2| = 2,$$

a -2 az egyetlen megoldás.

5-7. feladat: Oldjuk meg az $|x| + |x-2| = 4$ egyenletet.

Megoldás: Ha az egyenletben több különböző kifejezés abszolút értékének összege vagy különbsége szerepel, akkor általában legegyszerűbb diszkussziót végezni, aszerint, hogy milyen előjelűek abszolút értékeken belüli mennyiségek. Ennek érdekében először meghatározzuk az abszolút értékeken belüli kifejezések gyökeit. Ezek a gyökök feldarabolják a számegyenest részhalmazokra, amelyeken belül minden abszolút értékeken belüli mennyiség állandó előjelű, így elvégezhető az abszolút érték vétele.

A mi esetünkben az abszolút értékeken belüli kifejezések gyökei 0 és 2. Ezek a számegyenest a $(-\infty,0)$, a $[0,2)$ és a $[2,\infty)$ intervallumokra bontják. (A gyököket vegyük mindig baloldali végpontként a halmazokba.) Az ezekbe a halmazokba eső rész megoldáshalmazokat jelölje rendre H_1, H_2 és H_3. Ekkor a megoldáshalmaz $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

Ha $x \in (-\infty,0)$, akkor $|x| = -x$ és $|x-2| = -(x-2)$, hiszen ilyenkor mindkét mennyiség negatív. Így az egyenletünk

$$-x - (x-2) = 4,$$

amiből $-2x + 2 = 4$, azaz $x = -1$, tehát

$$H_1 = (-\infty,0) \cap \{-1\} = \{-1\}.$$

Ha $x \in [0,2)$, akkor $|x| = x$ és $|x-2| = -(x-2)$, hiszen ilyenkor x már pozitív de $x-2$ még negatív. Ezért az egyenletünk

$$x - (x-2) = 4,$$

innen a $2 = 4$ ellentmondást kapjuk, tehát nincs ide eső megoldás, $H_2 = \emptyset$.

Ha $x \in [2,\infty)$, akkor $|x| = x$ és $|x-2| = x-2$, hiszen ilyenkor már x és $x-2$ is pozitív, azaz

$$x + x - 2 = 4,$$

vagyis $2x = 6$, $x = 3$. Ezért

$$H_3 = [2,\infty) \cap \{3\} = \{3\}.$$

Végül is tehát a megoldáshalmaz

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \{-1\} \cup \emptyset \cup \{3\} = \{-1,3\}.$$

Ellenőrzés:

$$|-1| + |-1-2| = 1 + 3 = 4$$

teljesül, és

$$|3| + |3-2| = 3 + 1 = 4$$

is teljesül.

5-8. feladat: Oldjuk meg az $|x+1| - |2x-1| = -3$ egyenletet.

Megoldás: Az előző feladat módszerét követjük. Most az abszolút értékeken belüli kifejezések gyökei -1 és $\frac{1}{2}$. Ezek a számegyenest a $(-\infty, -1)$, a $[-1,\frac{1}{2})$ és az $[\frac{1}{2},\infty)$ intervallumokra bontják. Az ezekbe a halmazokba eső rész megoldáshalmazokat jelölje most is rendre H_1, H_2 és H_3. Ekkor a megoldáshalmaz persze újra $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

Ha $x \in (-\infty, -1)$, akkor $|x+1| = -(x+1)$ és $|2x-1| = -(2x-1)$, azaz

$$-(x+1) - (-(2x-1)) = -3,$$

$$x - 2 = -3,$$

vagyis $x = -1$. Így

$$H_1 = (-\infty, -1) \cap \{-1\} = \emptyset.$$

Ha $x \in [-1,\frac{1}{2})$, akkor $|x+1| = x+1$ és $|2x-1| = -(2x-1)$, azaz

$$x + 1 - (-(2x-1)) = -3,$$

$$3x = -3,$$

vagyis $x = -1$. Így

$$H_2 = \left[-1, \frac{1}{2}\right) \cap \{-1\} = \{-1\}.$$

Végül, ha $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$, akkor $|x+1| = x+1$ és $|2x-1| = 2x-1$, azaz

$$x + 1 - (2x - 1) = -3,$$

$$-x + 2 = -3,$$

vagyis $x = 5$. Így

$$H_3 = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \cap \{5\} = \{5\}.$$

Ezek szerint

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \emptyset \cup \{-1\} \cup \{5\} = \{-1, 5\}.$$

Ellenőrzés:

$$|-1+1| - |-2-1| = 0 - 3 = -3$$

teljesül, és

$$|5+1| - |10-1| = 6 - 9 = -3$$

is teljesül.

5-9. feladat: Oldjuk meg a $|2x-4|-|2x+2|=2$ egyenletet.

Megoldás: Az abszolút értékeken belüli kifejezések gyökei 2 és -1. Ezek most a számegyenest a $(-\infty,-1)$, a $[-1,2)$ és a $[2,\infty)$ intervallumokra bontják. Az ezekbe a halmazokba eső rész megoldáshalmazokat jelölje most is rendre H_1, H_2 és H_3, és így a megoldáshalmaz újra $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

Ha $x \in (-\infty,-1)$, akkor $|2x-4| = -(2x-4)$ és $|2x+2| = -(2x+2)$, azaz

$$-(2x-4)-(-(2x+2)) = 2,$$

$$6 = 2,$$

ami ellentmondás, így $H_1 = \emptyset$.

Ha $x \in [-1,2)$, akkor $|2x-4| = -(2x-4)$ és $|2x+2| = 2x+2$, azaz

$$-(2x-4)-(2x+2) = 2,$$

$$-4x+2 = 2,$$

vagyis $x = 0$. Így

$$H_2 = [-1,2) \cap \{0\} = \{0\}.$$

Végül, ha $x \in [2,\infty)$, akkor $|2x-4| = 2x-4$ és $|2x+2| = 2x+2$, azaz

$$(2x-4)-(2x+2) = 2,$$

$$-6 = 2,$$

ami szintén ellentmondás, így $H_3 = \emptyset$.

Ezek alapján

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \emptyset \cup \{0\} \cup \emptyset = \{0\}.$$

Ellenőrzés:

$$|-4|-|2|=2$$

valóban teljesül.

5-10. feladat: Oldjuk meg a $|3x-3|-|3x-6|=3$ egyenletet.

Megoldás: Az abszolút értékeken belüli kifejezések gyökei 1 és 2. Ezek most a számegyenest a $(-\infty,1)$, az $[1,2)$ és a $[2,\infty)$ intervallumokra bontják. Az ezekbe a halmazokba eső rész megoldáshalmazokat rendre H_1, H_2 és H_3 jelöli, a megoldáshalmaz most is $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

Ha $x \in (-\infty,1)$, akkor $|3x-3|=-(3x-3)$ és $|3x-6|=-(3x-6)$, azaz

$$-(3x-3)-(-(3x-6))=3,$$

$$-3=3,$$

ami ellentmondás, így $H_1=\emptyset$.

Ha $x \in [1,2)$, akkor $|3x-3|=3x-3$ és $|3x-6|=-(3x-6)$, azaz

$$3x-3-(-(3x-6))=3,$$

$$6x-9=3,$$

vagyis $x=2$. Így

$$H_2=[1,2)\cap\{2\}=\emptyset.$$

Végül, ha $x \in [2,\infty)$, akkor $|3x-3|=3x-3$ és $|3x-6|=3x-6$, azaz

$$3x-3-(3x-6)=3,$$

$$3 = 3.$$

Ez az egyenlet tehát azonosság, azaz minde $x \in \mathbb{R}$ szám kielégíti. Így

$$H_3 = [2,\infty) \cap \mathbb{R} = [2,\infty).$$

Ezek alapján

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \emptyset \cup \emptyset \cup [2,\infty) = [2,\infty).$$

Az egyenletnek tehát végtelen sok megoldása van.

Ellenőrzés: ha $x \in [2,\infty)$, akkor $|3x-3| = 3x-3$ és $|3x-6| = 3x-6$, azaz

$$3x - 3 - (3x - 6) = 3,$$

$$3 = 3,$$

vagyis valóban minden $x \geq 2$ szám kielégíti az egyenletet.

5.3. Ellenőrző kérdések

5.4. Abszolút értékes egyenlőtlenségek

Csak olyan abszolút értékes egyenlőtlenségekkel fogunk foglalkozni, amelyek ekvivalens átalakításokkal az

$$|A| < \alpha, \quad |A| \leq \alpha, \quad |A| > \alpha, \quad |A| \geq \alpha \tag{24}$$

alakok egyikére rendezhetők, ahol α egy nem negatív valós szám, A pedig a független változó elsőfokú vagy másodfokú polinomja, illetve olyan tört, amelyben a számláló és a nevező is legfeljebb elsőfokú polinom.

Mivel

$$|A| < \alpha \text{ pontosan akkor teljesül, ha } A < \alpha \text{ és } A > -\alpha, \tag{25}$$

egy ilyen abszolút értékes egyenlőtlenség megoldáshalmazát két, abszolút értéket nem tartalmazó egyenlőtlenség megoldáshalmazának metszeteként kaphatjuk meg. Ezt a két egyenlőtlenséget gyakran a

$$-\alpha < A < \alpha \tag{26}$$

kettős egyenlőtlenséggel írjuk fel.

Az $|A| \leq \alpha$ esetben hasonló a helyzet, csak ilyenkor az $A \leq \alpha$ és az $A \geq -\alpha$ egyenlőtlenségek megoldáshalmazának metszetét kell meghatározni. Ezt a két egyenlőtlenséget gyakran a

$$-\alpha \leq A \leq \alpha \tag{27}$$

kettős egyenlőtlenséggel írjuk fel.

A közönséges egyenlőtlenségek ekvivalens átalakításai kettős egyenlőtlenségekre is alkalmazhatók, csak most a megfelelő műveletet mind a három "oldalon" el kell végezni. Ez általában kényelmesebb, mint külön kezelni a két egyenlőtlenséget.

Mivel

$$|A| > \alpha \text{ pontosan akkor teljesül, ha } A > \alpha \text{ vagy } A < -\alpha, \tag{28}$$

egy ilyen abszolút értékes egyenlőtlenség megoldáshalmazát két, abszolút értéket nem tartalmazó egyenlőtlenség megoldáshalmazának uniójaként kaphatjuk meg.

Az $|A| \geq \alpha$ esetben hasonló a helyzet, csak ilyenkor az $A \geq \alpha$ és az $A \leq -\alpha$ egyenlőtlenségek megoldáshalmazának unióját kell meghatározni.

5-11. feladat: Oldjuk meg a $|3 - x| < 1$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Meg kell oldanunk a

$$-1 < 3 - x < 1$$

kettős egyenlőtlenséget. Mindhárom oldalból kivonva 3-at

$$-4 < -x < -2.$$

Végigosztva -1-el

$$4 > x > 2,$$

vagyis a megoldáshalmaz a $(2,4)$ intervallum.

5-12. feladat: Oldjuk meg a $|2x-1| \leq 3$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Most a

$$-3 \leq 2x - 1 \leq 3$$

kettős egyenlőtlenséggel van dolgunk. Mindhárom oldalhoz hozzáadva 1-et

$$-2 \leq 2x \leq 4.$$

Végigosztva 2-vel

$$-1 \leq x \leq 2,$$

tehát a megoldáshalmaz a $[-1,2]$ intervallum.

5-13. feladat: Oldjuk meg a $|6-3x| \geq 3$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: A $6-3x \geq 3$ feltétel akkor teljesül, ha $x \leq 1$, tehát a H_1 rész megoldáshalmaz $(-\infty,1]$.
A $6-3x \leq -3$ feltétel akkor teljesül, ha $x \geq 3$, tehát a H_2 rész megoldáshalmaz $[3,\infty)$.
Ezeket felhasználva a megoldáshalmaz

$$H_1 \cup H_2 = (-\infty,1] \cup [3,\infty).$$

5-14. feladat: Oldjuk meg az $|x^2 - 2x| \leq 3$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: A megoldandó kettős egyenlőtlenség

$$-3 \leq x^2 - 2x \leq 3.$$

A bal oldali $-3 \leq x^2 - 2x$ egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $0 \leq x^2 - 2x + 3$, azaz teljes négyzetté kiegészítés után $0 \leq (x-1)^2 + 2$, ami minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, a bal oldali egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát $H_1 = \mathbb{R}$.

A jobb oldali $x^2 - 2x \leq 3$ egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $x^2 - 2x - 3 \leq 0$. Az $x^2 - 2x - 3$ polinom két gyöke $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$, a polinom grafikonja egy felfelé nyíló parabola, ami a két gyöke között negatív. Így a jobb oldali egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $H_2 = [-1,3]$ intervallum.

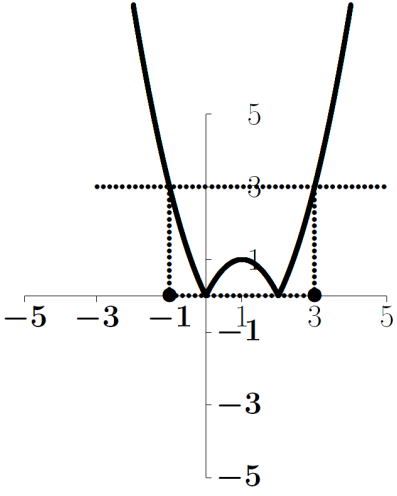
Ezeket felhasználva az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza a $H_1 \cap H_2 = \mathbb{R} \cap [-1,3] = [-1,3]$ intervallum, amint az a (6.) ábráról le is olvasható. (Egy másodfokú polinom abszolút értékének a grafikonját úgy kapjuk, hogy a parabola x tengely alatti részét tükrözzük az x tengelyre.)

5-15. feladat: Oldjuk meg az $|x^2 - 3x - 2| < 2$ egyenlőtlenséget.

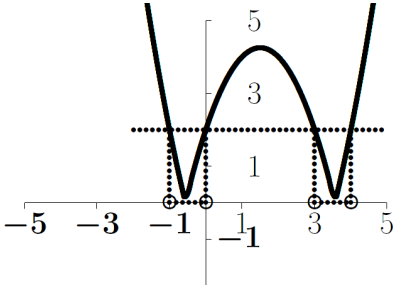
Megoldás: Most a $-2 < x^2 - 3x - 2 < 2$ kettős egyenlőtlenséget kell megoldani.

A bal oldali $-2 < x^2 - 3x - 2$ egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $0 < x^2 - 3x$. Mivel az $x^2 - 3x = 0$ másodfokú egyenlet gyökei 0 és 3, és $x^2 - 3x$ grafikonja egy felfelé nyíló parabola, ennek az egyenlőtlenségnek a megoldáshalmaza $H_1 = (-\infty,0) \cup (3,\infty)$.

A jobb oldali $x^2 - 3x - 2 < 2$ egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $x^2 - 3x - 4 < 0$. Mivel az $x^2 - 3x - 4 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei -1 és 4, és $x^2 - 3x - 4$ grafikonja szintén egy felfelé nyíló parabola, ennek az egyenlőtlenségnek a megoldáshalmaza $H_2 = (-1,4)$.



6. ábra. $|x^2 - 2x|$ grafikonja és az $|x^2 - 2x| \leq 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza.



7. ábra. $|x^2-3x-2|$ grafikonja és az $|x^2-3x-2|<2$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza.

Ezek után a megoldáshalmaz, felhasználva a metszetnek az unióra vonatkozó disztributivitását

$$H_1\cap H_2=\Big((-\infty,0)\cup(3,\infty)\Big)\cap(-1,4)=\Big((-\infty,0)\cap(-1,4)\Big)\cup\Big((3,\infty)\cap(-1,4)\Big)=(-1,0)\cup(3,4).$$

A (7.) ábráról ez a megoldás le is olvasható.

5-16. feladat: Oldjuk meg a $\left|\dfrac{3}{2x-1}\right|<10$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: Diszkussziót végzünk aszerint, hogy milyen előjelű a nevező.

Ha $2x-1<0$, azaz $x<\frac{1}{2}$, akkor az abszolút értéken belüli mennyiség negatív, abszolút értékét tehát úgy vehetjük, hogy megszorozzuk őt -1-el, azaz a megoldandó egyenlőtlenség:

$$-\frac{3}{2x-1}<10.$$

Ha átszorzunk a negatív nevezővel megfordul az egyenlőtlenség

$$-3 > 20x - 10, \quad \text{azaz} \quad x < \frac{7}{20}.$$

Ezt összevetve a feltételi $x < \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséggel látjuk, hogy mindkettő teljesül, ha $x < \frac{7}{20}$, tehát a $2x - 1 < 0$ feltétel melletti rész megoldáshalmaz $H_1 = \left(-\infty, \frac{7}{20}\right)$.

Ha $2x - 1 > 0$, azaz $x > \frac{1}{2}$, akkor az abszolút értéken belüli mennyiség pozitív, abszolút értékét tehát önmaga, azaz a megoldandó egyenlőtlenség:

$$\frac{3}{2x - 1} < 10.$$

Ha átszorzunk a pozitív nevezővel nem fordul meg az egyenlőtlenség

$$3 < 20x - 10, \quad \text{azaz} \quad x > \frac{13}{20}.$$

Ezt összevetve a feltételi $x > \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséggel latjuk, hogy mindkettő teljesül, ha $x > \frac{13}{20}$, tehát a $2x - 1 < 0$ feltétel melletti rész megoldáshalmaz $H_2 = \left(\frac{13}{20}, \infty\right)$.

Ezek után a megoldáshalmaz $H_1 \cup H_2 = \left(-\infty, \frac{7}{20}\right) \cup \left(\frac{13}{20}, \infty\right)$.

5-17. feladat:

Megoldás:

5.5. Ellenőrző kérdések

6. lecke

Hatványozás és gyökvonás

6. Hatványozás és gyökvonás

6.1. Bevezető

A felsőfokú tanulmányok során a matematika két fontos fejezete differenciálszámítás és az integrálszámítás. Ezen témakörök feladataiban gyakran szükséges hatványokat és gyököket tartalmazó kifejezéket más alakban írni, ezért a hatványozás és gyökvonás azonosságainak ismerete, és biztos alkalmazása nagyon fontos a későbbi tanulmányok során.

6-1. definíció: Ha $a \neq 0$ és n pozitív egész, akkor $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
Ha $a > 0$ és α tetszőleges valós szám, akkor $a^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^\alpha}$.
Ha $a > 0$, m egész szám és $n \geq 2$ természetes szám, akkor $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

<

6-1. tétel:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \tag{29}$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \tag{30}$$

$$\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c} \tag{31}$$

>

6-2. tétel:

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b^c \tag{32}$$

$$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c \tag{33}$$

6-3. tétel:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \tag{34}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{35}$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k \cdot n]{a} \tag{36}$$

6-1. feladat: Alakítsuk át az alábbi kifejezéseket úgy, hogy törtek helyett negatív kitevős hatványt írunk!

1. $$\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^2}$$

2. $$\frac{x-4}{(x+5)^4}$$

3. $$\frac{\frac{1}{a^5}+2}{a-3}$$

4. $$\frac{y-5}{2-\frac{7}{y^2}}$$

Megoldás:

1. A negatív kitevős hatványok definicióját használva a két reciprokot alakítjuk át.
$$\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^2} = a^{-3} \cdot b^{-2}$$

2. Most első lépésként célszerű a törtet szorzat alakban írni úgy, hogy a számlálót szorozzuk a nevező reciprokával.
$$\frac{x-4}{(x+5)^4} = (x-4) \cdot \frac{1}{(x+5)^4}$$
Ezután a reciprokot a definició alapján már könnyen átírjuk negatív kitevős hatvánnyá.
$$(x-4) \cdot \frac{1}{(x+5)^4} = (x-4) \cdot (x+5)^{-4}$$

3. Elsőként a számlálóban látható reciprokot alakítsuk át.

$$\frac{\frac{1}{a^5}+2}{a-3}=\frac{a^{-5}+2}{a-3}$$

Ezután alakítsuk szorzattá a törtet úgy, mint az előbb.

$$\frac{a^{-5}+2}{a-3}=(a^{-5}+2)\cdot\frac{1}{a-3}$$

Majd írjunk a még megmaradt reciprok helyett is negatív kitevős hatványt.

$$(a^{-5}+2)\frac{1}{a-3}=(a^{-5}+2)\cdot(a-3)^{-1}$$

4. Most a nevezőben álló törtet alakítsuk először szorzattá, majd a reciprok helyett írjunk negatív kitevős hatványt.

$$\frac{y-5}{2-\frac{7}{y^2}}=\frac{y-5}{2-7\cdot\frac{1}{y^2}}=\frac{y-5}{2-7\cdot y^{-2}}$$

Ezután alakítsuk szorzattá a törtet, és a reciprok helyett ismét írjunk negatív kitevős hatványt.

$$\frac{y-5}{2-7\cdot y^{-2}}=(y-5)\cdot\frac{1}{2-7\cdot y^{-2}}=(y-5)\cdot\left(2-7\cdot y^{-2}\right)^{-1}$$

6-2. feladat: Alakítsuk át az alábbi kifejezéseket úgy, hogy a negatív kitevős hatványok helyett törteket írunk!

1. $$5a^{-6}b^{-7}$$

2. $$2x\left(x^{-4}-1\right)^{-3}$$

3. $$\left(\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}+y^{-2}}\right)^{-3}$$

Megoldás:

1. A két negatív kitevős hatvány helyett írjunk egyszerűen reciprokot.

$$5a^{-6}b^{-7}=5\cdot\frac{1}{a^6}\cdot\frac{1}{b^7}$$

Ezután végezzük el a szorzást, s a kifejezést írjuk egyetlen törtként.

$$5\cdot\frac{1}{a^6}\cdot\frac{1}{b^7}=\frac{5}{a^6\cdot b^7}$$

2. Elsőként a zárójelen belül álló negatív kitevős hatványt alakítsuk reciprokká.

$$2x\left(x^{-4}-1\right)^{-3}=2x\left(\frac{1}{x^4}-1\right)^{-3}$$

Majd a zárójeles kifejezés negatív kitevős hatványát is alakítsuk reciprokká.

$$2x\left(\frac{1}{x^4}-1\right)^{-3}=2x\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{x^4}-1\right)^3}$$

Végül a reciprok előtti szorzót vigyük a számlálóba, így egyetlen törtként írhatjuk a kifejezést.

$$2x\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{x^4}-1\right)^3}=\frac{2x}{\left(\frac{1}{x^4}-1\right)^3}$$

3. Most először a -3-dik hatványra emelést bontsuk két részre azáltal, hogy a -3 helyett $-1\cdot 3$-at írunk.

$$\left(\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}+y^{-2}}\right)^{-3}=\left(\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}+y^{-2}}\right)^{-1\cdot 3}$$

Ez azért jó, mert így használva a hatványozás megfelelő azonosságát, először -1-dik hatványra emelhetjük a zárójeleben álló törtet, majd pedig a 3-dik hatványra.

$$\left(\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}+y^{-2}}\right)^{-1\cdot 3}=\left(\left(\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}+y^{-2}}\right)^{-1}\right)^3$$

Végezzük el a -1-dik hatványra emelést, azaz vegyük a zárójelben álló tört reciprokát.

$$\left(\left(\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}+y^{-2}}\right)^{-1}\right)^3=\left(\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)^3$$

Végül a törtben szereplő négy negatív kitevős hatvány helyett írjunk reciprokot.

$$\left(\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)^3=\left(\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\right)^3$$

Ezzel megoldottuk a feladatot, hiszen a kifejezésben már nem szerepelnek negatív kitevős hatványok. Szeretnénk azonban megjegyezni, hogy ez a kifejezés még sokféle más alakban is írható. Hozzunk például közös nevezőre a számlálóban és a nevezőben.

$$\left(\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}\right)^3=\left(\frac{\frac{y^2+x^2}{x^2\cdot y^2}}{\frac{y-x}{x\cdot y}}\right)^3$$

Majd bővítsük $x^2\cdot y^2$-tel a törtet, és egyszerűsítsünk a számlálón és a nevezőn belül. Így sikerül eltüntetnünk az emeletes törtet, azaz nem szerepel a törtön belül tört.

$$\left(\frac{\frac{y^2+x^2}{x^2\cdot y^2}}{\frac{y-x}{x\cdot y}}\right)^3=\left(\frac{\frac{y^2+x^2}{x^2\cdot y^2}\cdot x^2\cdot y^2}{\frac{y-x}{x\cdot y}\cdot x^2\cdot y^2}\right)^3=\left(\frac{y^2+x^2}{(y-x)xy}\right)^3=\left(\frac{y^2+x^2}{xy^2-x^2y}\right)^3$$

6-3. feladat: Emeljük négyzetre kétféle módon az $\left(a^{-2}-\frac{1}{b}\right)$ kifejezést. Egyszer törtekkel végezzük a műveleteket, egyszer pedig negatív kitevős hatványokkal!

Megoldás: Először számoljunk törtekkel. A kifejezésben szereplő negatív kitevős hatványt írjuk át törtté.

$$\left(a^{-2}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b}\right)$$

Ezután emeljük négyzetre a kéttagú kifejezést.

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{a^2}\right)^2-2\frac{1}{a^2}\frac{1}{b}+\left(\frac{1}{b}\right)^2$$

Végezzük el a további műveleteket.

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 - 2\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b} + \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{a^4} - \frac{2}{a^2b} + \frac{1}{b^2}$$

Most pedig hajtsuk végre a műveleteket negatív kitevős hatványokkal. Kezdjük a kifejezésben szereplő tört negatív kitevős hatvánnyá alakításával.

$$\left(a^{-2} - \frac{1}{b}\right) = \left(a^{-2} - b^{-1}\right)$$

Következzen a négyzetre emelés.

$$\left(a^{-2} - b^{-1}\right)^2 = \left(a^{-2}\right)^2 - 2a^{-2}b^{-1} + \left(b^{-1}\right)^2$$

Hajtsuk végre a még hátralévő műveleteket.

$$\left(a^{-2}\right)^2 - 2a^{-2}b^{-1} + \left(b^{-1}\right)^2 = a^{-4} - 2a^{-2}b^{-1} + b^{-2}$$

A két eredmény természetesen megegyezik.

6-4. feladat: Emeljünk ki az alábbi kifejezésekben a gyök alól, amit csak lehet!

1. $$\sqrt{27a^9}$$
2. $$\sqrt{3x^2 - 12xy + 12y^2}$$
3. $$\sqrt[4]{3x^{11}}$$
4. $$\sqrt[3]{\frac{x^7}{16}}$$

Megoldás:

1. Alakítsunk szorzattá úgy a gyökjel alatt, hogy a szorzat egyik tényezője teljes négyzet legyen.

$$\sqrt{27a^7} = \sqrt{(9a^6) \cdot 3a} = \sqrt{(3a^3)^2 \cdot 3a}$$

Használjuk fel a gyökvonásnak azt az azonosságát, hogy szorzatból tényezőnként vonhatunk gyököt.

$$\sqrt{(3a^3)^2 \cdot 3a} = \sqrt{(3a^3)^2} \cdot \sqrt{3a}$$

Az első tényezőben végezzük el a műveletet, hiszen teljes négyetből könnyű gyököt vonni.

$$\sqrt{(3a^3)^2} \cdot \sqrt{3a} = 3a^3 \cdot \sqrt{3a}$$

2. Most is alakítsunk ki szorzatot a gyökjel alatt úgy, hogy az egyik tényező teljes négyzet legyen.

$$\sqrt{3x^2 - 12xy + 12y^2} = \sqrt{3\left(x^2 - 4xy + 4y^2\right)} = \sqrt{3\left(x - 2y\right)^2}$$

Vonjunk ismét tényezőnként gyököt.

$$\sqrt{3\,(x-2y)^2} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{(x-2y)^2} = \sqrt{3}\,|x-2y|$$

Szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy nem az $x-2y$ kifejezést kapjuk meg a gyokvonás után, mivel nem tudjuk, milyen előjelű. Ha egy ismeretlen előjelű kifejezést először negyzetre emelünk, majd a mégyzetből gyököt vonunk, akkor a kifejezés abszolút értékét kapjuk. Röviden ezt úgy írhatjuk: $\sqrt{a^2} = |a|$. Hasonlót mondhatunk minden páros kitevőjű hatvány és gyök esetén is. Például $\sqrt[6]{a^6} = |a|$. Ha viszont páratlan kitevőjű hatványról és gyökről van szó, akkor a hatványozás és gyökvonás után visszakapjuk az eredeti kifejezést. Például $\sqrt[5]{a^5} = a$.
Az előző feladatban azért nem volt szükség az abszolút értékre, mert ott a gyök csak akkor értelmezett, ha a nem negatív értéket vesz fel, s ilyen módon a gyökjel elé kiemelt $3a^3$ kifejezés sem vehet fel negatív értéket.

3. Most úgy alakítsunk ki szorzatot a gyökjel alatt, hogy annak egyik tényezője egy kifejezés 4-dik hatványa legyen.

$$\sqrt[4]{3x^{11}} = \sqrt[4]{3x^3\cdot x^8} = \sqrt[4]{3x^3\cdot (x^2)^4}$$

Vonjunk tényezőnként gyököt, s a 4-dik hatványból végezzük el a gyökvonást.

$$\sqrt[4]{3x^3\cdot (x^2)^4} = \sqrt[4]{3x^3}\cdot\sqrt[4]{(x^2)^4} = x^2\cdot\sqrt[4]{3x^3}$$

A kiemelt kifejezést nem kell abszolút értékbe tennünk, hiszen nem vehet fel negatív értéket. Általánosságban azt mondhatjuk, hogy gyök alól kiemelve, a gyök alatt a kiemelt kifejezés annyiadik hatványával kell osztanunk, ahányadik gyököt vonunk. Jelen esetben x^2-et emeltünk ki a gyökjel alól, s így a gyökjel alatt $\left(x^2\right)^4 = x^8$-nal osztottunk.

4. Alakítsunk most is szorzattá a a gyökjel alatt. A szorzat egyik tényezője legyen egy kifejezés 3-dik hatványa.

$$\sqrt[3]{\frac{x^7}{16}} = \sqrt[3]{\frac{x^6}{8}\cdot\frac{x}{2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3\cdot\frac{x}{2}}$$

Most is vonjunk tényezőnként gyököt. Az első tényezőben végezzük is el a gyökvonást.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{2}} = \frac{x^2}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$$

6-5. feladat: Az alábbi kifejezésekben vigyünk mindent a gyök alá!

1. $$5\sqrt{a}$$
2. $$\frac{\sqrt{x}}{2x}$$
3. $$y\sqrt[3]{y}$$
4. $$(x+y)\sqrt[5]{\frac{3}{(x+y)^2}}$$

Megoldás:

1. Akkor tudjuk elvégezni a szorzást, ha a gyökjel előtt álló 5-öt úgy írjuk fel, mint valaminek a négyzetgyöke. Ehhez az 5-öt négyzetre emeljük, majd gyököt vonunk belőle.

   $$5\sqrt{a} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{a}$$

   Ezután a két négyztegyök szozatát a szorzat négyzetgyökeként írhatjuk.

   $$\sqrt{25} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{25a}$$

2. Járjunk el úgy, mint az előbb, csak most a nevezőben álló $2x$-et emeljük négyzetre, majd vonunk belőle gyököt.

$$\frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(2x)^2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x^2}}$$

A két gyökös kifejezés hányadosa helyett írhatjuk a kifejezések hányadosának gyökét.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4x^2}}$$

Használjuk ki, hogy egyszerűsíteni tudunk.

$$\sqrt{\frac{x}{4x^2}} = \sqrt{\frac{1}{4x}}$$

3. Most a köbgyök előtt álló y-t kell úgy felírnunk, hogy valaminek a köbgyöke legyen. Ehhez y-t 3-dik hatványra emeljük, majd 3-dik gyököt vonunk.

$$y\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y}$$

A két gyök szorzatát egyetlen gyökkel írhatjuk.

$$\sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y^3 \cdot y} = \sqrt[3]{y^4}$$

Általánosságban azt mondhatjuk, hogy gyökjel alá bevitelnél a bevitt kifejezésnek annyiadik hatványával szorzunk a gyök alatt, ahányadik gyököt vonunk.

4. Most a gyök előtti $x + y$-t 5-dik hatványra kell emelnünk, majd 5-dik gyököt kell vonnunk.

$$(x+y)\sqrt[5]{\frac{3}{(x+y)^2}} = \sqrt[5]{(x+y)^5} \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{(x+y)^2}}$$

A két gyök szorzatát írjuk egyetlen gyökkel, majd egyszerűsítsünk.

$$\sqrt[5]{(x+y)^5}\cdot\sqrt[5]{\frac{3}{(x+y)^2}}=\sqrt[5]{(x+y)^5\cdot\frac{3}{(x+y)^2}}=\sqrt[5]{\frac{3(x+y)^5}{(x+y)^2}}=\sqrt[5]{3(x+y)^3}$$

6-6. feladat: Végezzük el a műveleteket az alábbi kifejezésekben!

1.
$$\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}$$

2.
$$\left(3\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$$

Megoldás:

1. A két gyök szorzatát írjuk egyetlen gyökkel.

$$\sqrt{5+\sqrt{21}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{\left(5+\sqrt{21}\right)\cdot\left(5-\sqrt{21}\right)}$$

A gyök alatti szorzaton látható, hogy $(a+b)(a-b)$ típusú, aminek eredménye a^2-b^2. Ezt felhasználva végezzük el a gyök alatt a szorzást.

$$\sqrt{\left(5+\sqrt{21}\right)\cdot\left(5-\sqrt{21}\right)}=\sqrt{5^2-\left(\sqrt{21}\right)^2}$$

Végezzük el a további műveleteket.

$$\sqrt{5^2-\left(\sqrt{21}\right)^2}=\sqrt{25-21}=\sqrt{4}=2$$

2. Most is azt látjuk, hogy $a+b$ típusú kifejezést szorzunk $a-b$ típusú kifejezéssel. Ezt felhasználva kapjuk:

$$\left(3\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\left(3\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2$$

Végezzük el a négyzetre emeléseket.

$$\left(3\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=9x-y$$

Amint látható, ha négyzetgyökös kifejezések szerepelnek $(a+b)(a-b)$ típusú szorzatban, akkor a szorzás elvégzésé után eltűnnek a gyökök. Ezt használjuk fel a következő feladatban törtek nevezőjének gyöktelenítésére.

6-7. feladat: Gyöktelenítsük az alábbi törtek nevezőjét! Ahol tudunk, egyszerűsítsünk a gyöketelnítés után!

1. $$\frac{3}{\sqrt{7}-2}$$

2. $$\frac{12}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

3. $$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

Megoldás:

1. A nevezőben egy különbséget látunk, melynek egyik tagja gyököt tartalmaz, ezért célszerű bővítenünk a nevezőben álló számok összegével.

$$\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\frac{3}{\sqrt{7}-2}\cdot\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$$

A nevezőben végezzük el a szorzást, majd a további műveleteket.

$$\frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7})^2-2^2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3} = \sqrt{7}+2$$

A gyöktelenítés eredményeként most még a tört is eltűnt.

2. A nevezőben most két gyök összege áll, így a a különbségükkel kell bővítenünk.

$$\frac{12}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{12(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

Ezután végezzük el a műveleteket.

$$\frac{12(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{12(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{12(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{12(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = 6(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

3. Mivel a nevzőben gyökök különbsége van, ezért az összegükkel bővítünk.

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})}$$

Végezzük el a műveleteket.

$$\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{7})^2+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{7+2\sqrt{35}+5}{7-5} = \frac{12+2\sqrt{35}}{2} = 6+\sqrt{35}$$

6-8. feladat: Alkítsuk át az alábbi kifejezéseket úgy, hogy a gyökök helyett törtkitevős hatványokat írunk!

1. $$\sqrt[5]{x^2}$$

2. $$\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$$

3. $$\sqrt[3]{2+\sqrt[6]{x^5}}$$

Megoldás:

1. Egyszerűen használjuk a törtkitevős hatványok definícióját. A hatványkitevő kerül a törtkitevő számlálójába, a gyökkitevő pedig a nevezőjébe.

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

2. Most először a reciprokot alakítsuk át negatív kitevős hatvánnyá.

$$\sqrt[4]{\frac{1}{x^3}} = \sqrt[4]{x^{-3}}$$

Ezután pedig járjunk el úgy, mint az előbb.

$$\sqrt[4]{x^{-3}} = x^{-\frac{3}{4}}$$

3. Elsőként a 6-dik gyökös kifejezést alakítsuk át hatvánnyá.

$$\sqrt[3]{2+\sqrt[6]{x^5}} = \sqrt[3]{2+x^{\frac{5}{6}}}$$

Majd utána alakítsuk át a 3-dik gyököt is.

$$\sqrt[3]{2+x^{\frac{5}{6}}} = \sqrt[3]{(2+x^{\frac{5}{6}})^1} = (2+x^{\frac{5}{6}})^{\frac{1}{3}}$$

6-9. feladat: A következő kifejezésekben a törtkitevős hatványokat írjuk át gyökökre!

1. $$a^{\frac{4}{7}}$$

2. $$a^{-\frac{5}{8}}$$

3. $$\left(x^{\frac{3}{5}}-1\right)^{\frac{2}{3}}$$

Megoldás:

1. Használjuk a törtkitevős hatványok definícióját. A törtkitevő számlálójából kapjuk a hatványkitevőt, nevezőjéből pedig a gyökkitevőt.
$$a^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}$$

2. Most célszerű a kitevőben levő negatív előjelet a tört számlálójába vinni, s utána felhasználni a törtkitevős hatványok definícióját.
$$a^{-\frac{5}{8}} = a^{\frac{-5}{8}} = \sqrt[8]{x^{-5}}$$
Ezt írhatjuk még más formában is, ha a negatív kitvős hatvány helyett reciprokot írunk.
$$\sqrt[8]{x^{-5}} = \sqrt[8]{\frac{1}{x^5}}$$

3. Először alakítsuk át a zárójelen belüli hatványt.

$$\left(x^{\frac{3}{5}}-1\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[5]{x^3}-1\right)^{\frac{2}{3}}$$

Majd alakítsuk át a zárójeles kifejezés hatványát is.

$$\left(\sqrt[5]{x^3}-1\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt[5]{x^3}-1\right)^2}$$

6-10. feladat: Alakítsuk át a kivetkező kifejezéseket a gyökvonás azonosságait felhasználva úgy, hogy csak egyetlen gyökjel szerepeljen bennük! Alakítsuk át úgy is a kifejezésket, hogy a gyökök helyett hatványokat írunk! Végezzük el a hatványokkal a műveleteket, amíg csak egyetlen hatvány marad!

1. $$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^5}}$$

2. $$\sqrt[5]{x\cdot\sqrt{x}}$$

3. $$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a}$$

4. $$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[7]{x}}$$

Megoldás:

1. Először egyetlen gyökké alakítunk. Alkalmazzuk a gyökvonások egymásutánjára vonatkozó azonosságot, mely szerint két egymást követő gyökvonás egyetlen gyökvonással is írható, s a gyökkitevők szorzódnak.

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[4\cdot 3]{a^5} = \sqrt[12]{a^5}$$

Ezután hajtsuk végre a másik átalakítást, s írjunk törtkitevős hatványokat a gyökök helyett.

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[4]{a^{\frac{5}{3}}} = \left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Alkalmazzuk az ismételt hatványozásra vonatkozó azonosságot, mely szerint egyetlen hatványt írhatunk, melyben a kitevő a korábbi kitevők szorzata lesz.

$$\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}} = a^{\frac{5}{12}}$$

Jól látható, hogy az egyetlen hatvány formájában felírt kifejezés megegyezik az egyetlen gyökkel felírt alakkal.

2. Most azért nem tudunk rögtön az előzőek szerint eljárni, mert a két gyökvonás nem közvetlenül követi egymást. A $\sqrt{x}$-et előbb még szorozzuk x-szel, majd csak utána következik az újabb gyökvonás. Ezen úgy segíthetünk, ha az x szorzót bevisszük a négyzetgyök alá.

$$\sqrt[5]{x\cdot\sqrt{x}} = \sqrt[5]{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x}} = \sqrt[5]{\sqrt{x^2\cdot x}} = \sqrt[5]{\sqrt{x^3}}$$

Ezután már úgy járhatunk el, mint az előbb, azaz egyetlen gyököt írhatunk a gyökkitevők szorzatával. Ne zavarjon meg bennünket az, hogy a négyzetgyök esetén a gyökkitevőbe nincs kiírva a 2.

$$\sqrt[5]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[5\cdot 2]{x^3} = \sqrt[10]{x^3}$$

Ezután nézzük a hatvánnyá alakítást.

$$\sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}} = \sqrt[5]{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Először a zárójelen belül végezzük el a műveletet. Azonos alapú hatványok szorzása esetén egyetlen hatvány írható, s a kitevők összeadódnak.

$$\left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(x^{\frac{2}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Most alkalmazhatjuk a hatványozás egymásutánjára vonatkozó azonosságot.

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}} = x^{\frac{3}{10}}$$

Az egyetlen hatványként írt kifejezés most is nyilvánvalóan megegyezik az egyetlen gyökkel felírt kifejezéssel.

3. Most két gyökös kifejezés szorzatát kell alakítanunk, Akkor végezhetjük el a szorzást, ha mindkét helyen ugyanannyiadik gyökvonás szerepel. Keressük meg a két gyökkitevő legkisebb közös többszörösét. Ez most 15. Írjuk át a 3-dik és 5-dik gyököt 15-dik gyökre.

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^5}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[15]{a^5} \cdot \sqrt[15]{a^3}$$

Majd a két gyök szorzatát írjuk egyetlen gyökkel.

$$\sqrt[15]{a^5} \cdot \sqrt[15]{a^3} = \sqrt[15]{a^5 \cdot a^3} = \sqrt[15]{a^8}$$

Ezután nézzük a hatvánnyá alakítást.

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}}$$

Alkalmazzuk az azanos alapú hatványok szorzására vonatkozó azonosságot, mely szerint a kitevők összeadódnak.

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$$

A kitevőben hozzunk közös nevezőre, majd végezzük el az összeadást.

$$a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = a^{\frac{5}{15}+\frac{3}{15}} = a^{\frac{8}{15}}$$

Ezt összehasonlítva ezt az egyetlen gyökkel felírt alakkal, most is nyilvánvaló az egyezés.

4. Most két gyökös kifejezés hányadosa szerepel. Az előzőhöz hasonlóan azt kell elérnünk, hogy a gyökkitevők megegyezzenek. A két gyökkitevő legkisebb közös többszöröse most 28. Írjuk át a 4-dik és 7-dik gyököt 28-dik gyökre.

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[7]{x}} = \frac{\sqrt[4]{\sqrt[7]{x^7}}}{\sqrt[7]{\sqrt[4]{x^4}}} = \frac{\sqrt[28]{x^7}}{\sqrt[28]{x^4}}$$

Most a két gyök hányadosát írjuk egyetlen gyökkel, s egyszerűsítsünk a gyök alatt.

$$\frac{\sqrt[28]{x^7}}{\sqrt[28]{x^4}} = \sqrt[28]{\frac{x^7}{x^4}} = \sqrt[28]{x^3}$$

Következzen ezután a hatvánnyokkal való felírás.

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[7]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{7}}}$$

Alkalmazzuk az azonos alapú hatványok osztására vonatkozó azonosságot, mely szerint a kitevők kivonódnak.

$$\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{7}}} = x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{7}}$$

A kitevőben hozzunk közös nevezőre és végezzük el a kivonást.

$$x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{7}} = x^{\frac{7}{28}-\frac{4}{28}} = x^{\frac{3}{28}}$$

Ha ezt a kifejezést összehasonlítjuk az egyetlen gyökkel felírt alakkal, akkor az egyezőség nyilvánvaló.

6.2. Ellenőrző kérdések

Kvíz

1. Mit kapunk ha a $\dfrac{\frac{3}{x}-7}{(x+5)^2}$ kifejezésben a törtek helyett negatív kitevős hatványt írunk?

☐ $\left(3x-7^{-1}\right)(x+5)^{-2}$ ☐ $\left(3x^{-1}-7\right)(x+5)^{-2}$ ☐ $\left(3x-7^{-1}\right)\left(x^{-2}+5^{-2}\right)$ ☐ $\left(3x^{-1}-7\right)\left(x^{-2}+5^{-2}\right)$

2. Mit kapunk ha a $5x^{-3}\left(x^{-2}+8\right)$ kifejezésben a negatív kitevős hatványok helyett törteket írunk?

☐ $\dfrac{5\left(\frac{1}{x^2}+8\right)}{x^3}$ ☐ $\dfrac{\frac{1}{x^2}+8}{5x^3}$ ☐ $\dfrac{\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+8}$ ☐ $\dfrac{\frac{1}{5x^3}}{\frac{1}{x^2}+8}$

3. Ha a $\sqrt{12\left(a^2+2ab+b^2\right)}$ kifejezésben kiemelünk a gyökjel elé mindent, amit csak lehet, akkor mit kapunk??

☐ $|4|\,(a+b)^2\sqrt{3}$ ☐ $4\left|(a+b)^2\right|\sqrt{3}$ ☐ $2\,|a+b|\,\sqrt{3}$ ☐ $|2|\,(a+b)\sqrt{3}$

4. Mit kapunk, ha a $\dfrac{2}{x+y}\sqrt[4]{(x+y)^3}$ kifejezésben minden beviszünk a gyök alá?

☐ $\sqrt[4]{\dfrac{16}{x+y}}$ ☐ $\sqrt[4]{\dfrac{2}{x+y}}$ ☐ $\sqrt[4]{16(x+y)}$ ☐ $\sqrt[4]{2(x+y)}$

5. Gyöktelenítjük a $\dfrac{20}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ tört nevezőjét. Mit kapunk?

☐ $10\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$ ☐ $10\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$ ☐ $5\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$ ☐ $5\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$

6. Az $\sqrt[5]{\left(13-\sqrt[3]{x^4}\right)}$ kifejezéstben a gyökök helyett törtkitevős hatványokat írunk. Milyen alakban kapjuk meg ekkor a kifejezést?

☐ $\left(13-x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{2}}$ ☐ $\left(13-x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}$ ☐ $\left(13-x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{5}}$ ☐ $\left(13-x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{2}{5}}$

7. Az $\left(x^{\frac{7}{5}}+6\right)^{\frac{3}{4}}$ kifejezésben a törtkitevős hatványok helyett gyököket írunk. Mi lesz ekkor a kifejezés alakja? ?

☐ $\sqrt[3]{\left(\sqrt[5]{x^7}+6\right)^4}$ ☐ $\sqrt[4]{\left(\sqrt[5]{x^7}+6\right)^3}$ ☐ $\sqrt[3]{\left(\sqrt[7]{x^5}+6\right)^4}$ ☐ $\sqrt[4]{\left(\sqrt[7]{x^5}+6\right)^3}$

8. Mit kapunk, ha a $\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[4]{x}}$ kifejezést egyetlen gyökjellel írjuk fel?

☐ $\sqrt[7]{x^4}$ ☐ $\sqrt[7]{x^5}$ ☐ $\sqrt[12]{x^4}$ ☐ $\sqrt[12]{x^5}$

Clear

7. lecke

Exponenciális és logarimus

7. Exponenciális és logarimus

7.1. Bevezető

A felsőfokú tanulmányok során a matematikában gyakran szerepel az exponenciális és a logaritmus, ezért nagyon fontos, hogy felelevenítsük az ehhez kapcsolódó középiskolai ismereteket.

7-1. definíció: A b szám a alapú logaritmusa az a kitevő, amelyre a-t emelve b-t kapunk. $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$ Ugyanez egyenlet formájaban a következő módon írható: $a^{\log_a b} = b$.

7-1. tétel: A logaritmus azonosságai

$$\log_a a^b = b \tag{37}$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (x,y > 0, a > 0, a \neq 1) \tag{38}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (x,y > 0, a > 0, a \neq 1) \tag{39}$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1, k \in I\!R) \tag{40}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (x > 0, a,b > 0, a,b \neq 1) \tag{41}$$

7-1. feladat: Oldjuk meg a következő exponenciális egyenleteket a valós számok halmazán!

1.
$$2^x = 64$$

2.
$$3^x = \frac{1}{27}$$

3.
$$\left(\frac{1}{25}\right)^x = 5$$

4.
$$7^x = 1$$

5.
$$3^x = 11$$

6.
$$6^x = -2$$

Megoldás:

1. Az exponenciális egyenletek megoldása során általában az exponenciális függvények azon tulajdonságát használjuk ki, hogy ha az alap nem 1, akkor a függvény szigorúan monoton. Ez azt jelenti, hogy két azonos alapú (nem 1 alapú) hatvány csak akkor lehet egyenlő egymással, ha a kitevők megegyeznek. Ezért általában arra törekszünk, hogy az egyenlet mindkét oldalán ugyanannak a számnak egy-egy hatványa álljon, mert ez a kitevők egyenlőségét jelenti. Írjuk fel ezért most a jobb oldalt is 2 hatványaként.

$$2^x = 64 = 2^6$$

A fentiek szerint ebből az következik, hogy $x = 6$.

2. Járjunk el úgy, mint az előbb, azaz írjuk fel a jobb oldalon álló $\frac{1}{27}$-et 3 hatványaként.

$$3^x = \frac{1}{27} = 3^{-3}$$

Ebből pedig a 3 alapú exponánciális szigoró monotonitása miatt $x = -3$ következik.

3. Most a jobb oldalon álló 5-öt az $\frac{1}{25}$ hatványaként kell felírnunk.

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x = 5 = \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Az $\frac{1}{25}$ alapú exponenciális szigorú monotonitása miatt ebből $x = -\frac{1}{2}$ következik.

4. Hasonlóan az eddigiekhez, most a jobb oldalt 7 hatványaként kell felírnunk. Mivel a 0 kivételével minden valós szám 0-dik hatványa 1-gyel egyenlő, ezért a jobb oldalra 7^0 kerül.

$$7^x = 1 = 7^0$$

A 7 alapú exponenciális szigorú monotonitása miatt ebből azt kapjuk, hogy $x = 0$.

5. Az eddigi feladatokban aránylag könnyű helyzetben voltunk, mert a jobb oldalon álló számokban nem volt nehéz felismerni, hogy a bal oldali alap melyik hatványával egyenlők. Most azonban a 11-et kell felírnunk 3 hatványaként, de a 11 nem egy nevezetes hatványa a 3-nak. Ekkor segítségül hívhatjuk a logaritmus definícióját.
Eszerint $a^{\log_a b} = b$.
Töltse be a logaritmus definíciójában az a szerepét a 3, a b szerepét pedig a 11.
Így kapjuk, hogy $3^{\log_3 11} = 11$. Ezt írjuk be az egyenlet jobb oldalára.

$$3^x = 11 = 3^{\log_3 11}$$

Ebből pedig a szigorú monotonitás miatt $x = \log_3 11$ következik.

6. Ha az előzőek szerint okoskodunk, akkor most a jobb oldalon álló-2-t kellene felírnunk a 6 hatványaként. Ez azonban nem lehetséges, hiszen 6 bármely hatványa pozitív, s így nem lehet egyenlő -2-vel. Az exponenciális függvények csak pozitív értékeket vesznek fel, így egy pozitív számnak semelyik hatványa sem egyenlő negatív számmal.
   Ebből következik, hogy a $6^x = -2$ egyenletnek nincs megoldása.

7-2. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

1. $$3^{x+1} - 3^{x-2} = 234$$
2. $$5^{x-2} = 3^{2-x}$$
3. $$\frac{3^{x^2}}{27} = 9^x$$
4. $$\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x}$$

Megoldás:

1. Az eddigi egyenletek megoldása viszonylag egyszerű volt, hiszen egyik oldalukon egy pozitív szám valamilyen hatványa állt, a másikon pedig egy szám, amit felírtunk a másik oldali alap hatványaként. A most következő egyenletek már kicsit érdekesebbek, ezekben már nem csak annyi a feladat, hogy egy számot felírjunk egy másik szám hatványaként. Rögtön az első egyenletben azt látjuk, hogy a bal oldalon

nem egyetlen tag áll, hanem két tag különbsége. Az lenne jó, ha a különbség helyett csak egyetlen tag lenne. Használjuk a hatványozás azonosságait, és érjük el, hogy mindkét tagban azonos kitevőjű hatvány szerepeljen, például 3^x. Alakítsuk szorzattá ezért a különbég tagjait.

$$3^1 \cdot 3^x - 3^{-2} \cdot 3^x = 234$$

$$3 \cdot 3^x - \frac{1}{9} \cdot 3^x = 234$$

Emeljük ki a 3^x-t a bal oldalon.

$$3^x \left(3 - \frac{1}{9}\right) = 234$$

Végezzük el a zárójelen belül a kivonást.

$$\frac{26}{9} \cdot 3^x = 234$$

Osszuk mindkét oldalt $\frac{26}{9}$-del.

$$3^x = 234 \cdot \frac{9}{26} = 81$$

Ezzel sikerült elérnünk, hogy olyanná váljon az egyenlet, mint amilyenekkel korábban foglalkoztunk. Írjuk fel a 81-et 3 hatványaként.

$$3^x = 81 = 3^4$$

A szigorú monotonitás miatt $x = 4$ következik ebből.

2. Ebben az egyenletben nem az okoz problémát, hogy valamelyik oldalon több tag van, hanem az, a két oldalon különböző alapú hatvány áll. A kitevőket megvizsgálva azt látjuk, hogy azok egymás -1-szeresei. Ezt kihasználva tudjuk alakítani az egyenletet. Először dolgozzunk csak a jobb oldalon.

$$5^{x-2} = 3^{2-x} = 3^{-1(x-2)} = \left(3^{x-2}\right)^{-1} = \frac{1}{3^{x-2}}$$

Szororzzuk mindkét oldalt 3^{x-2}-nal.

$$5^{x-2} \cdot 3^{x-2} = 1$$

Az azonos kitevőjű hatványok szorzatára vonatkozó azonosságot használva írjunk egyetlen hatványt a bal oldalon.

$$5^{x-2} \cdot 3^{x-2} = (5 \cdot 3)^{x-2} = 15^{x-2} = 1$$

Ezzel elértük azt, hogy egyenletünk olyanná vált, mint amilyenekkel korábban foglalkoztunk. Írjuk fel most az 1-et is a jobb oldalon 15 hatványaként.

$$15^{x-2} = 15^0$$

A szigorú monotonitás miatt ebből $x - 2 = 0$ következik, amiből $x = 2$.

3. Az elsődleges célunk most is az, hogy elérjük, ugyanazon szám egy-egy hatványa álljon az egyenlet mindkét oldalán. Ehhez a bal oldali törtet bontsuk inkább szorzattá, majd mindent írjunk fel 3 hatványaként.

$$\frac{1}{27} \cdot 3^{x^2} = 9^x$$

$$3^{-3} \cdot 3^{x^2} = \left(3^2\right)^x$$

A hatványozás azonosságait használva mindkét oldalt írjuk 3 egyetlen hatványaként.

$$3^{x^2-3} = 3^{2x}$$

A szigorú monotonitás miatt ebből a kitevők egyenlőség következik, azaz:

$$x^2 - 3 = 2x$$

Már csak egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Rendezzük 0-ra az egyenletet, majd helyettesítsünk a megoldóképletbe.

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

Az egyenletnek tehát két megoldása van, s ezek a -1 és a 3.

4. Most is azt kellene elérnünk, hogy ugyanazon szám egy-egy hatványa álljon az egyenlet két oldalán. Használjuk ki, hogy $\frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. Így az egyenlet az alábbiak szerint alakítható.

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2\left(x^2-12\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x}$$

Ez a szigorú monotonitás miatt a kitevők egyenlőségét jelenti.

$$-2\left(x^2 - 12\right) = 9 - x$$

A kapott másodfokú egyenletet rendezzük 0-ra, majd helyettesítsünk a megoldóképletbe.

$$-2x^2 + 24 = 9 - x$$

$$0 = 2x^2 - x - 15$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} 3 \\ -2.5 \end{cases}$$

Az egyenletnek tehát két megoldása van, melyek 3 és -2.5.

7-3. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$25^{x-1} + 5^{x+1} = 150$$

Megoldás: Az eddigi egyenletekben arra törekedtünk, hogy az egyenlet mindkét oldalán csak egyetlen tag szerepeljen, melyeket ugyanazon szám hatványaiként írunk fel. Ennél az egyenletnél ezt nem tudjuk elérni. Felismerhető viszont, hogy a szereplő két hatvány esetében az egyik alapja, amásik alap négyzete, hiszen $25 = 5^2$. Ezt felhasználva az egyenletet úgy alakítjuk, hogy egy új ismeretlen bevezetésével másodfokú egyenletet kapjunk. Elsőként a hatványozás azonosságait használva érjük el, hogy a kitevőben mindegyik helyen csak x álljon.

$$25^{-1} \cdot 25^x + 5^1 \cdot 5^x = 150$$

$$\frac{1}{25} \cdot 25^x + 5 \cdot 5^x = 150$$

Célszerű 25-tel szorozni mindkét oldalt.

$$25^x + 125 \cdot 5^x = 3750$$

Ezután írjuk fel a 25-öt 5^2 alakban.

$$\left(5^2\right)^x + 125 \cdot 5^x = 3750$$

Az első tagban cseréljük fel a két hatványozás sorrendjét.

$$(5^x)^2 + 125 \cdot 5^x = 3750$$

Vezessük be az $a = 5^x$ új ismeretlent, így másodfokú egyenletet kapunk.

$$a^2 + 125a = 3750$$

Mivel $5^x > 0$ minden valós x esetén, ezért kikötést teszünk az új ismeretlenre, mely szerint $a > 0$.

Rendezzük az egyeneletet 0-ra és használjuk a megoldóképletet.

$$a^2 + 125a - 3750 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{125 - \pm\sqrt{125^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-375)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 25 \\ -150 \end{cases}$$

A két megoldás közül a -150 nem tesz eleget a kikötésnek, így a továbbiakban csak a másik megoldással kell foglalkoznunk. Az alábbit kaptuk:

$$5^x = 25$$

A 25-öt írjuk fel 5 hatványként.

$$5^x = 5^2$$

A szigorú monotonitás miatt pedig a kitevők megegyeznek, azaz $x = 2$.

(Ha a másodfokú egyenlet mindkét megoldása pozitív lett volna, akkor természetesen mindkettőt egyenlővé tennénk 5^x-nel, és az így kapott két egyenlet mindegyike az eredti egyenlet egy megoldását adná.)

7-4. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.
$$2^x > \frac{1}{8}$$

2.
$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 81$$

Megoldás:

1. Az exponenciális egyenlőtlenségek megoldását hasonlóan kezdjük, mint az egyenletek megoldását. Megpróbáljuk elérni, hogy mindkét oldalon ugyanannak a számnak egy-egy hatványa álljon. Jelen esetben írjuk fel az $\frac{1}{8}$-ot 2 hatványaként.

$$2^x > 2^{-3}$$

Mivel a 2 alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ezért 2 két hatványa közül az a nagyobb, amelyiknek nagyobb a kitevője. A fenti egyenlőtlenség tehát csak akkor teljesül, ha ugyailyen egyenlőtlenség áll fenn a kitevőkre is, azaz: $x > -3$.
(Ha egy $a^b > a^c$ alakú exponenciális egyenlőtlenségben az exponenciális alapja 1-nél nagyobb, akkor az a^x függvény szigorú monoton növekedése miatt lényegében elhagyhatók az alapok, s a kitevők közt ugyanilyen egyenlőtlenség írható fel, tehát $b > c$.)

2. Az előző egyenlőtlenség mintájára most a 81-et célszerű felírni $\frac{1}{3}$ hatványaként.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$$

Mivel az $\frac{1}{3}$ alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökken, ezért az $\frac{1}{3}$ két hatványa közül az a nagyobb, amelyiknek a kitevője kisebb. Ennek következtében a fenti egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha a kitevők között fordított irányú egyenlőtlenség áll fenn, azaz $x \geq -4$.
(Ha egy $a^b > a^c$ alakú exponenciális egyenlőtlenségben az exponenciális alapja 1-nél kisebb, akkor az a^x függvény szigorú monoton csökkenése miatt a kitevők közt fordított irányú egyenlőtlenség áll fenn, tehát $b < c$.)

7-5. feladat: Határozzuk meg a következő logaritmusértékeket!

1. $$\lg 100$$
2. $$\log_2 \frac{1}{32}$$
3. $$\ln \frac{1}{e^4}$$
4. $$\log_a \sqrt[3]{a}, \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Megoldás:

1. A $\log_a a^b = b$ azonosság alapján azt mondhatjuk, akkor könnyű meghatározni egy szám logaritmusát, ha a számot felírjuk a logaritmus alapjának hatványaként. Ekkor a szám logaritmusa az a kitevő, amire a logaritmus alapját emeltük. Ezért most a 100-at fel kell írnunk a 10 hatványaként. Bár most a jelölésben nincs kiírva a logaritmus alapja, de ne feledkezzünk el arról, hogy a $\lg$ jelölés ugyanaz, mintha $\log_{10}$-et írnánk.
$$\lg 100 = \lg 10^2 = (\log_{10} 10^2) = 2$$
2. Az előzőhöz hasonlóan járunk el, az $\frac{1}{32}$-et felírjuk 2 hatványaként, s a logaritmus értéke a kitevővel lesz egyenlő.
$$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5$$
3. Most természtes alapú logaritmus szerepel, ami azt jelenti, a logaritmus alapja az e szám. Az $\ln$ jelölés

ugyanaz, mintha $\log_e$ szerepelne. Ezért most az $\frac{1}{e^4}$-t kell felírnunk e hatványaként, s a kitevő lesz egyenlő a logaritmus értékével.

$$\ln \frac{1}{e^4} = \ln e^{-4} = -4$$

4. Az előzőekhez hasonlóan az a feladatunk, hogy a $\sqrt[3]{a}$-t az a szám hatványaként írjuk fel, s a keresett logaritmusérték a kitevő lesz.

$$\log_a \sqrt[3]{a} = \log_a a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

7-6. feladat: Határozzuk meg az alábbi hatványok értékeit!

1. $$3^{\log_9 7}$$
2. $$10^{\lg 3 + \lg 9}$$
3. $$7^{1-\log_7 5}$$
4. $$e^{3+2\ln 5}$$

Megoldás:

1. Ha egy hatvány kitevője egy logaritmus, akkor a hatvány értékét abban az esetben tudjuk könnyen meghatározni, ha a hatvány alapja megegyezik a logaritmus alapjával, hiszen a logaritmus definíciója

szerint $a^{\log_a b} = b$. Most tehát azt kell elérnünk, hogy a hatvány alapjában 3 helyett 9 szerepeljen. Írjuk fel ezért a 3-at 9 hatványaként.

$$3^{\log_9 7} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 7}$$

Most alkalmazzuk a hatványozás azonosságai közül azt, hogy ismételt hatványozás estén a hatványozás sorrendje felcserélhető.

$$\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 7} = \left(9^{\log_9 7}\right)^{\frac{1}{2}}$$

A zárójelen belül most használjuk a logaritmus definícióját, ezzel megkapjuk a keresett hatvány értékét.

$$\left(9^{\log_9 7}\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

2. Most teljesül az, hogy a hatvány alapja megegyezik a kitevőben szereplő logaritmusok értékével, de a logaritmus definícióját csak akkor fogjuk alkalmazni, ha nem két logaritmus összege fog ott állni, hanem csak egyetlen logaritmus. Ezért először használjuk fel a logaritmusnak azt az azonosságát, mely szerint azonos alapú logaritmusok összege egyenlő a szorzat logaritmusával.

$$10^{\lg 3 + \lg 9} = 10^{\lg(3\cdot 9)} = 10^{\lg 27}$$

Így már hivatkozhatunk a logaritmus definíciójára.

$$10^{\lg 27} = \left(10^{\log_{10} 27}\right) = 27$$

3. Bár a hatvány alapja, és a kitvőben a logaritmus alapja megegyezik, mégsem tudjuk most sem alkalmazni rögtön a logaritmus definícióját, mert a kitevőben nem csak egyetlen logaritmus áll. Akkor tudunk a különbség helyett egyetlen logaritmust írni, ha a különbség mindkét tagja azonos alapú logaritmus. Ezért első lépésként az 1-et kell felírnunk 7 alapú logaritmusként. A $\log_a a^b = b$ azonosságot használhatjuk fel, s eszerint $1 = \log_7 7^1$. Írjuk ezt be a hatvány kitevőjébe.

$$7^{1-\log_7 5} = 7^{\log_7 7 - \log_7 5}$$

Ezután alkalmazzuk a kitevőben az azonos alapú logaritmusok különbségére vonatkozó azonosságot, mely szerint hányados logaritmusát kapjuk.

$$7^{\log_7 7 - \log_7 5} = 7^{\log_7 \frac{7}{5}}$$

Ezek után tudunk hivatkozni a logaritmus definiciójára.

$$7^{\log_7 \frac{7}{5}} = \frac{7}{5}$$

4. A hatvány alapja és a kitevőben álló logaritmus alapja megegyezik, de sajnos nem csak egyetlen logaritmus van a kitevőben. Az eddigiek után nyilvánvaló, hogy a kitevőben álló 3-at fel kellene írnunk természetes alapú logaritmusként. Ismét a $\log_a a^b = b$ azonosságot használjuk, s ebből az következik, hogy $3 = \ln e^3$, hiszen $\ln e^3 = \log_e e^3$. Írjuk ezt be a hatvány litevőjében a 3 helyére.

$$e^{3+2\ln 5} = e^{\ln e^3 + 2\ln 5}$$

Mivel az egyik logaritmus előtt egy szorzó áll, ezért nem alkalmazható a logaritmusok összegére vonatkozó azonosság. Előbb használjuk azt, mely szerint ha logaritmust szorzunk, akkor a szorzó bevihető a logaritmusba hatványkitevőnek.

$$e^{\ln e^3 + 2\ln 5} = e^{\ln e^3 + \ln 5^2} = e^{\ln e^3 + \ln 25}$$

Most használjuk a logaritmusok összegére vonatkozó azonosságot.

$$e^{\ln e^3 + \ln 5^2} = e^{\ln(e^3 \cdot 25)} = e^{\ln(25e^3)}$$

Végül hivatkozhatunk a logaritmus definíciójára.

$$e^{\ln(25e^3)} = \left(e^{\log_e(25e^3)}\right) = 25e^3$$

7-7. feladat: Oldjuk meg a következő logaritmikus egyenleteket!

1.
$$\log_5 x = 3$$

2.
$$\lg x = -2$$

3.
$$\ln x = -\frac{1}{3}$$

4.
$$\log_x 25 = -2$$

Megoldás:

1. A logaritmikus egyenletek esetében először mindig a szükséges kikötéseket tesszük meg. Egyrészt logaritmusa csak pozitív kifejezéseknek létezik, vagy másképp mondva logaritmus mögötti kifejezés nagyobb mint zérus, másrészt pedig logaritmus alapja is csak pozitív lehet, de nem lehet egyenlő 1-gyel. Jelen esetben az $x > 0$ feltételt jelenti ez.
   Az egyszerű logaritmikus egyenletek megoldása hasonlít az egyszerű exponenciális egyenletek megoldására. Mindkét oldalt ugyanazon alapú logaritmusként írjuk fel, s ekkor a logaritmusfüggvények szigorú monotonitása miatt a logaritmus elhagyható az egyenletből. Jelen esetben a jobb oldalon álló 3-at kellene felírnunk 5 alapú logaritmusként. A $\log_a a^b = b$ azonosság felhasználásával $3 = \log_5 5^3 = \log_5 125$. Írjuk ezt be az egyenletbe.
   $$\log_5 x = \log_5 125$$
   Ebből az 5 alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt $x = 125$ következik, ami megfelel a kikötésnek.

2. Most is az $x > 0$ kikötéssel kezdünk.
   Járjunk el hasonlóan, mint az előbb, a jobb oldalon álló -2-t írjuk fel 10 alapú logaritmusként.

$$\lg x = \lg 10^{-2} = \lg \frac{1}{10^2} = \lg 0.01$$

   Ebből pedig a szigorú monotonitás miatt $x = 0.01$ következik, ami eleget tesz a kikötésnek.

3. Kikötésünk most is $x > 0$.
   Az előzőekhez hasonlóan a $-\frac{1}{3}$-ot kell természetes alapú logaritmusként felírnunk.

$$\ln x = -\frac{1}{3} = \ln e^{\frac{1}{3}} = \ln \sqrt[3]{e}$$

   A természetes alapú logaritmus szigorú monotonitása miatt ebből $x = \sqrt[3]{e}$ következik. Ez természetesen megfelel a kikötésnek.

4. Mivel x most a logaritmus alapjában szerepel, ezért az $x > 0$ és $x \neq 1$ kikötést kell tennünk.
   Az előzőeknek megfelelően most a jobb oldali -2-t írjuk fel x alapú logaritmusként.

$$\log_x 25 = -2 = \log_x x^{-2} = \log_x \frac{1}{x^2}$$

   A logaritmus szigorú monotonitása miatt ebből az alábbi egyenlet következik.

$$25 = \frac{1}{x^2}$$

   Rendezzük át az egyenletet.

$$x^2 = \frac{1}{25}$$

   Enek az egyenletnek két megoldása van: $x = \pm\frac{1}{5}$.
   De mivel x-nek eleget kell tennie az $x > 0$ és $x \neq 1$ feltételeknek, ezért az eredeti egyenletnek csak $x = \frac{1}{5}$ a megoldása.

7-8. feladat: Oldjuk meg a következő logaritmikus egyenleteket!

1.
$$\lg x = \lg 35 + \lg 8 - \lg 5$$

2.
$$\ln x = \frac{1}{3}\ln 27 + 2\ln 5$$

3.
$$\lg(x-3) + \lg(x+4) = \lg(5x+9)$$

Megoldás:

1. Most is az $x > 0$ kikötéssel kezdünk.
   Az előzőekben használtuk, hogy ha az egyenlet mindkét oldalán egyetlen, ugyanazon alapú logaritmus szerepel, akkor a logaritmus elhagyható az egyenletből. Ha valamelyik oldalon nem csupán egyetlen logaritmus van, akkor elsőként azt egyetlen logaritmussá kell alakítanunk. Jelen esetben a jobb oldalon használjuk fel azt, hogy logaritmusok összege szorzat logaritmusaként, logaritmusok különbsége pedig hányados logaritmusaként írható.
   $$\lg x = \lg 35 + \lg 8 - \lg 5 = \lg(35\cdot 8) - \lg 5 = \lg\frac{35\cdot 8}{5} = \lg 42$$
   Ezután a 10 alapú logaritmus szigorú monotonitása miatt elhagyható mindkét oldalról a logaritmus, és az $x = 42$ eredményt kapjuk, ami megfelel a kikötésnek.
2. Természetesen most is először kikötjük, hogy $x > 0$.

Azután a jobb oldalt egyetlen logaritmussá alakítjuk. A logaritmusok előtt szorzókat vigyük be a logaritmus mögé, így hatványkitevő lesz belőlük. Ahol lehetséges, ott írjuk egyszerűbben a hatványt.

$$\ln x = \ln\left(27^{\frac{1}{3}}\right) + \ln 5^2 = \ln \sqrt[3]{27} + \ln 25 = \ln 3 + \ln 25$$

Ezután alkalmazzuk a logaritmusok összegére vonatkozó azonosságot.

$$\ln x = \ln(3 \cdot 25) = \ln 75$$

A szigorú monotonitás miatt elhagyhatjuk a logaritmusokat.
Kapjuk: $x = 75$, s ez nyilván eleget tesz a kikötésnek.

3. Most nem csak egyetlen kikötéssel kell élnünk, hiszen több kifejezés szerepel logaritmus mögött.
Mindegyikre ki kell kötnünk, hogy nagyobb mint zérus.
Első kikötés: $x - 3 > 0$, amiből $x > 3$ következik.
Második kikötés: $x + 4 > 0$, ami $x > -4$-gyel ekvivalens.
Harmadik kikötés: $5x + 9 > 0$, amiből $x > -\frac{9}{5}$ következik.
Mi azon halmazon keressük a megoldást, melynek elemei mindhárom kikötésnek eleget tesznek, s ez jelen esetben az $x > 3$ feltételt jelenti.
Ezután most az egyenlet bal oldalán alkalmazzuk a logaritmusok összegére vonatkozó azonosságot.

$$\lg\left((x-3)\cdot(x+4)\right) = \lg(5x+9)$$

$$\lg\left(x^2 + x - 12\right) = \lg(5x+9)$$

A szigorú monotonitás miatt elhagyhatjuk a logaritmusokat.

$$x^2 + x - 12 = 5x + 9$$

A kapott másodfokú egyenletet rendezzük 0-ra.

$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

Helyettesítsünk a megoldóképletbe.

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 7 \\ -3 \end{cases}$$

A másodfokú egyenlet két megoldása közül csak a 7 felel meg a kikötésnek, így az eredeti egyenletnek csak ez a megoldása.

7-9. feladat: Oldjuk meg a $2\log_3 x - 9\log_x 3 = 17$ egyenletet!

Megoldás: Tegyük meg a szükséges kikötéseket. Mivel x logaritmus mögött és logaritmus alapjában is szerepel, ezért az $x > 0$ és $x \neq 1$ feltételeknek kell teljesülni.

Mivel az egyenletben két különbözö alapú logaritmus szerepel, ezért az egyik logaritmus esetén át kell térnünk a másik logaritmus alapjára. Térjünk át most az x alapú logaritmusról 3 alapú logaritmusra. Ehhez használjuk a $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ azonosságot. Ebből azt kapjuk: $\log_x 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 x} = \dfrac{1}{\log_3 x}$. Írjuk ezt be az egyenletbe.

$$2\log_3 x - 9\frac{1}{\log_3 x} = 17$$

Célszerűnek tűnik bevezetni az $a = \log_3 x$ új ismeretlent. Így az egyenlet a következő lesz.

$$2a - 9\frac{1}{a} = 17$$

Mindkét oldalt szarozva a-val egy másodfokú egyenletet kapunk, amit rendezzünk 0-ra.

$$2a^2 - 9 = 17a$$

$$2a^2 - 17a - 9 = 0$$

Helyettesítsünk a megoldóképletbe.

$$a_{1,2} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} 9 \\ -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ezután két ágon folytatjuk a megoldást.

Az első esetben $\log_3 x = 9$.

Írjuk fel a jobb oldalt is 3 alapú logaritmusként.

$$\log_3 x = \log_3 3^9 = \log_3 19683$$

A szigorú monotonitás miatt a logaritmusok elhagyhatók, s kapjuk $x = 19683$, ami megfelel a kikötéseknek.

A második esetben $\log_3 x = -\dfrac{1}{2}$.

Ismét a jobb oldalt írjuk fel 3 alapú logaritmusként.

$$\log_3 x = \log_3 3^{-\frac{1}{2}} = \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$$

A szigorú monotonitás miatt elhagyva a logaritmusokat $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ következik, ami úgyszintén eleget tesz a kikötéseknek.

Az egyenletenek tehát két megoldása van, a 19683 és az $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

7-10. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

1.
$$\ln x \geq \frac{1}{3}$$

2.
$$\log_{\frac{1}{2}} x > -3$$

Megoldás:

1. A logaritmikus egyenletekhez hasonlóan az egyenlőtlenségek esetében is kikötéssel kezdjük a megoldást. Jelen esetben az $x > 0$ feltételnek kell teljesülni.
   Ezután úgy, mint az egyenletek esetében, azt szeretnénk elérni, hogy mindkét oldalon ugyanolyan alapú logaritmus álljon. Írjuk fel tehát most az $\frac{1}{3}$-ot természetes alapú logaritmusként.

   $$\ln x \geq \ln e^{\frac{1}{3}}$$

   A jobb oldalon a törtkitevős hatvány helyett célszerűbb gyököt írni.

   $$\ln x \geq \ln \sqrt[3]{e}$$

   Mivel a természetes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, ezért két e alapú logaritmus értéke közül az a nagyobb, ahol nagyobb számnak vesszük a logaritmusát. A fenti egyenlőtlenség tehát csak akkor teljesülhet, ha $x \geq \sqrt[3]{e}$. Azon számok, amelyek ennek az egyenlőtlenségnek eleget tesznek, azok mind megfelelnek a kezdeti kikötésnek is, így a feladat megoldása: $x \geq \sqrt[3]{e}$.
   (Ha egy $\log_a b > \log_a c$ alakú logaritmikus egyenlőtlenségben a logaritmus alapja 1-nél nagyobb, akkor a $\log_a x$ függvény szigorú monoton növekedése miatt lényegében elhagyhatók a logaritmusok, s a mögöttük álló számok közt ugyanilyen egyenlőtlenség írható fel, tehát $b > c$.)

2. Most is kikötéssel kezdjük a megoldást, az $x > 0$ feltételnek teljesülni kell.
Az előző egyenlőtlenség mintájára most a -3-at célszerű felírni $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusként.

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

Végezzük el a jobb oldalán a hatványozást.

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 8$$

Mivel az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ezért két $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus közül az a nagyobb, amelyik mögött kisebb szám áll. Ennek következtében a fenti egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha a logaritmusok mögötti számok között fordított irányú egyenlőtlenség áll fenn, azaz $x < 8$. Mivel ezen egyenlőtlenségnek eleget tevő számok nem mind felelnek meg a megoldás elején tett kikötésünknek, így a kikötésben szereplő feltételt csatolni kell ehhez. Ennek következtében az egyenlőtlenség megoldása: $0 < x < 8$ lesz.
(Ha egy $\log_a b > \log_a c$ alakú logaritmikus egyenlőtlenségben a logaritmus alapja 1-nél kisebb, akkor a $\log_a x$ függvény szigorú monoton csökkenése miatt a logaritmusok mögött álló számok közt fordított irányú egyenlőtlenség áll fenn, tehát $b < c$.)

7.2. Ellenőrző kérdések

Kvíz

1. Mi az $\left(\frac{1}{81}\right)^x = 3$ exponenciális egyenlet megoldása?

☐ 4 ☐ -4 ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $-\frac{1}{4}$

2. Mely számok megoldásai a $\frac{2^{x^2}}{16} = \frac{1}{8^x}$ egyenletnek?

☐ $-1, -4$ ☐ $-1, 4$ ☐ $1, -4$ ☐ $1, 4$

3. Mely számok megoldásai a $5^x + \frac{125}{5^x} = 30$ egyenletnek?

☐ $-1, -2$ ☐ $-1, 2$ ☐ $1, -2$ ☐ $1, 2$

4. Mi a megoldása az $\left(\frac{1}{7}\right)^x \geq 49$ egyenlőtlenségnek?

☐ $x \leq -2$ ☐ $x \geq -2$ ☐ $x \leq -\frac{1}{2}$ ☐ $x \geq -\frac{1}{2}$

5. Mivel egyenlő $\log_5 \frac{1}{125}$?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 3 ☐ -3

6. Mivel egyenlő a $2^{4-\log_2 5}$ hatvány?

☐ $\frac{4}{5}$ ☐ $\frac{5}{4}$ ☐ $\frac{16}{5}$ ☐ $\frac{5}{16}$

7. Mi a $\log_3 x = -\frac{1}{}$ egyenlet megoldása?

☐ $\sqrt{3}$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ 9 ☐ $\frac{1}{9}$

8. Mi a $2 \lg x = \lg 16 + \lg 4$ egyenlet megoldása?

☐ 2 ☐ 4 ☐ 8 ☐ 16

9. Melyik számok megoldásai a $\log_4 x + \log_x 4 = 2.5$ egyenletnek?

☐ $2, 8$ ☐ $2, 16$ ☐ $4, 8$ ☐ $4, 16$

10. Mi a megoldása az $\lg x \geq -2$ egyenlőtlenségnek?

☐ $0 < x \leq \frac{1}{100}$ ☐ $x \geq \frac{1}{100}$ ☐ $0 < x \leq 100$ ☐ $x \geq 100$

Clear

8. lecke

Műveletek függvényekkel

8. Műveletek függvényekkel

8.1. Bevezető

A függvény a matematika egyik legfontosabb fogalma.

8-1. definíció: Ha az A halmaz minden eleméhez egyértelműen hozzárendeljük a B halmaz egy elemét, akkor egy függvényt definiáltunk. Azt, hogy az f függvény az A halmaz elemeihez rendel B-beli elemeket így jelöljük:

$$f : A \longrightarrow B$$

Az f függvény esetén $x \in A$-hoz rendelt B-beli elemet $f(x)$ jelöli. Az A halmazt az f függvény értelmezési tartományának hívjuk és D_f-el is jelöljük. Azon B-beli elemeket, amelyeket hozzárendeltük valamelyik A-beli elemhez, azaz az

$$\{y \in B | \text{ van olyan } x \in A, \text{ hogy } f(x) = y\}$$

halmazt az f függvény értékkészletének hívjuk, és R_f-el jelöljük.

Egy függvényt úgy definiálunk, hogy megadjuk az értelmezési tartományát és előírjuk a hozzárendelési utasítását. Az $f(x)$ formulában az x-et független változónak vagy argumentumnak hívjuk, az x helyett más betűt is használhatunk.

8-2. definíció: Két függvény egyenlő, ha azonosak az értelmezési tartományaik, és egyenlő a két hozzárendelési utasítás.

Ebben a tananyagban csak olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek esetén az értelmezési tartomány és az értékkészlet is a valós számok halmaza. Az ilyen függvényeket egyváltozós valós függvényenek hívjuk. Az egyváltozós valós függvények tehát valós számokhoz rendelnek valós számokat. A hozzárendelési utasítást szinte minden esetben egy képlettel adjuk meg, amelyik azt adja meg, hogy az értelmezési tartományba eső x számból hogyan kell kiszámolni az $f(x)$ számot.

Legyen f és g két egyváltozós valós függvény.

8-3. definíció: Az f és a g függvények összege az a $h = f + g$ függvény, amelyre $D_h = D_f \cap D_g$, és $x \in D_h$ esetén $h(x) = f(x) + g(x)$.
Az f és a g függvények különbsége az a $k = f - g$ függvény, amelyre $D_k = D_f \cap D_g$, és $x \in D_h$ esetén $k(x) = f(x) - g(x)$.

Az összeg és a különbség hozzárendelési utasításában semmi meglepő sincs, és az is természetes, hogy csak olyan x-re tudjuk kiszámolni az összeget és a különbséget, ahol mindkét tag értelmezve van, ez éppen az értelmezési tartományok metszete.

Hasonlóan egyszerű a helyzet a szorzás esetén is.

8-4. definíció: f és g szorzata az a $h = fg$ függvény, amelyre $D_h = D_f \cap D_g$, és $x \in D_h$ esetén $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Függvének hányadosa esetén még arra is figyelni kell, hogy a nevezőben nem állhat nulla. A $D_g \setminus \{x \in D_g |\ g(x) = 0\}$ halmaz a D_g-nek azokból az x elemeiből áll, amelyekre $g(x) \neq 0$.

8-5. definíció: f és g hányadosa az a $h = \dfrac{f}{g}$ függvény, amelyre $D_h = D_f \cap (D_g \setminus \{x \in D_g |\ g(x) = 0\})$, és $x \in D_h$ esetén $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ha f függvény, $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám, akkor az $f + \alpha$, αf, $\dfrac{\alpha}{f}$ képletekben α-ra úgy tekintünk, mint a D_f-en értelmezett $g(x) = \alpha$ konstans függvényre.

A függvények összeadása és szorzása kommutatív és asszociatív művelet, és a szorzás disztributív az összeadásra nézve. Ezeket foglalja össze a következő tétel.

8-1. tétel:

$$f+g=g+f, \qquad fg=gf. \tag{42}$$

$$(f+g)+h=f+(g+h), \qquad (fg)h=f(gh). \tag{43}$$

$$(f+g)h=fh+gh. \tag{44}$$

$$\frac{f}{h}+\frac{g}{k}=\frac{fk+gh}{hk}, \qquad \frac{f}{h}\cdot\frac{g}{k}=\frac{fg}{hk}. \tag{45}$$

Jegyezzük meg viszont, hogy általában $\frac{fh}{gh} \neq \frac{f}{g}$, mert az értelmezési tartományok különböznek.

Különösen fontos függvény művelet a kompozíció.

8-6. definíció: f és g kompozíciója az a $h = g \circ f$ függvény, amelynek értelmezési tartománya $D_h = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$, és $x \in D_h$ esetén $h(x) = g(f(x))$.

A $g \circ f$ kompozícióban az f a belső függvény, a g a külső függvény.

8-2. tétel:

$$f \circ g \neq g \circ f, \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \tag{46}$$

A kompozíció művelete tehát nem kommutatív, de asszociatív.

A kompozíció során kapott függvényt összetett függvénynek hívjuk. Majdnem minden függvény, amivel foglalkozni fogunk összetett függvény.

$$x \longrightarrow \boxed{f} \xrightarrow{f(x)} \boxed{g} \longrightarrow g(f(x))$$

8. ábra. Az f és a g függvények kompozíciója.

8-1. feladat: Tekintsük az $f(x) = x - 2$, $D_f = [-1,3]$ és a $g(x) = (x-1)^2$, $D_g = (0,\infty)$ függvényeket. Határozzuk meg az $f + g$ és az $f - g$ függvényeket.

Megoldás: Mivel $D_f \cap D_g = (0,3]$, $h = f + g$ esetén

$$h(x) = x - 2 + (x-1)^2 = x^2 - x - 1, \quad D_h = (0,3],$$

$k = f - g$ esetén

$$k(x) = x - 2 - (x-1)^2 = -x^2 + 3x - 3, \quad D_k = (0,3].$$

8-2. feladat: Tekintsük az $f(x) = \sin x$, $D_f = \mathbb{R}$ és a $g(x) = \ln x$, $D_g = (0,\infty)$ függvényeket. Határozzuk meg az fg függvényt.

Megoldás: Mivel $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap (0,\infty) = (0,\infty)$ a $h = fg$ függvény az a függvény, amelyre

$$h(x) = f(x)g(x) = \sin x \cdot \ln x, \quad D_h = (0,\infty).$$

8-3. feladat: Legyen $f(x) = 2x - 4$, $D_f = \mathbb{R}$, és határozzuk meg az $\dfrac{1}{f}$ függvényt.

Megoldás: Az értelmezési tartomány meghatározásakor azt kell figyelembe venni, hogy abban nem lehet olyan szám, amelyre a nevező nulla. Most $f(x) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 2$. A számlálóban lévő 1-et a D_f fölött értelmezett konstans 1 függvénynek tekintve a $h = \dfrac{1}{f}$ függvény értelmezési tartománya

$$D_h = D_f \cap (D_f \setminus \{x \in D_f |\ f(x) = 0\}) = D_f \setminus \{x \in D_f |\ f(x) = 0\}$$

hiszen a metszet második tagja részhalmaza az elsőnek. Tehát

$$D_h = D_f \setminus \{x \in D_f |\ f(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty,2) \cup (2,\infty).$$

A hozzárendelési utasítás pedig

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x-4}.$$

8-4. feladat: Tekintsük az $f(x) = x^2 - 1$, $D_f = \mathbb{R}$ és a $g(x) = 2 - \sqrt{x}$, $D_g = [0,\infty)$ függvényeket. Határozzuk meg az $\dfrac{f}{g}$ és a $\dfrac{g}{f}$ függvényeket.

Megoldás: Nézzük a $h = \dfrac{f}{g}$ tört függvényt. Először meghatározzuk a nevező gyökeit. $g(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = 4$. Ezt a számot kell elhagyni a D_g-ből és venni az így kapott halmaznak és D_f-nek a metszetét. Ez lesz D_h. Tehát

$$D_h = D_f \cap (D_g \setminus \{x \in D_g |\ g(x) = 0\}) = \mathbb{R} \cap ([0,\infty) \setminus \{4\}) = \mathbb{R} \cap ([0,4) \cup (4,\infty)) = [0,4) \cup (4,\infty).$$

A h függvény hozzárendelési utasítása nyilván

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-1}{2-\sqrt{x}}.$$

A $k = \dfrac{g}{f}$ tört függvény esetén az f függvény gyökeinek halmazára van szükségünk. Ez a $\{-1,1\}$ halmaz. Így $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\} = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$. Tehát

$$D_g \cap (D_f \setminus \{x \in D_f |\ f(x) = 0\}) = [0,\infty) \cap ((-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)) = [0,1) \cup (1,\infty).$$

A k függvény hozzárendelési utasítása is könnyű

$$k(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}.$$

8-5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ és a $g(x) = 2x - 1$, $D_g = \mathbb{R}$ függvények esetén a $g \circ f$ és a $f \circ g$ kompozíciókat.

Megoldás: Kompozíció esetén hasznos egy függvényre úgy gondolni, hogy az az argumentumát alakítja át, éppen a hozzárendelési utasítás mondja meg, hogy mit "csinál" az argumentumával. A fenti f függvény négyzetre emeli az argumentumát, bármi is az, a g függvény pedig az argumentuma kétszereséből kivon egyet.

Ezek után nézzük először a $h = g \circ f$ kompozíciót. Most az f a belső, g a külső függvény. Mivel a külső g függvény esetén $D_g = \mathbb{R}$, az $f(x) \in D_g$ minden $x \in D_f$-re, tehát $D_h = D_f = \mathbb{R}$. Meg kell még határozni a hozzárendelési utasítást. Legyen $x \in D_h$. Ekkor

$$h(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 - 1.$$

A $k = f \circ g$ kompozíció esetén g a belső, f a külső függvény, és mivel most a külső f függvényre $D_f = \mathbb{R}$, így $g(x) \in D_f$ minden $x \in D_g$-re, tehát $D_k = D_g = \mathbb{R}$. A hozzárendelési utasítás pedig tetszőleges $x \in D_k$-ra

$$k(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1.$$

Láthatjuk, hogy $f \circ g \neq g \circ f$.

8-6. feladat: Legyen $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $D_f = [0,\infty)$, és határozzuk meg az $f \circ f$ függvényt.

Megoldás: Ugyanúgy, mint például az összeadás esetén is lehet a két tag ugyanaz, kompozíció esetén is lehet a két tényező ugyanaz, ha a belső függvény értékkészlete részhalmaza a külső függvény értelmezési tartományának. Mivel tetszőleges nemnegatív x-re $\sqrt{x} + 1$ is nemnegatív, ez most teljesül. A $h = f \circ f$ kompozíció esetén tehát $D_h = [0,\infty)$. Az f függvény gyököt von az argumentumából és azt megnöveli eggyel, tehát $x \in D_h$ esetén

$$h(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x} + 1) = \sqrt{\sqrt{x} + 1} + 1.$$

8-7. feladat: Legyen $f(x) = \ln x$, $D_f = (0,\infty)$, $g(x) = \sqrt{x}$, $D_g = [0,\infty)$ és határozzuk meg a $g \circ f$ függvényt.

Megoldás: A külső függvény, a g, csak nemnegatív számokra van értelmezve, tehát a kompozíció értelmezési tartományába a belső függvény értelmezési tartományából, a D_f-ből, csak azok az x számok tartoznak bele, amelyekre $f(x) \geq 0$. Mivel a logaritmus függvény 1-nél nagyobb vagy egyenlő számokra vesz fel nullánál nagyobb vagy egyenlő értékeket a $h = g \circ f$ függvény értelmezési tartománya $D_h = [1,\infty)$. A hozzárendelési utasítás: minden $x \in D_h$-ra

$$h(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}.$$

8-8. feladat: Tekintsük az $f(x) = x^2 + x$, $D_f = \mathbb{R}$, a $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $D_g = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ és a $h(x) = \sin(2x)$, $D_h = \mathbb{R}$ függvényeket. Határozzuk meg a $k = h \circ g \circ f$ függvényt.

Megoldás: Csak a g függvény jelent korlátozást, a másik két függvény bármilyen argumentumra értelmes. Azok az x valós számok alkotják tehát a D_k-t, amelyekre $f(x) \neq 0$, mert nullával nem oszthatunk. Mivel $f(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = -1$ vagy $x = 0$. Ezt a két számot kell kizárni az f értelmezési tartományából.

Így $D_k = \mathbb{R} \setminus \{-1{,}0\} = (-\infty, -1) \cup (-1{,}0) \cup (0{,}\infty)$. A hozzárendelési utasítás pedig: minden $x \in D_k$-ra

$$k(x) = h(g(f(x))) = h(g(x^2 + x)) = h\left(\frac{1}{x^2 + x}\right) = \sin\left(\frac{2}{x^2 + x}\right).$$

A következő feladatokban eltekintünk a kompozíciókban szereplő függvények értelmezési tartományának vizsgálatától és csak a hozzárendelési utasításokra koncentrálunk. Ha a kompozícióban minden tényezőt a lehetséges legbővebb értelmezési tartományával szerepeltetünk, akkor a kompozíció értelmezési tartománya a kompozíció hozzárendelési utasításának lehetséges legbővebb értelmezési tartománya. A következő lecke foglalkozik azzal, hogy milyen módszerekkel lehet ezt a halmazt meghatározni.

8-9. feladat: Legyen $f(x) = x^2 + 2$ és $g(x) = \sqrt{x}$. Határozzuk meg a $h = g \circ f$ és a $k = f \circ g$ függvények hozzárendelési utasítását.

< **Megoldás:** >

$$h(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 2}.$$

De számolhattunk volna a következő módon is:

$$h(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 2},$$

a végeredmény persze ugyanaz.

A k függvény hozzárendelési utasítását is meghatározzuk mindkét úton:

$$k(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 2 = x + 2,$$

illetve

$$k(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 2 = (\sqrt{x})^2 + 2 = x + 2.$$

Az elején önellenőrzés és gyakorlás miatt érdemes mindkét úton meghatározni a kompozíció képletét.

8-10. feladat: Legyen $f(x) = x + \frac{1}{x}$ és $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Határozzuk meg a $h = g \circ f$ és a $k = f \circ g$ függvények hozzárendelési utasítását.

Megoldás:

$$h(x) = g(f(x)) = g\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x + \frac{1}{x} - 1}.$$

Ugyanezt így is írhattuk volna

$$h(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x) - 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x} - 1}.$$

$$k(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1} + x - 1$$

vagy a másik sorrendben

$$k(x) = f(g(x)) = g(x) + \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x-1} + x - 1.$$

8-11. feladat: Legyen $f(x) = x + \sqrt{x}$. Határozzuk meg a $g = f \circ f$ függvény hozzárendelési utasítását.

Megoldás: Mindkét úton számolva

$$g(x) = f(f(x)) = f(x + \sqrt{x}) = x + \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}},$$

$$g(x) = f(f(x)) = f(x) + \sqrt{f(x)} = x + \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}.$$

Sokszor van arra szükség, hogy egy összetett függvényt felbontsunk egyszerűbb függvények kompozíciójára. Fontos megjegyezni, hogy ezt mindig több módon is meg lehet tenni, tehát az ilyen feladatnak nem csak egy megoldása van.

8-12. feladat: Legyen $h(x) = \cos(2x-1)$. Adjunk meg olyan f és g függvényeket, hogy $h(x) = g(f(x))$ teljesüljön. (Azaz $h = g \circ f$ legyen.)

Megoldás: Egy lehetséges megoldás: $f(x) = 2x-1$ és $g(x) = \cos x$. Ekkor valóban

$$h(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = \cos(2x-1).$$

Egy másik megoldás: $f(x) = 2x$ és $g(x) = \cos(x-1)$. Ekkor is

$$h(x) = g(f(x)) = \cos(f(x)-1) = \cos(2x-1).$$

8-13. feladat: Álítsuk elő a $k(x) = \cos(2x-1)$ függvényt három függvény kompozíciójaként.

Megoldás: Legyen $f(x) = 2x$, $g(x) = x-1$, $h(x) = \cos x$. Ekkor valóban

$$k(x) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) = h(2x-1) = \cos(2x-1).$$

Vagy más sorrendben számolva

$$k(x) = h(g(f(x))) = \cos(g(f(x))) = \cos(g(2x)) = \cos(2x-1).$$

Van még négy további számolási sorrend, az olvasó végigpróbálhatja őket.

8-14. feladat: Keressünk olyan f lineáris függvényt, hogy a $g(x) = 4x+3$ függvény előálljon $g = f \circ f$ alakban.

Megoldás: Ha f lineáris függvény, akkor $f(x) = \alpha x + \beta$ alkalmas $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ valós számokkal. Ekkor $f(f(x)) = \alpha(\alpha x + \beta) + \beta = \alpha^2 x + \alpha\beta + \beta$. Olyan α,β számokat keresünk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$g(x) = 4x + 3 = \alpha^2 x + \alpha\beta + \beta = f(f(x))$$

legyen. Ez akkor teljesül, ha $\alpha^2 = 4$ és $\alpha\beta + \beta = 3$. Ezt a kétismeretlenes nemlineáris egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az első egyenletből $\alpha = 2$ vagy $\alpha = -2$.

Ha $\alpha = 2$, akkor a második egyenletből $2\beta + \beta = 3$, amiből $\beta = 1$.

Ha $\alpha = -2$, akkor a második egyenletből $-2\beta + \beta = 3$, amiből $\beta = -3$.

Tehát két megoldás is van: $f_1(x) = 2x + 1$ és $f_2(x) = -2x - 3$. Mindkettő megoldás, hiszen

$$4x + 3 = g(x) = f_1(f_1(x)) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3,$$

illetve

$$4x + 3 = g(x) = f_2(f_2(x)) = -2(-2x - 3) - 3 = 4x + 6 - 3 = 4x + 3.$$

8-15. feladat:

Megoldás:

8.2. Ellenőrző kérdések

9. lecke

Értelmezési tartomány

9. Értelmezési tartomány

9.1. Bevezető

Egy függvény definiálásához két adatra van szükség: elő kell írni, hogy mi az értelmezési tartomány, és meg kell adni a hozzárendelési utasítást.

Gyakran mégis csak a hozzárendelési utasítást adjuk meg. Ilyenkor azzal a megállapodással élünk, hogy az értelmezési tartomány a valós számoknak az a legbővebb részhalmaza, amelyre a hozzárendelési utasítás értelmezhető. Időnként szükség van ennek a halmaznak a meghatározására.

Ezt a halmazt gyakran egyenlőtlenség vagy egyenlőtlenség rendszer megoldáshalmazaként lehet megkapni. Máskor úgy, hogy elhagyjuk a valós számok közül azokat, amelyekre a hozzárendelési utasítás nem értelmezhető.

Sokszor megtehető, és célszerű is az értelmezési tartományt diszjunkt intervallumok uniójaként felírni.

Az értelmezési tartományok meghatározásához ismerni kell a legfontosabb elemi függvények értelmezési tartományát.

9-1. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-4}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Mivel egyedül a 0-val nem lehet osztani, a fenti tört minden olyan x-re értelmes, amelyre a nevező nem nulla. $2x - 4 = 0$ pontosan akkor, ha $x = 2$.

Így az értelmezési tartomány a

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty,2) \cup (2,\infty)$$

halmaz.

9-2. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{2x+6}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Gyököt vonni nem negatív számból lehet, tehát azokat az x-eket keressük, amelyekre

$$2x + 6 \geq 0.$$

Az értelmezési tartomány ennek az egyenlőtlenségnek a megoldáshalmaza.

Mivel $2x + 6 \geq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x \geq -3$, az értelmezési tartomány a

$$D_f = [-3,\infty)$$

halmaz.

9-3. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+12}}{2x-10}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Most két feltétel van. Egyrészt a számlálóban lévő gyökvonás miatt teljesülni kell a

$$3x + 12 \geq 0$$

egyenlőtlenségnek. Másrészt, mivel a nevezőben van, $2x - 10$ nem nem lehet nulla. Az értelmezési tartományt tehát úgy kapjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség megoldáshalmazából elhagyjuk a $2x - 10 = 0$ egyenlet megoldását.

$3x + 12 \geq 0$ pontosan akkor, ha $x \geq -4$, tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $[-4,\infty)$. A $2x - 10 = 0$ egyenlet megoldása $x = 5$. Ezek felhasználásával az értelmezési tartomány a

$$D_f = [-4,\infty) \setminus \{5\} = [-4,5) \cup (5,\infty)$$

halmaz.

9-4. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{8-4x} + \log_5(2x+8)$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Most is két feltétel van. Egyrészt teljesülni kell a

$$8 - 4x \geq 0$$

egyenlőtlenségnek. Másrészt a

$$2x + 8 > 0$$

egyenlőtlenségnek is, hiszen logaritmusát csak pozitív számnak vehetjük.

Ha az első egyenlőtlenség megoldáshalmazát H_1, a másodikét H_2 jelöli, akkor $D_f = H_1 \cap H_2$.

$8 - 4x \geq 0$ pontosan akkor, ha $x \leq 2$, tehát $H_1 = (-\infty,2]$. $2x + 8 > 0$ pontosan akkor, ha $x > -4$, tehát $H_2 = (-4,\infty)$. Ezeket felhasználva

$$D_f = H_1 \cap H_2 = (-\infty,2] \cap (-4,\infty) = (-4,2].$$

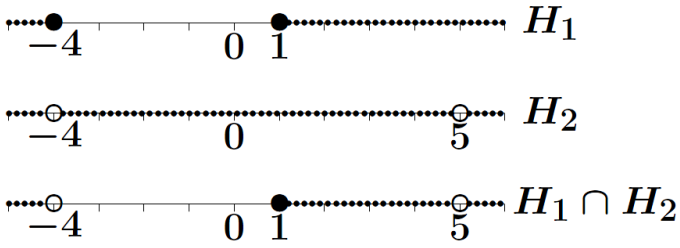
9-5. feladat: Határozzuk meg az $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x^2-x-20}$ függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Ismét csak két feltétel van.

$x^2 + 3x - 4 \geq 0$, az ezt kielégítő számok halmaza legyen H_1, és $x^2 - x - 20 \neq 0$, az ezt kielégítő számok halmaza H_2. Ekkor $D_f = H_1 \cap H_2$. (Így ugyanazt kapjuk mintha H_1-ből elhagynánk a nevező gyökeit.)

Az $x^2 + 3x - 4 = 0$ egyenlet gyökei -4 és 1, a parabola felfelé nyíló, tehát a másodfokú polinom a gyökeiben és a gyökein kívül nemnegatív, azaz $H_1 = (-\infty, -4] \cup [1,\infty)$.

A $x^2 - x - 20 = 0$ egyenlet gyökei -4 és 5, tehát $H_2 = \mathbb{R} \setminus \{-4,5\} = (-\infty, -4) \cup (-4,5) \cup (5,\infty)$.



9. ábra. A H_1, H_2 halmazok és a metszetük.

A H_1 és H_2 halmazok metszetét grafikusan határozzuk meg. Felveszünk egymás alatt három számegyenest úgy, hogy a három origó egy függőleges egyenesbe essen és mindegyiken ugyanakkora legyen az egység. A legfelsőn a H_1 halmazt, a középsőn a H_2-t, az alsón a metszetüket ábrázoljuk. Ez utóbbit úgy kapjuk, hogy ezen a számegyenesen megjelölünk minden pontot, amelyik a fölötte lévő mindkét számegyenesen meg van jelölve.

Ezt láthatjuk a (9.) ábrán.

Innen leolvashatjuk, hogy

$$D_f = H_1 \cap H_2 = (-\infty, -4) \cup [1,5) \cup (5,\infty).$$

9-6. feladat:

Megoldás:

9.2. Ellenőrző kérdések

10. lecke

Függvénytranszformációk

10. Függvénytranszformációk

10.1. Bevezető

11. lecke

Számtani és mértani sorozatok, pénzügyi alkalmazások

11. Számtani és mértani sorozatok, pénzügyi alkalmazások

11.1. Bevezető

Az egyik legfontosabb fogalom a matematikában a határérték, mellyel elsőként a sorozatok esetében találkozunk. Ezért is fontosak számunkra a sorozatok. A későbbi tanulmányok megkönnyítése érdekében, ebben a leckében felelevenítjük a középiskolában oktatott sorozatokra vonatkozó ismereteket, valamint a hozzájuk kapcsolódó pénzügyi alkalmazásokat, mint a kamatszámítás és a járadékszámítás.

11-1. definíció: Az $\{a_n\}$ sorozatot számtani sorozatnak nevezzük, ha létezik olyan d szám, amelyre teljesül, hogy $a_{n+1} = a_n + d$ minden $n \geq 1$ esetén. A d számot a sorozat differenciájának (különbségének) nevezzük.

A számtani sorozatok esetén igazak az alábbi összefüggések.

11-1. tétel:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \tag{47}$$

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \tag{48}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \tag{49}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d) \tag{50}$$

11-2. definíció: Az $\{a_n\}$ sorozatot mértani sorozatnak nevezzük, ha $a_1 \neq 0$, és létezik olyan $q \neq 0$ szám, amelyre teljesül, hogy $a_{n+1} = a_n \cdot q$ minden $n \geq 1$ esetén. A q számot a sorozat kvóciensének (hányadosának) nevezzük.

A mértani sorozatok esetén igazak az alábbi összefüggések.

11-2. tétel:

$$a_n = a_1 \cdot q^n \tag{51}$$

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \tag{52}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{ha} \quad q \neq 1 \tag{53}$$

11-1. feladat: Határozzuk meg a kétjegyű 9-cel osztható számok összegét!

Megoldás: Az első kétjegyű 9-cel osztható szám a 18, s ezután minden 9-dik szám osztható 9-cel, a legnagyobb 9-cel osztható kétjegyű szám pedig a 99. A következő összeget kell tehát kiszámolnunk:

$$18 + 27 + 36 + \cdots + 99.$$

Az összeg tagjai olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja $a_1 = 18$, és differenciája $d = 9$. Meg kellene határoznunk, hogy a sorozat hány tagját összegezzük. Az összeg utolsó tagjára írjuk fel az $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ összefüggést. Kapjuk:

$$99 = 18 + (n-1) \cdot 9.$$

Ebből az egyenletből következik, hogy $n = 10$, tehát a sorozat első 10 tagját összegezzük. Ezután az összeg már könnyen kiszámolható:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = \frac{10}{2}(18 + 99) = 585.$$

11-2. feladat: Egy számtani sorozat ötödik tagja 14, nyolcadik tagja 23. Határozzuk meg a sorozat első tagját és differenciáját, valamint az első 20 tag összegét!

Megoldás: A feladat szövege szerint

$$a_5 = a_1 + 4d = 14 \quad \text{és} \quad a_8 = a_1 + 7d = 23.$$

Lényegében egy kétismeretlenes egyenletrendszert kaptunk, melyben a sorozat első eleme és differenciája az ismeretlenek. Célszerű a_8-ból kivonni a_5-öt, mert így a $3d = 9$ egyismeretlenes egyenletet kapjuk, melyből $d = 3$. Ezt visszahelyettesítve valamelyik egyenletbe az $a_1 = 2$ értéket kapjuk. Az első 20 tag összegét most az $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d)$ összefüggésből célszerű számolni. Eszerint:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \cdot 2 + (20-1) \cdot 3) = 610.$$

11-3. feladat: Egy számtani sorozat első három tagjának összge 30, valamint tudjuk, hogy a harmadik tag az első tag négyszerese. Határozzuk meg a sorozat első tagját és differenciáját!

Megoldás: Induljunk ki a az első három tag összegéből:

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3.$$

Fejezzük ki most a_1-et és a_3-at az a_2 és a differencia segítségével.

$$a_1 = a_2 - d \quad \text{és} \quad a_3 = a_2 + d$$

Írjuk be ezeket az összegbe.

$$S_3 = (a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 3a_2$$

Ebből $a_2 = 10$ következik. Ezután az első és a harmadik tag már

$$a_1 = 10 - d \quad \text{és} \quad a_3 = 10 + d$$

formában írható fel. Használjuk fel, hogy a harmadik tag az első tag négyszeres, azaz

$$a_3 = 4a_1, \quad \text{vagy másképp} \quad 10 + d = 4(10 - d)$$

Ebből az egyenletből $d = 6$ következik, majd ezt felhasználva $a_1 = 4$.

11-4. feladat: Egy mértani sorozat negyedik tagja nyolcszor akkora, mint az első tag, továbbá tudjuk, hogy a harmadik és ötödik tag összege 100. Határozzuk meg a sorozat első tagját és kvóciensét!

Megoldás: A feladat szövege szerint $a_4 = 8a_1$. Tudjuk azonban azt is, hogy $a_4 = a_1 \cdot q^3$. Tehát $q^3 = 8$, amiből $q = 2$. Írjuk fel a sorozat harmadik és ötödik tagját az első tag és a kvóciens segítségével.

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \quad \text{s} \quad a_5 = a_1 \cdot q^4$$

Felhasználva, hogy q már ismert:

$$a_3 = 4a_1 \quad \text{és} \quad a_5 = 16a_1.$$

A feladat szövege szerint ezen két tag összege

$$a_3 + a_5 = 100, \quad \text{azaz} \quad 4a_1 + 16a_1 = 20a_1 = 100.$$

Ebből következik, hogy a sorozat első eleme $a_1 = 5$.

11-5. feladat: Egy mértani sorozat harmadik tagja tizenhatszor akkora, mint az első tag, továbbá tudjuk, hogy a második és negyedik tag szorzata 2304. Határozzuk meg a sorozat első tagját és kvóciensét!

Megoldás: Járjunk el hasonlóan, mint az előbb, azaz írjuk fel kétféle módon a harmadik tagot.

$$a_3 = 16a_1 \quad \text{illetve} \quad a_3 = a_1 \cdot q^2$$

Ebből következik, hogy $q^2 = 16$. Vigyázzunk, ennek az egyenletnek két megoldása van, $q = 4$ és $q = -4$.

Írjuk fel a sorozat második és negyedik tagját az első tag és a kvóciens segítségével.

$$a_2 = a_1 \cdot q \quad \text{s} \quad a_4 = a_1 \cdot q^3$$

A feladat szövege szerint ezen két tag szorzata $a_2 \cdot a_4 = 2304$. Az $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ összefüggés alapján ez egyenlő a harmadik tag négyzetével, azaz $a_3^2 = a_2 \cdot a_4$, s ebből $a_3^2 = 2304$. Most is vigyázzunk, mert ismét két megoldás van $a_3 = 48$ és $a_3 = -48$. Ezután a sorozat első elemét az $a_3 = 16a_1$ összefüggésből kapjuk. Mivel két értéket kaptunk a_3-ra, ezért két értéket kapunk a_1 esetében is, ezek $a_1 = 3$ és $a_1 = -3$. Ezután gondoljuk végig, hány sorozat felel meg a feladat feltételeinek. Mivel a_1-re és q-ra is két értéket kaptunk, ezért összesen négy sorozat lesz megoldása a feladatnak. Ezek az alábbiak:

- $a_1 = -3$ és $q = -4$,
- $a_1 = -3$ és $q = 4$,
- $a_1 = 3$ és $q = -4$,
- $a_1 = 3$ és $q = 4$.

11-6. feladat: Egy mértani sorozat első három tagjának összege 26, az első hat tag összege pedig 728. Határozzuk meg a sorozat első tagját és kvóciensét, valamint az első tíz tag összegét!

Megoldás: A feladatot két féle módon is megoldjuk. Az első megoldásban a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ összefüggést használjuk fel. Írjuk ezt fel az első három és az első hat tag esetén.

$$S_3 = a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 26 \quad \text{és} \quad S_6 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 728$$

Vegyük S_6 és S_3 hányadosát.

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{a_1 \cdot \dfrac{q^6 - 1}{q - 1}}{a_1 \cdot \dfrac{q^3 - 1}{q - 1}} = \frac{702}{26}$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{q^6 - 1}{q^3 - 1} = 28.$$

Mivel $q^6 = \left(q^3\right)^2$ ezért a számlálóban egy $a^2 - b^2$ típusú kifejezést ismerhetünk fel, amit szorzattá alakíthatunk.

$$\frac{q^6 - 1}{q^3 - 1} = \frac{\left(q^3\right)^2 - 1}{q^3 - 1} = \frac{(q^3 + 1)(q^3 - 1)}{q^3 - 1} = 28$$

Újabb egyszerűsítés után a következő egyeletet kapjuk:

$$q^3 + 1 = 28,$$

amiből $q = 3$ következik. Helyettesítsük ezt vissza az első három tag összegére vonatkozó összefüggésbe.

$$S_3 = a_1 \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 13a_1 = 26, \quad \text{amiből} \quad a_1 = 2.$$

Már csak az első tíz tag összegét kell meghatároznunk, amihez ismét helyettesítsünk az összegképletbe.

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 59048$$

A második megoldásban vegyük az első hat tag és az első három tag összegének különbségét.

$$S_6 - S_3 = 728 - 26 = 702$$

Írjuk fel ugyanezt úgy, hogy kiírjuk az összeg tagjait.

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - (a_1 + a_2 + a_3) = a_4 + a_5 + a_6 = 702$$

Tudjuk, hogy

$$a_4 = a_1 \cdot q^3,$$
$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = (a_1 \cdot q) \cdot q^3 = a_2 \cdot q^3,$$
$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = (a_1 \cdot q^2) \cdot q^3 = a_3 \cdot q^3.$$

Ezek alapján

$$a_4 + a_5 + a_6 = a_1 \cdot q^3 + a_2 \cdot q^3 + a_3 \cdot q^3 = q^3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = q^3 \cdot S_3 = 702$$

Az $S_3 = 26$ érték ismert, így a $26q^3 = 702$ egyenletet kapjuk, amiből $q^3 = 27$, majd $q = 3$ következik. Írjuk fel ezután az első három tag összegét úgy, hogy a tagokat kifejezzük az első tag és a kvóciens segítségével.

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + (a_1 \cdot q) + (a_1 \cdot q^2) = a_1(1 + q + q^2)$$

Használjuk fel, hogy S_3 adott, és a kvóciens értékét már ismerjük.

$$S_3 = a_1(1 + 3 + 3^2) = 13a_1 = 26$$

Ebből kapjuk:

$$a_1 = 3.$$

Az első tíz tag összegét ugyanúgy számoljuk ki, mint az előbb.

11-7. feladat: Három szám, amelyek összege 60, egy számtani sorozat első három tagja. Ha az első két számot változatlanul hagyjuk, és a harmadikhoz 10-et adunk, akkor egy mértani sorozat első három tagját kapjuk. Határozzuk meg a számtani sorozat első három elemét és differenciáját!

Megoldás: Jelölje a három számot a_1, a_2, a_3, a számtani sorozat differenciáját pedig d. Fejezzük ki az első és harmadik számot a második szám és a differencia segítségével.

$$a_1 = a_2 - d \quad \text{és} \quad a_3 = a_2 + d$$

Ismerjük ezek összegét.

$$a_1 + a_2 + a_3 = (a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 3a_2 = 60$$

Ebből megkapjuk a második számot: $a_2 = 20$. Ezután a három számot az alábbi módon is írhatjuk:

$$a_1 = 20 - d, \quad a_2 = 20, \quad a_3 = 20 + d.$$

Jelölje a mértani sorozat elemeit b_1, b_2, b_3, és fejezzük ki ezeket a számtani sorozat elemeivel.

$$b_1 = a_1 = 20 - d, \quad b_2 = a_2 = 20, \quad b_3 = a_3 + 10 = 30 + d.$$

Tudjuk, hogy mértani sorozat egy elemének négyzete egyenlő a szomszédos elemek szorzatával. Ebből következően:

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3,$$

azaz

$$400 = (20 - d)(30 + d) = 600 - 10d - d^2$$

Rendezzük 0-ra a kapott másodfokú egyenletet.

$$d^2 + 10d - 200 = 0$$

Helyettesítsünk a megoldóképletbe.

$$d_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-200)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 10 \\ -20 \end{cases}$$

A feladatnak tehát két megoldása van. Ha $d = 10$, akkor a számtani sorozat három tagja:

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 20, \quad a_3 = 30.$$

Bár a kérdésben nem szerepelt, de ellenőrzésként gondoljuk végig, hogy ekkor a mértani sorozat elemei:

$$b_1 = 10, \quad b_2 = 20, \quad b_3 = 40.$$

Ha $d = -20$, akkor a számtani sorozat három tagja:

$$a_1 = 40, \quad a_2 = 20, \quad a_3 = 0.$$

Ellenőrzésként most is gondoljuk végig, hogy ekkor a mértani sorozat elemei:

$$b_1 = 40, \quad b_2 = 20, \quad b_3 = 10.$$

11-8. feladat: Három szám, amelyek szorzata 8000, egy mértani sorozat első három tagja. Ha az első két számot változatlanul hagyjuk, és a harmadikból 45-öt kivonunk, akkor egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozat első három elemét és kvóciensét!

Megoldás: Jelölje a három számot a_1, a_2, a_3, a mértani sorozat kvóciensét pedig q. Fejezzük ki az első és harmadik számot a második szám és a kvóciens segítségével.

$$a_1 = \frac{a_2}{q} \quad \text{és} \quad a_3 = a_2 \cdot q$$

Ismerjük ezek szorzatát.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{a_2}{q} \cdot a_2 \cdot (a_2 \cdot q) = (a_2)^3 = 8000$$

Ebből megkapjuk a második számot: $a_2 = \sqrt[3]{8000} = 20$. Ezután a három számot az alábbi módon is írhatjuk:

$$a_1 = \frac{20}{q}, \quad a_2 = 20, \quad a_3 = 20 \cdot q.$$

Jelölje a számtani sorozat elemeit b_1, b_2, b_3, és fejezzük ki ezeket a mértani sorozat elemeivel.

$$b_1 = a_1 = \frac{20}{q}, \quad b_2 = a_2 = 20, \quad b_3 = a_3 - 45 = 20q - 45.$$

Tudjuk, hogy számtani sorozat egy eleme egyenlő a szomszédos elemek számtani közepével. Ebből következően:

$$b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2},$$

azaz

$$20 = \frac{\frac{20}{q} + (20q - 45)}{2}.$$

Szorozzuk mindkét oldalt 2-vel, majd vonjunk ki 45-öt.

$$85 = \frac{20}{q} + 20q$$

Szorozzunk q-val, osszunk 5-tel, és rendezzük 0-ra a kapott másodfokú egyenletet.

$$0 = 4q^2 - 17q + 4$$

Helyettesítsünk a megoldóképletbe.

$$q_{1,2} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \begin{cases} 4 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

A feladatnak tehát két megoldása van. Ha $q = 4$, akkor a mértani sorozat három tagja:

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 20, \quad a_3 = 80.$$

Bár a kérdésben nem szerepelt, de ellenőrzésként gondoljuk végig, hogy ekkor a számtani sorozat elemei:

$$b_1 = 5, \quad b_2 = 20, \quad b_3 = 35.$$

Ha $q = \frac{1}{4}$, akkor a mértani sorozat három tagja:

$$a_1 = 80, \quad a_2 = 20, \quad a_3 = 5.$$

Ellenőrzésként most is gondoljuk végig, hogy ekkor a számtani sorozat elemei:

$$b_1 = 80, \quad b_2 = 20, \quad b_3 = -40.$$

11-9. feladat: Év elején beteszünk a bankba 100000 Ft-ot évi 6%-os kamatlábra. Mennyi pénzt kapunk vissza banktól 8 év múlva, ha minden év végén tőkésítik a kamatokat? Mennyi pénzt kapunk vissza 8 év elteltével, ha a kamat időarányos részét havonta tőkésíti a bank? Hány %-kal nagyobb a második esetben a bank által kifizetett összeg, mint az első esetben?

Megoldás: Jelöljük a betett összeget, azaz a kezdeti tőkét T_0-lal. Egy év elteltével ennek összegét megnöveli a bank az éves kamattal, tehát a tőke szorzódik 1.06-tal, s innentől ez képezi a kamatozás alapját. Ezt úgy is kifejezhetejük, hogy ha T_1-gyel jelöljük az egy év utáni tőkét, akkor

$$T_1 = T_0 \cdot 1.06.$$

Ugyanígy történik a kamatozás a második évben is, ezért a másdik év eltelte utáni tőkére, amit jelöljünk T_2-vel, az alábbi igaz:

$$T_2 = T_1 \cdot 1.06 = (T_0 \cdot 1.06) \cdot 1.06 = T_0 \cdot 1.06^2.$$

Mivel minden évben ugyanígy történik a kamatozás, így az n-edik év eleji tőke (T_n) egy év elteltével (T_{n+1})-re növekszik, és

$$T_{n+1} = T_n \cdot 1.06.$$

Az évenkénti tőkék tehát egy olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek első eleme T_0, kvóciense pedig 1.06. Nekünk ezen sorozat 9. elemét kell meghatározni. (Mivel a sorozat első eleme T_0, ezért T_8 már a 9. elem.) A mértani sorozatokra megismertek szerint

$$T_8 = T_0 \cdot 1.06^8 = 100000 \cdot 1.06^8 \approx 159385\,\text{Ft}.$$

Nézzük ezután a havonkénti tőkésítés esetét. Egy hónap elteltével a bank az időarányos kamattal növeli meg a tőkét. Mivel egy évre 6% a kamatláb, így egy hónapra ennek a 12-ed része, azaz 0.5% jut. Ha most az egy hónap utáni tőkét T_1^*-gyel jelöljük, akkor

$$T_1^* = T_0 \cdot 1.005$$

Az előzőek alapján ilvánvaló, hogy most a havonkénti tőkék összege olyan mértani sorozatot alkot, melynek első tagja T_0, kvóciense pedig 1.005. Most a sorozat $97.$ eleme a kérdés, hiszen a 8 évben 96 hónap található, és T_{96}^* a sorozat $97.$ eleme. Ezek alapján a bank által kifizetett összeg a következő:

$$T_{96}^* = T_0 \cdot 1.005^{96} \approx 161414\,\mathrm{Ft}.$$

Még az van hátra, hogy meghatározzuk, hány %-kal járunk jobban a msásodik esetben. Ehhez vegyük a két esetben a bank által kifizetett összeg hányadosát. Mivel a második esetet akarjuk az elsőhöz viszonyítani, így T_{96}^*-ot kell osztanunk T_8-cal.

$$\frac{T_{96}^*}{T_8} = \frac{161414}{159385} \approx 1.0127$$

Ebből számunkra az fontos, hogy mennyivel kaptunk 1-nél nagyobb számot. Ez 0.0127, ami 1.27%-nak felel meg.

11-10. feladat: Legalább hány évig kell bankban tartani a pénzünket évi 8%-os kamatláb mellett, ha minimum a dupláját szeretnénk visszakapni, és a bank évente tőkésít?

Megoldás: Jelöljük a betett pénzösszeget T_0-lal. Tegyük fel, n év szükséges ahhoz, hogy pénzünk legalább megduplázódjon. Jelöljük az n év utáni tőkénket T_n-el. A korábbiak szerint

$$T_n = T_0 \cdot 1.08^n.$$

Mivel pénzünk legalább megduplázódott, ezért a $T_n \geq 2T_0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülni. Használjuk fel, hogy az előbb kifejeztük T_n-t a T_0-ból. Így az alábbit kapjuk:

$$T_0 \cdot 1.08^n \geq 2T_0.$$

Osszuk mindkét oldalt T_0-lal, így

$$1.08^n \geq 2.$$

Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát.

$$\ln 1.08^n \geq \ln 2$$

A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság felhazsnálásával:

$$n \cdot \ln 1.08 \geq \ln 2.$$

Ebből n megkapható, ha $\ln 1.08$-dal osztunk.

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1.08} \approx 9.006$$

Ez azt jelenti, hogy legalább 10 évig kell a bankban kamatoztatni a pénzünket. Természetesen 10 év után nem pontosan a dupláját kapjuk vissza az eredeti betétnek, hanem $1.08^{10} \approx 2.159$-szeresét. Viszont ha csak 9 évig van a bankban a pénz, akkor csak $1.08^9 \approx 1.999$-szeresét. Tehát 9 év elteltével már majdnem duplájára nő a betét, de egy kicsivel még a kétszeres érték alatt marad.

11-11. feladat: Tizenöt éven át minden év elején beteszünk a bankba 100000 Ft-ot évi 8%-os kamatlábra. Az tizenötödik év végére mennyi lesz a betétünk értéke? A bank évente tőkésíti a kamatot.

Megoldás: Írjuk fel külön-külön, hogy a különböző időpontban betett összegek mekkorára nőnek a kamatozás miatt a tizenötödik év végére. Jelöljük az évenkénti 100000-os betétet a_0-lal, a tizenötödik év vége előtt n évvel betett összeg tizenötödik év végére elért értékét pedig a_n-nel. Az alábbiakat kapjuk:

$$a_1 = a_0 \cdot 1.08^1, \quad a_2 = a_0 \cdot 1.08^2 \quad \ldots \quad a_{15} = a_0 \cdot 1.08^{15}$$

Látható, hogy egy olyan mértani sorozat első 15 tagját kaptuk, amelynek első eleme $a_0 \cdot 1.08^{15}$ és kvóciense 1.08. Ezt a 15 számot összadva kapjuk meg a betét összegét a tizenötödik év végén. Az összeadásához használjuk fel a mértani sorozat összegképletét. Az alábbit kapjuk:

$$S_{15} = a_1 \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1} = (100000 \cdot 1.08)\frac{1.08^{15} - 1}{1.08 - 1} \approx 4282428\,\text{Ft}.$$

11-12. feladat: Egy család új lakás vásárlásához 10 millió Ft-os kölcsönt vesz fel az alábbi feltételekkel. A kölcsön futamideje 20 év, és évenként egy alkalommal, azonos nagyságú részletekben törlesztik a kölcsönt és kamatait, s az első részlet befizetése egy évvel a kölcsön felvétele után esedékes. Mekkora lesz az éves részlet, ha a kölcsönt 6%-os kedvezményes kamatlábra sikerült felvenniük?

Megoldás: A feladatot a következő gondolatmenettel könnyű megoldani. A $20.$ év végén vonjunk egyenleget a tartozás és a befizetések között. Ehhez minden pénzösszeget kamatoljunk fel a $20.$ év végére, hiszen az évek múlásával minden pénzösszeg kamatozik. A kamatokkal megnövelt tartozás értéke egyenlő kell legyen a befizetések kamatokkal megnövelt értékeinek összegével, mert ebben az időpontban lejár a család hitele. Nézzük a tartozási oldalt. A $20.$ év végére az alábbi összeg lenne a család tartozása, ha nem törlesztenének:

$$T = 10^7 \cdot 1.06^{20} \approx 32071355\,\mathrm{Ft}.$$

Ez a kicsi több mint 32 millió Ft bizony elég csúnyán hangzik! De nézzük a befizetési oldalt is. Ehhez írjuk fel külön-külön a különböző időpontban befizetett részletek kamatokkal megnövelt értékét a $20.$ év végén. Jelöljük az n-edik befizetett részlet felkamatolt értékét a_n-nel, az évenkénti részlet értékét pedig a_0-lal. Az alábbiakat kapjuk:

$$a_1 = a_0 \cdot 1.06^{19}, \quad a_2 = a_0 \cdot 1.06^{18} \ \ldots \ a_{19} = a_0 \cdot 1.06^1, \quad a_{20} = a_0 \cdot 1.06^0.$$

Összegezzük a befizetések kamatokkal megnövelt értékeit.

$$B = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = a_0 \left(1.06^{19} + 1.06^{18} + \cdots + 1.06 + 1\right)$$

Látható, hogy a_0 szorzói egy mértani sorozat részét alkotják. Ha fordított sorrendben haladunk, akkor az első tag 1, a kvóciens 1.06, és 20 tag szerepel. Használjuk ezt ki az összegzés során.

$$B = a_0 \cdot S_{20} = a_0 \frac{1.06^{20} - 1}{1.06 - 1} \approx 36.7856 a_0$$

A fenntebb leírtak szerint teljesül a $T = B$ egyenlőség, azaz

$$32071355 = 36.7856 a_0.$$

Ebből már egyszerű osztással megkapjuk a részlet értékét.

$$a_0 = \frac{32071355}{36.7856} \approx 871845\,\text{Ft}.$$

Ez azt jelenti, hogy a családnak havonta 72654 Ft-ot kell kigazdálkodni az éves részlet befizetéshez.

11.2. Ellenőrző kérdések

Kvíz

1. Mennyi a kétjegyű 3-mal osztható számok összege?

☐ 1305 ☐ 1665 ☐ 2610 ☐ 3330

2. Egy számtani sorozat negyedik tagja 18, kilencedik tagja pedig 43. Mivel egyenlő az első 10 tag összege?

☐ 255 ☐ 280 ☐ 510 ☐ 560

3. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 45, és a harnadik tag ötszöröse az első tagnak. Mennyi a sorozat differenciája?

☐ 3 ☐ 5 ☐ 9 ☐ 10

4. Egy mértani sorozat első tagja 27-szer akkora , mint a megyedik tag. Mivel egyenlő a sorozat első tagja, ha a második és harmadik tag összege 108 ?

☐ 9 ☐ 27 ☐ 81 ☐ 243

5. Egy mértani sorozat ötödik tagja 25-ször akkora, mint a harmadik tag. Mi a sorozat első tagja, ha a második és negyedik tag szorzata 2500 ?

☐ 2 ☐ -5 ☐ 2 vagy -2 ☐ 5 vagy -5

6. Egy mértani sorozat első három tagjának összeg 9, a következő három tag összege pedig -72. Mibel egyenlő az első 9 tag összege?

☐ -513 ☐ 513 ☐ -1539 ☐ 1539

7. Egy számtani sorozat első három tagjának összge 24. Ha az első két tagot változatlanul hagyjuk és a harmadikhoz 18-at adunk, akkor egy mértani sorozat első három tagját kapjuk. Mivel egyenlő a számtani sorozat differenciája?

☐ 4 vagy -16 ☐ -4 vagy 16 ☐ 6 vagy -24 ☐ -6 vagy 24

8. Egy mértani sorozat első három tagjának szorzata 27000. Ha a második és a harmadik tagot változatlanul hagyjuk, az első tagból pedig 96-ot kivonunk, akkor egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Mivel egyenlő a számtani sorozat differenciája?

☐ -24 vagy 120 ☐ 24 vagy -120 ☐ -36 vagy 90 ☐ 36 vagy -90

9. Öt évvel ezelőtt elhelyeztünk a bankban 500000 Ft-ot. Mennyi volt az éves kamatláb, ha most 881176 Ft-ot kaptunk vissza a banktól? A kamatokat évente tőkésítették.

☐ 10% ☐ 11% ☐ 12% ☐ 13%

10. Mekkora éves kamatláb esetén duplázódik meg a pénzünk 7 év alatt, ha a bank évente tőkésíti a kamatot?

☐ Közelítőleg 9.07%. ☐ Közelítőleg 9.83%. ☐ Közelítőleg 10.41%. ☐ Közelítőleg 11.14%.

11. Nyugdíjba vonulásunk előtti 10 év mindegyikének elején befizetünk 100000 Ft-ot egy olyan befektetési formára, mely 18%-os kimagasló hasznot hoz évente? Minden év végén az éves hasznot hozzáírják a tőkéhez. Mekkora pénzösszeggel rendelkezünk majd a 10. év végén, amikor nyugdíjba vonulunk?

☐ 2352130 Ft ☐ 2775514 Ft ☐ 2907686 Ft ☐ 3431070 Ft

12. Év elején felvettünk 2 millió Ft kölcsönt 4 év futamidőre úgy, hogy évente egy-egy alkalommal azonos nagyságú részletekben törlesztünk. Az első befizetés a kölcsön felvétele után egy évvel esedékes. Sajnos a kölcsönt elég kedvezőtlenül, 20%-os kamatlábra kaptuk. Mekkora lesz az éves részletünk?

☐ 685421 Ft ☐ 723916 Ft ☐ 748513 Ft ☐ 772578 Ft

Clear

12. lecke

Vektorok

12. Vektorok

12.1. Bevezető

Fizikában nagyon gyakran találkozunk olyan mennyiségekkel, amelyek nem csak nagysággal, hanem iránnyal is rendelkeznek. Ezek matematikai leírásához vezetjük be a vektor fogalmát. Ebben a leckében azon vektorokkal kapcsolatos ismereteket ismételjük át, amelyek alapvetőek az egyéb tantárgyakban előforduló alkalmazások szempontjából.

12-1. definíció: Az irányított szakaszt vektornak nevezzük.

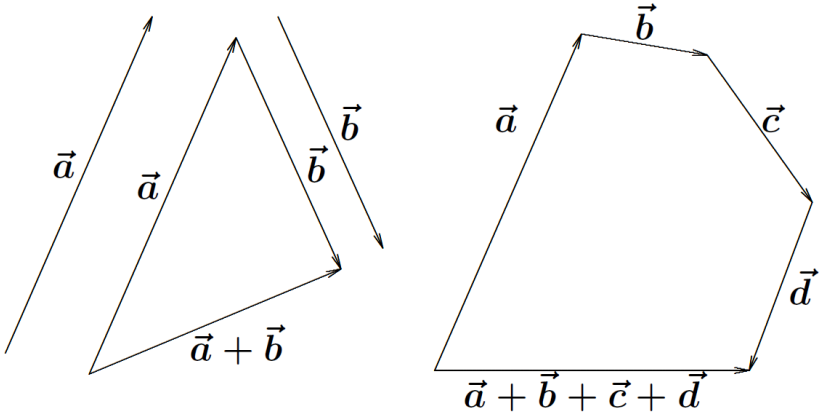
Az A kezdőpontú és B végpontú vektort az $\overrightarrow{AB}$ szimbólummal jelöljük. Szokás azonban a vektorok jelölésére egyetlen kisbetűt is használni, pl $\vec{v}$. Rajzban a vektort nyíllal ábrázoljuk, melynek hegye a a vektor végpontjába mutat.

12-2. definíció: Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha megegyezik a hosszuk, az állássuk (milyen egyenessel párhuzamosak) és irányításuk (az egyenesen melyik félegyenes irányába mutatnak). Ekkor a vektorok eltolhatók egymásba.

12-3. definíció: Az $\vec{a}$ vektor hosszát a vektor abszolút értékének is nevezzük, és $|\vec{a}|$-val jelöljük.

12-4. definíció: Az olyan vektort, amelynek kezdő- és végpontja egybeseik, nullvektornak nevezzük, és $\vec{0}$-val jelöljük.

A nullvektor hossza zérus, iránya tetszőleges, minden vektorra merőleges és minden vektorral párhuzamos.

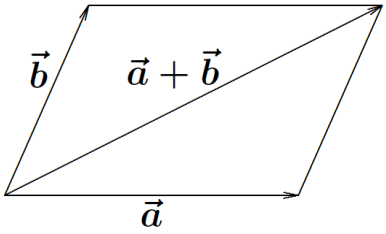


10. ábra. Kettő illetve több vektor összeadása.

12-5. definíció: Adott két vektor $\vec{a}$ és $\vec{b}$. Toljuk el a $\vec{b}$ vektort úgy, hogy kezdőpontja az $\vec{a}$ vektor végpontjába kerüljön. Ekkor az $\vec{a}$ kezdőpontjából a $\vec{b}$ végpontjába mutató vektort a két vektor összegének nevezzük, és $\vec{a}+\vec{b}$-vel jelöljük.

A definícióból látható, hogy az összeadása esetén a vektorokat egymás után felvéve egy irányított töröttvonalat kapunk, amelynek kezdőpontjából a végpontjába mutató vektor az összeg. Ilyen módon nem csak két vektort adhatunk össze, hanem tetszőleges számú vektort is.

A nem egy egyenesbe eső $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összegét az úgynevezett paralelgorammaszabállyal is megszerkeszthetjük. Ekkor a két vektort közös kezdőpontból vesszük fel, és mindegyik végpontján keresztül párhozamost húzunk a másik vektorral. Így egy paralelogrammát kapunk, melyet az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által kifeszített paralelogrammának is nevezünk. A paralelogramma azon átlóvektora lesz az összeg, mely a két vektor közös kezdőpontjából indul.



11. ábra. Vektorok összeadása a paralelogrammaszabállyal.

12-1. tétel: A vektorok összadása kommutatív művelet, azaz összeadáskor a sorrend felcsrélhető.

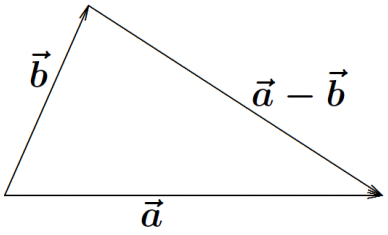
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{54}$$

12-2. tétel: A vektorok összadása asszociatív, azaz kettőnél több tagú összeg esetén az összeadandókat tetszőlegesen csoportosíthatjuk.

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \tag{55}$$

12-6. definíció: Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbségén azt a vektort értjük, melyet $\vec{b}$-hez adva $\vec{a}$-t kapunk eredményül.

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbségét a következő módon ábrázolhatjuk. Vegyük fel a két vektort közös kezdőponttal. A $\vec{b}$ végpontjából az $\vec{a}$ végpontjába mutató vektor az $\vec{a}-\vec{b}$ vektor.

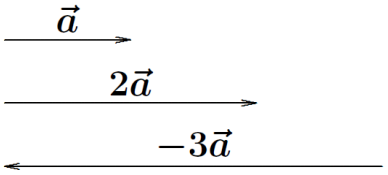


12. ábra. Vektorok kivonása.

12-7. definíció: Ha λ valós szám és $\vec{a}$ tetszőleges vektor, akkor $\lambda\vec{a}$ azt a vektort jelenti, amelynek hosszúsága $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, állása azonos $\vec{a}$ állásával, irányítása pedig $\lambda > 0$ esetén megegyezik $\vec{a}$ irányításával, $\lambda < 0$ esetén pedig ellentétes. Ha $\lambda = 0$ akkor $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

12-3. tétel: Ha $\vec{a}$ és $\vec{b}$ párhuzamosak, és egyikük sem nullvektor, akkor bármelyik előállítható egyértelműen a másik számszorosaként, azaz létezik egyetlen olyan λ valós szám, melyre

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}.$$



13. ábra. Vektor szorzása számmal.

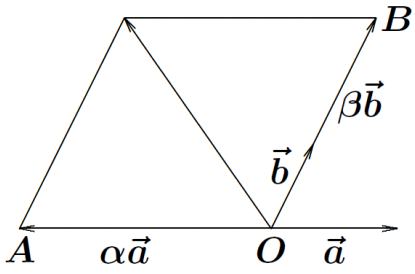
12-4. tétel: Ha λ és μ tetszőleges valós számok, $\vec{a}$ és $\vec{b}$ pedig tetszőleges vektorok, akkor:

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \tag{56}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \tag{57}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \tag{58}$$

12-8. definíció: Rögzítsünk egy O pontot, melyet origónak nevezünk. Ekkor bármely P pont esetén a $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ vektort a P pont (O pontra vonatkozó) helyvektorának nevezzük. Az O pont helyvektora a $\vec{0}$.



14. ábra.

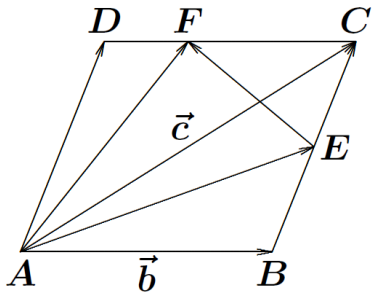
12-5. tétel: Ha $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{v}$ egy sík vektorai, és $\vec{a}$ nem párhuzamos $\vec{b}$-vel, akkor $\vec{v}$-hez egyértelműen létezik olyan α, β valós számpár, amelyre:

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Ugyanezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a sík bármely vektora egyértelműen bontható fel két, egymással nem párhuzamos vektorral egyállású vektor összegére.

A vektorok felbontását összetevőkre a következő módon ábrázolhatjuk. Mérjük fel azonos O kezdőpontból az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{v}$ vektorokat. Húzzunk párhuzamost $\vec{v}$ végpontján keresztül az $\vec{b}$ vektor egyenesével. Mivel $\vec{a}$ nem párhuzamos $\vec{b}$-vel, ezért ez az egyenes metszi az $\vec{a}$ egyenesét egy A pontban. Hasonlóan húzzunk párhuzamost $\vec{v}$ végpontján keresztül az $\vec{a}$ vektor egyenesével. Ez az egyenes metszi az $\vec{b}$ egyenesét egy B pontban. Ekkor $\overrightarrow{OA} \parallel \vec{a}$ és $\overrightarrow{OB} \parallel \vec{b}$, s emiatt egyértelműen léteznek olyan α, β valós számok, amelyekre $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$ és $\overrightarrow{OB} = \beta\vec{b}$.A vektorösszadás paralelogrammaszabálya szerint:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \alpha\vec{a} = \beta\vec{b}.$$



15. ábra.

12-1. feladat: Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát! A BC oldal felezéspontja legyen E, a CDoldal D-hez közelebbi harmadolópontja pedig F. Az egyszerűbb írásmód kedvéért jelöljük az $\overrightarrow{AB}$ vektort $\vec{b}$-vel, az $\overrightarrow{AC}$ vektort $\vec{c}$-vel. Fejezzük ki a $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok segítségével az $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{EF}$ vektorokat.

Megoldás:

Készítsünk egy ábrát a paralelogrammáról. Az $\overrightarrow{AD}$ vektor kifejezéséhez vegyük észre, hogy ez a vektor megegyezik a $\overrightarrow{BC}$ vektorral. Mivel a paralelogrammáról van szó, így a szemközti oldalak azonos hosszúságúak és párhuzamosak, tehát a két vektor is egyenlő hosszúságú, és azonos állású. Az ábráról az irányítások egyezősége is nyilvánvaló. Mivel a $\overrightarrow{BC}$ az azonos kezdőpontú $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ és $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ vektorok végpontjait köti össze, így ezen két vektor különbségeként állítható elő úgy, hogy a végpontba mutató vektorból vonjuk ki a kezdőpontba mutató vektort, azaz:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}.$$

Ugyanezen eredményre jutottunk volna akkor is, ha abból indulunk ki, hogy az ABC irányított töröttvonal

ugyanúgy A-ból C-be vezet, mint az $\overrightarrow{AC}$ vektor, ami azt jelenti, hogy:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

vagy egyszerűbb jelöléssel:

$$\vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{c}.$$

Ha mindkét oldalból kivonjuk a $\vec{b}$ vektort, újra megkapjuk, hogy:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}.$$

Amint korábban megállapítottuk $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, amiből következik, hogy:

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{b}.$$

Foglalkozzunk ezután az $\overrightarrow{AE}$ vektor előállításával. Ha egy vektort más vektorokból szeretnénk előállítani, akkor sok esetben úgy járhatunk el, hogy az előállítani kívánt vektort egy irányított töröttvonallal helyettesítjük, melynek kezdő- és végpontja megegyezik a vektor kezdő- és végpontjával. Így a vektort az irányított töröttvonalat alkotó vektorok összegként kapjuk meg. Jelen esetben az $\overrightarrow{AE}$ vektort pl az ABE irányított töröttvonallal helyettesíthetjük, amiből következik:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{b} + \overrightarrow{BE}.$$

Mivel az E pont a BC oldal felezéspontja, ezért a $\overrightarrow{BE}$ vektor nyilvánvalóan párhuzamos és egyirányú a $\overrightarrow{BC}$ vektorral, csak fele olyan hosszú. Ez azt jelenti:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

A $\overrightarrow{BC}$ vektort az előbb már kifejeztük $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével: $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$.

Ezt felhasználva kajuk:

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}).$$

Ezzel a részeredménnyel térjünk vissza az $\overrightarrow{AE}$ vektorhoz.

$$\overrightarrow{AE} = \vec{b} + \overrightarrow{BE} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}).$$

Ha felbontjuk a zárójelet, és rendezünk, akkor ezt az alábbi alakra hozhatjuk:

$$\overrightarrow{AE} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}).$$

Eredményünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy szakasz felezéspontjába mutató vektort a szakasz végpontjaiba mutató vektorok számtani közepeként kaphatunk meg.

Ezután hasonló elven állíthatjuk elő az $\overrightarrow{AF}$ vektort is. Ez a vektor helyettesíthető pl az ADF irányított töröttvonallal, amiből következik:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}.$$

Az $\overrightarrow{AD}$ vektort már kifejeztük $\vec{b}$ és $\vec{c}$ segítségével: $\overrightarrow{AD} = \vec{c} - \vec{b}$. Mivel F a CD oldal D-hez közelebbi harmadolópontja, ezért a $\overrightarrow{DF}$ vektor nyilvánvalóan párhuzamos és egyirányú az $\overrightarrow{AB}$ vektorral, csak hossza harmada az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszának. Ez azt jelenti:

$$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Részeredményeinket felhsználva térjünk vissza az $\overrightarrow{AF}$ vektorhoz. helyettesíthető pl az ADF irányított töröttvonallal, amiből következik:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \vec{c} - \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

Összevonás után az alábbit kapjuk:

$$\overrightarrow{AF} = \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Utolsóként következik az $\overrightarrow{EF}$ vektor. Ez a vektor a közös kezdőpontú $\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{AF}$ vektorok végpontjait köti össze, így ezen két vektor különbségeként állítható elő úgy, hogy a végpontba mutató vektorból vonjuk ki a kezdőpontba mutató vektort, azaz:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}.$$

A kivonásban szereplő két vektort már előállítottuk. Használjuk fel a korábbi eredményeinket.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \left(\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

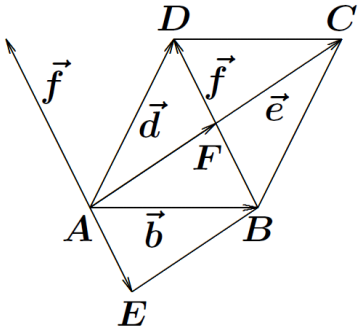
A zárójelek felbontása és rendezés után ez az alábbi alakban is írható:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{7}{6}\vec{b}.$$

12-2. feladat: Jelöljük az $ABCD$paralelogramma $\overrightarrow{AC}$ átlóvektorát $\vec{e}$-vel, $\overrightarrow{BD}$ átlóvektorát $\vec{f}$-fel. Fejezzük ki $\vec{e}$ és$\vec{f}$ segítségével az $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ oldalvektorokat.

Megoldás: Az előző feladat végén szereplő megjegyzés szerint úgy is fogalamazhatjuk a feladatot, hogy bontsuk fel az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokat $\vec{e}$-vel és $\vec{f}$-fel párhuzamos összetevőkre. Oldjuk meg ezt a feladatot most a vektorfelbontás alkalmazásával. Elsőként az $\vec{b}$ vektort bontsuk fel összetvőkre, s ehhez készítsünk egy ábrát a paralelogrammáról.

Toljuk el az $\vec{f}$ vektort az A pontba, majd az $\vec{b}$ vektor végpontján keresztül húzzunk párhuzamost az $\vec{e}$ és $\vec{f}$ vektorokkal. Határozzuk meg ezen egyenesek metszéspontját az $\vec{f}$ és $\vec{e}$ vektorok egyenesével. Jelöljük ezeket a



16. ábra.

pontokat E-vel és F-fel. Az $AEBF$ négyszög egy paralelogramma. A vektorok összeadásának paralelogrammaszabálya szerint:

$$\vec{b} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}.$$

Az F pont a paralelogramma átlóinak metszéspontja, amiről tudjuk, hogy felezi az átlókat. Ebből következően

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{e},$$

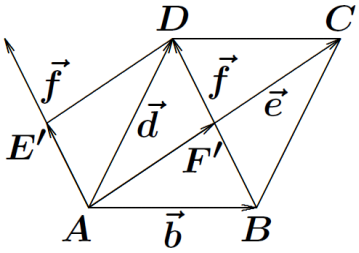
valamint

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\vec{f}.$$

Ezeket felhasználva kapjuk:

$$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}.$$

Ezután következzék $\vec{d}$ felbontása. Ehhez készítsünk egy új ábrát.



17. ábra.

Most az $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ vektor végpontján keresztül húzzunk párhuzamost az $\vec{e}$ és $\vec{f}$ vektorokkal. Határozzuk meg ezen egyenesek metszéspontját az $\vec{f}$ és $\vec{e}$ vektorok egyenesével. Jelölje most ezeket a pontokat E' és F'. Az $AE'BF'$ négyszög egy paralelogramma. A vektorok összeadásának paralelogrammaszabálya szerint:

$$\vec{d} = \overrightarrow{AE'} + \overrightarrow{AF'}.$$

Az F' pont a paralelogramma átlóinak metszéspontja, így felezi az átlókat. Ebből következően

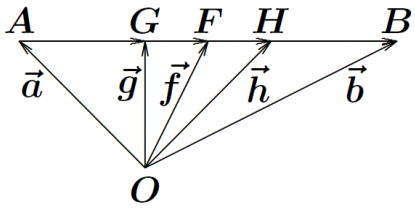
$$\overrightarrow{AF'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{e},$$

valamint

$$\overrightarrow{AE'} = \overrightarrow{F'D} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{f}.$$

Ezeket felhasználva kapjuk:

$$\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{e} + \frac{1}{2}\vec{f}.$$



18. ábra.

12-3. feladat: Legyenek az AB szakasz végpontjainak helyvektorai $\vec{a}$ és $\vec{b}$. Fejezzük ki a szakasz felezőpontjába és harmadolópontjaiba mutató helyvektorokat $\vec{a}$ és $\vec{b}$ segítségével!

Megoldás: A feladatot kétféle módon is megoldjuk. Először azt a módszert használjuk, hogy a kifejezni kívánt vektort más vektorokból álló töröttvonallal helyettesítjük, és így ezen vektorok összegeként írjuk fel. Jelölje a szakasz felezéspontját F, a két harmadolópontot G és H, a beléjük mutató helyvektorokat pedig $\vec{f}$, $\vec{g}$, $\vec{h}$. Készítsünk egy ábrát a szakaszról és a vektorokról.

Elsőként az $\vec{f}$ vektort állítsuk elő. Ehhez a vektort helyettesítsük az OAF töröttvonallal, s ebből felírhatjuk, hogy:

$$\vec{f} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + \overrightarrow{AF}.$$

Mivel F a szakasz felezéspontja, ezért

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Az A és B pontok helyvektorait ismerjük, így a két pont közötti $\overrightarrow{AB}$ vektort előállíthatjuk a két helyvektor különbségeként. A végpontba mutató helyvektorból kell kivonnunk a kezdőpontba mutató helyvektort, azaz

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Ezt felhasználva kapjuk:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right).$$

Helyettesítsük ezt az $\vec{f}$ vektort előállító összegbe.

$$\vec{f} = \vec{a} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$

Rendezés után kapjuk:

$$\vec{f} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

Járjunk el hasonló módon a két harmadolópont esetében is. Az A-hoz közelebbi G harmadolópont helyvektorát helyettesítsük az OAG töröttvonallal, amiből következik:

$$\vec{g} = \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \vec{a} + \overrightarrow{AG}.$$

Használjuk ki, hogy G harmadolja a szakaszt, s ezért

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right).$$

Ezt behelyettesítve kapjuk:

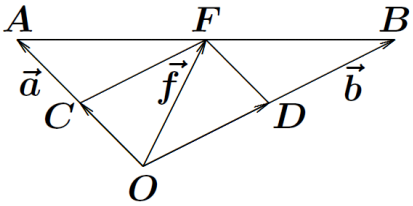
$$\vec{g} = \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Ugyanígy a H harmadolópont helyvektorát helyettesítsük az OAH töröttvonallal, amiből következik:

$$\vec{h} = \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \vec{a} + \overrightarrow{AH}.$$

Mivel H a B-hez közelebbi harmadolópont, ezért

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right).$$



19. ábra.

Ezt behelyettesítve kapjuk:

$$\vec{h} = \vec{a} + \frac{2}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

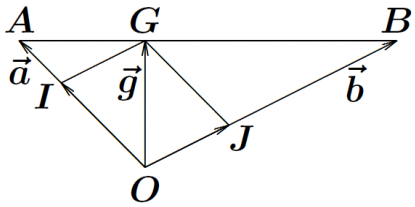
Következzen ezután a feladat másik megoldása, melyben a vektorok felbontását használjuk. Elsőként most is az $\vec{f}$ vektorral foglalkozunk.

Most is készítsünk ábrát, de ezen most ne tüntessük fel a harmadolópontokat és azok helyvektorait. Húzzunk viszont párhuzamost az F ponton keresztül az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal, mely párhuzamosok az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egyeneseit a C és D pontokban metszik. Az így keletkező $ODFC$ négyszög egy paralelogramma, melynek egyik átlója OF. A vektorösszeadás paralelogrammaszabálya szerint

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

Az ACF és FDB háromszögek hasonlóak az AOB háromszöghöz, és mivel F felezi az AB szakaszt, ezért mindegyikük esetén $\frac{1}{2}$ a hasonlóság aránya. Ebből következik, hogy a C pont felezi az OA szakaszt, a D pont pedig felezi az OB szakaszt. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a},$$



20. ábra.

valamint

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Ebből következik, hogy

$$\overrightarrow{OF} = \vec{f} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

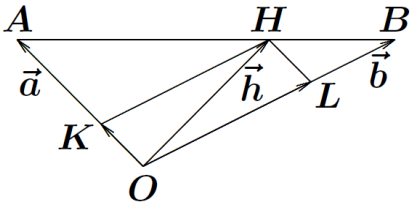
Ezután egy újabb ábrán tüntessük fel a G pontot és annak helyvektorát, s a G-n keresztül húzzunk párhuzamost az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal. Ezen párhuzamosok az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egyenesét az I és J pontokban metszik.

Az $OJGI$ négyszög nyilvánvalóan paralelogramma, s ebből következően

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}.$$

Az AIG és GJB háromszögek hasonlóak az AOB háromszöghöz, és mivel G az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja, ezért AIG esetén $\frac{1}{3}$, GJB esetén pedig $\frac{2}{3}$ a hasonlóság aránya. Ebből következően I az OA szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja, J pedig az OB szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja. Ez pedig azt jelenti

$$\overrightarrow{OI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\vec{a},$$



21. ábra.

valamint

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Ezeket felhasználva kapjuk:

$$\overrightarrow{OG} = \vec{g} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Készítsünk még egy utolsó ábrát, melyen tüntessük fel a H pontot és annak helyvektorát, s húzzunk párhuzamost a H ponton keresztül az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal. Ezen párhuzamosok az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egyenesét az K és L pontokban metszik.

Az $OLHK$ négyszög nyilvánvalóan paralelogramma, s ebből következően

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL}.$$

Immár indoklás nélkül kijelentjük, hogy

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{a},$$

valamint

$$\overrightarrow{OL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Ezeket felhasználva kapjuk:

$$\overrightarrow{OH} = \vec{h} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Ezzel tehát kétféle úton is kifejeztük egy szakasz felezéspontjába és harmadolópontjaiba mutató helyvektorokat, azaz a szakaszt $1:1$ arányban, $1:2$ arányban és $2:1$ arányban osztó pontokba mutató helyvektorokat.
A fentiekhez hasonló összefüggést lehet levezetni egy szakaszt valamilyen megadott $p:q$ arányban osztó pont helyvektorára is. A levezetés során mind a töröttvonalas módszer, mind a vektorfelbontás alkalmazható.

12-4. feladat: Egy $ABCD$ trapéz párhuzamos AB és CD oldalairól tudjuk, hogy AB kétszer olyan hosszú, mint CD. Fejezzük ki az A, B, C csúcsokba mutató $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok segítségével, a D csúcsba mutató $\vec{d}$ helyvektort, valamint az átlók M metszéspontjába mutató $\vec{m}$ helyvektort!

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a trapézról, melyen tüntessük fel a vektorokat is. A $\vec{d}$ vektor előállításához használjuk a töröttvonalas megközelítést. Helyettesítsük a $\vec{d}$ vektort az OCD irányított töröttvonallal, így azt kapjuk

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD},$$

azaz

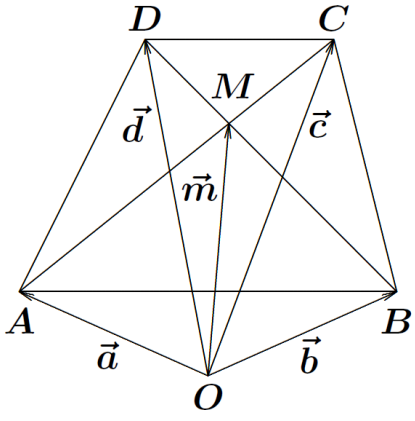
$$\vec{d} = \vec{c} + \overrightarrow{CD}.$$

Mivel tudjuk, hogy $\overrightarrow{CD}$ vektor párhuzamos és egyirányú a $\overrightarrow{BA}$ vektorral, csak fele olyan hosszú, ezért

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

A $\overrightarrow{BA}$ vektor esetén ismerjük mindkét végpontba mutató helyvektort, így $\overrightarrow{BA}$-t megkapjuk a két helyvektor különbségeként. A végpontba mutató helyvektorból kell kivonnunk a kezdőpontba mutató helyvektort, azaz

$$\overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{a}.$$



22. ábra.

Ennek következtében

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right),$$

majd pedig

$$\vec{d} = \vec{c} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Kifejeztük tehát a $\vec{d}$ vektort az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok segítségével. Következhet az $\vec{m}$ vektor. Jó lenne ismerni, hogy az M pont milyen arányban osztja az átlókat. Vegyük észre, hogy az ABM és CDM háromszögek hasonlók, s a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$. Ebből következően az M pont az átlók C-hez, illetve D-hez közelebbi harmadolópontja. Használjuk fel az előző feladatban szakasz harmadolópontjára kapott eredményünket. Az alábbit kapjuk:

$$\vec{m} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}.$$

Ezzel az $\vec{m}$ vektort is kifejeztük az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok segítségével, de amint az eredményen látható, a $\vec{b}$ vektorra nincs is szükségünk $\vec{m}$ előállításához.
Természetesen $\vec{m}$-et abból is kifejezhettük volna, hogy M harmadolja a BD szakaszt is.

12.2. Ellenőrző kérdések

Kvíz

1. Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát. Az AD oldal felezéspontját jelöljük E-vel, a $\overrightarrow{BC}$ oldalvektort $\vec{c}$-vel, a $\overrightarrow{BD}$ átlóvektort pedig $\vec{d}$-vel. Hogyan fejezhető ki a $\overrightarrow{BE}$ vektor a $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorokkal?

☐ $\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$ ☐ $\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d}$ ☐ $\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}$ ☐ $\frac{1}{2}\vec{d} - \vec{c}$

2. Az előző kérdésben szereplő paralelogramma AB oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontját jelöljük F-fel. Hogyan fejezhető ki az $\overrightarrow{FE}$ vektor a $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorokkal?

☐ $\frac{1}{6}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$ ☐ $\frac{1}{6}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{d}$ ☐ $\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{d}$ ☐ $\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{6}\vec{d}$

3. Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát. Az AB oldal felezéspontját jelöljük E-vel, az $\overrightarrow{EC}$ vektort $\vec{c}$-vel, az $\overrightarrow{ED}$ vektort pedig $\vec{d}$-vel. Hogyan fejezhető ki az $\overrightarrow{EA}$ vektor a $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorokkal? (A betűzés a szokásos, tehát AC és BD a paralelogramma átlói.)

☐ $-\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$ ☐ $\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$ ☐ $-\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$ ☐ $\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}$

4. Az előző kérdésben szereplő paralelogrammában hogyan fejezhető ki az $\overrightarrow{AC}$ vektor a $\vec{c}$ és $\vec{d}$ vektorokkal?

☐ $\frac{3}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$ ☐ $\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{d}$ ☐ $\frac{3}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}$ ☐ $\frac{1}{2}\vec{d} - \frac{3}{2}\vec{c}$

5. Jelölje az A pont helyvektorát $\vec{a}$, a B pont helyvektorát $\vec{b}$, az AB szakasz B-hez közelebbi negyedelőpontját, azaz az AB szakaszt $3:1$ arányban osztó pontot pedig C. Hogyan fejezhető ki az C pont helyvektora az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal?

☐ $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$ ☐ $\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$ ☐ $\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ ☐ $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

6. Egy $ABCD$ trapéz párhuzamos AB és CD oldalairól tudjuk, hogy CD kétszer olyan hosszú, mint AB. Hogyan fejezhető ki az A, B, C csúcsokba mutató $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorokkal, a D csúcsba mutató $\vec{d}$ helyvektor?

☐ $3\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ ☐ $3\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ ☐ $\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c}$ ☐ $\vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{c}$

Clear

13. lecke

Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

13. Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

13.1. Bevezető

Ha egy vektor jellemzésére megfelelő számokat is bevezetünk, akkor lehetőségünk nyílik arra, hogy a vektorokkal végzett műveleteket ne csak ábrázoljuk, hanem ezen számokkal is elvégezhessük. A vektort jellemző számokat nevezzük a vektor koordinátáinak. Ebben a leckében azt ismételjük át, hogy a koordinátákkal jellemzett vektorokkal hogyan végezhetjük el a különböző műveleteket.

13-1. definíció: Tekintsünk két, egy pontból kiinduló egymásra merőleges egységvektort, s jelölje ezeket: $\vec{i}$ és $\vec{j}$. Ekkor a sík bármely $\vec{v}$ vektora egyértelműen felbontható az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre, azaz felírható $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ alakban. A felbontásban szereplő v_1 és v_2 számokat a vektor koordinátátinak nevezzük, s ezen számokkal jellemezzük a vektort. A $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ vektoregyenlet felírása helyett a koordinátákat rövidebben a $\vec{v}(v_1;\, v_2)$ formában jelöljük.

13-2. definíció: Egy A pont koordinátáinak nevezzük az O pontból, azaz a koordinátarendszer origójából az A pontba mutató $\overrightarrow{OA}$ helyvektor koordinátáit. Jelölés: $A(a_1;\, a_2)$.

13-1. tétel: Az $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ és a $\vec{b}(b_1;\, b_2)$ vektorok összegének koordinátáit a megfelelő koordináták összegeként kapjuk, azaz

$$\vec{a} + \vec{b}(a_1 + b_1;\, a_2 + b_2),$$

ami egyenértékű az

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j}$$

vektoregyenlettel.

13-2. tétel: Az $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ és a $\vec{b}(b_1;\, b_2)$ vektorok különbségének koordinátáit a megfelelő koordináták különbségeként kapjuk, azaz

$$\vec{a} - \vec{b}(a_1 - b_1;\, a_2 - b_2),$$

ami ugyanazt jelenti, mint az

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j}$$

vektoregyenlet.

13-3. tétel: Az $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ vektorok λ-szorosának koordinátáit a megfelelő koordináták λ-szorosaként kapjuk, azaz

$$\lambda\vec{a}(\lambda a_1;\, \lambda a_2),$$

vagy

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{i} + \lambda a_2\vec{j}\ .$$

13-4. tétel: Az $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ vektor hosszát a koordináták négyzetösszegének gyökeként kapjuk, azaz:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

13-3. definíció: Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzatának nevezzük az

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

számot. Az α szög a két vektor által bezárt szöget jelenti, melyre $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ teljesül.

13-5. tétel: Az $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ és $\vec{b}(b_1;\, b_2)$ vektorok skaláris szorzatát a megfelelő koordináták szorzatának összegeként kapjuk, azaz:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

13-6. tétel: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor egyenlő 0-val, ha a vektorok merőlegesek.

13-1. feladat: Egy paralelogramma három csúcsa $A(-5;\, 2), B(1;\, -1)$ és $C(3;\, 4)$. Határozzuk meg az átlók metszéspontjának (M), és a negyedik csúcsnak (D) a koordinátáit, ha A és C egymással szemközt helyezkednek el!

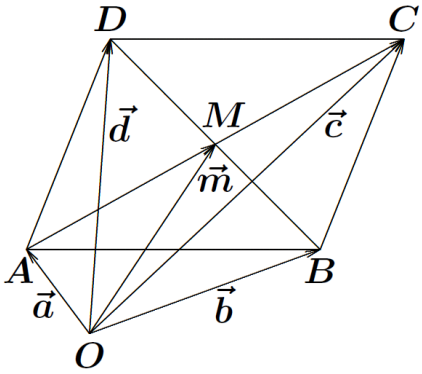
Megoldás: A feladatot kétféle módon is megoldjuk. Az első megoldsában abból indulunk ki, hogy egy pont koordinátái megegyeznek a pontba mutató helyvektor koordinátáival. Így ha előállítjuk vektorműveletekel ismert vektorokból az ismeretlen pontokba mutató helyvektorokat, akkor a koordinátékkal is ugyanaziokat a műveleteket kell elvégeznünk, mint a vektorokkal. Készítsünk egy ábrát a paralelogrammáról, melyen feltüntetjük az origót is.

Fejezzük ki először az M pont $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ helyvektorát ismert vektorok segítségével. Mivel isemrjük az A, B és C pontok koordinátáit, így ezek helyvektorait is ismerjük, így ezeket használhatjuk fel $\vec{m}$ kifejezéséhez. Az ábráról leolvashat, hogy az $\vec{m}$ vektor helyettesíthető az OAM irányított töröttvonallal, s ebből következően

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}.$$

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, így

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$



23. ábra.

Az előző leckében szerepelt, hogy két pont közötti vektort előállíthatjuk úgy, hogy a végpont helyvektorából kivonjuk a kezdőpont helyvektorát. Jelen esetben:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}.$$

Ez azt jelenti, hogy megkapjuk az $\overrightarrow{AC}$ vektor koordinátáit, ha a C pont koordinátáiból kivonjuk az A pont koordinátáit, azaz

$$\overrightarrow{AC}(c_1 - a_1;\, c_2 - a_2).$$

A konkrét adatokkal kapjuk: $\overrightarrow{AC}(8;\, 2)$.
Mivel vektor számszorosának koordinátáit úgy kapjuk, hogy a vektor koordinátáit szorzzuk a számmal, így az $\overrightarrow{AM}$ vektor koordinátái az $\overrightarrow{AC}$ vektor koordinátáinak felével lesznek egyenlők.
Eszerint tehát $\overrightarrow{AM}(4;\, 1)$.
Az $\vec{m}$ vektor koordinátáit pedig úgy számoljuk, hogy az $\overrightarrow{OA}$ vektor, tehát az A pont koordinátáihoz hozzáadjuk az $\overrightarrow{AM}$ vektor koordinátáit.

Így kapjuk: $\vec{m}(-1;\,3)$, s ezzel egyenlők az M pont koordinátái is, azaz $M(-1;\,3)$.
Ezután fejezzük ki a D pont $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ helyvektorát ismert vektorokkal. Az ábráról nyilvánvaló, hogy a $\vec{d}$ vektor helyettesíthető az OAD irányított töröttvonallal, s ebből következően

$$\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}.$$

Az ábráról az is nyilvánvaló, hogy az $\overrightarrow{AD}$ vektor megegyezik a $\overrightarrow{BC}$ vektorral.
A $\overrightarrow{BC}$ vektor koordinátáit megkapjuk, ha a végpont, azaz C koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont, azaz B koordinátáit.
Így kapjuk $\overrightarrow{BC}(2;\,5)$, ami azt jelenti $\overrightarrow{AD}(2;\,5)$.
Adjuk hozzá az $\overrightarrow{OA}$ vektor, tehát az A pont koordinátáihoz az $\overrightarrow{AD}$ vektor koordinátáit, így előállítjuk $\vec{d}$ koordinátáit.
Az eredmény: $\vec{d}(-3;\,7)$.
Ezzel egyenlők a D pont koordináti is, azaz $D(-3;\,7)$.
Következzen ezután a feladat második megoldása. Ebben használjuk fel az előző leckéből azt, hogy az AB szakasz F felezéspontjának helyvektorát kifejeztük a végpontok helyvektoraival oly módon, hogy

$$\vec{f} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Mivel vektorok számmal szorzásakor a koordinátákat szorozzuk a számmal, összeadáskor pedig a megfelelő koordinátákat összeadjuk, így ebből következik, hogy a felezéspont helyvektorának, s így magának a felezéspontnak a koordinátáira az alábbi igaz:

$$f_1 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1, \quad f_2 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_2.$$

Ezt úgy is mondhatjuk, hogy felezéspont koordináti megegyeznek a végpontok koordinátáinak számtani közepével.
Mivel az M pont felezi az AC szakaszt, ezért

$$m_1 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}c_1, \quad m_2 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}c_2.$$

Behelyettesítve az A és C pont koordinátáit azt kapjuk $M(-1;\,3)$.
Az M pont azonban a másik átlól, azaz BD-t is felezi, amiből az következik

$$m_1 = \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}d_1, \quad m_2 = \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}d_2.$$

Ezekben az egyenletekben most d_1 és d_2 az ismeretlenek, így ezeket fejezzük ki belőlük.

$$d_1 = 2m_1 - b_1, \quad d_2 = 2m_2 - b_2.$$

Behelyettesítve M és B koordinátáit kapjuk: $D(-3;\,7)$.

13-2. feladat: Adott egy háromszög egyik csúcsa $A(2;\,-1)$, az AB oldal felezéspontja $F(4;\,3)$, és a háromszög súlypontja $S(5;\,5)$. Határozzuk meg a két ismeretlen csúcs koordinátáit!

Megoldás: Ezt a feladatot is kétféle módon oldjuk meg. Az első megoldáshoz készítsünk egy ábrát, melyen tüntessük fel az origót is.

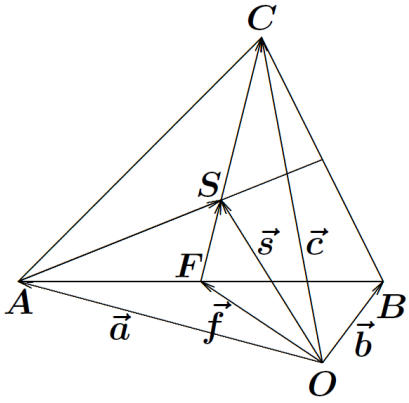
Az ábráról leolvasható, hogy az ismeretlen B csúcs helyvektora helyettesíthető az OAB irányított töröttvonallal, s ebből következően

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

Az is nyilvánvaló, hogy $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$, s ebből

$$\vec{b} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AF}.$$

Az $\overrightarrow{AF}$ vektor koordinátáit elő tudjuk állítani, hiszen ismert a vektor kezdő és végpontjának helyvektora.
Vonjuk ki a végpont koordinátáiból a kezdőpont koordinátáit, s kapjuk $\overrightarrow{AF}(2;\,4)$.
Adjuk hozzá $\overrightarrow{AF}$ koordinátáinak kétszeresét az A pont koordinátáihoz, s megkapjuk a B pont koordinátáit.
Az eredmény az következő: $B(6;\,7)$.



24. ábra.

Az ábráról az is leolvasható, hogy a C csúcs helyvektora helyettesíthető az OFC irányított töröttvonallal, s ebből következően

$$\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB}.$$

Mivel a súlypont az FC súlyvonal F-hez közelebbi harmadolópontja, ezért $\overrightarrow{FC} = 3\overrightarrow{FS}$, amiből

$$\vec{c} = \overrightarrow{OF} + 3\overrightarrow{FS}.$$

Az $\overrightarrow{AF}$ vektor koordinátáit előállíthatók, hiszen ismert a vektor kezdő és végpontjának helyvektora. Vonjuk ki a végpont koordinátáiból a kezdőpont koordinátáit, így kapjuk $\overrightarrow{FS}(1;\ 2)$.
Adjuk hozzá $\overrightarrow{FS}$ vektor koordinátáinak háromszorosát az F pont koordinátáihoz, s megkapjuk a C pont koordinátáit.
A következő az eredény: $C(7;\ 9)$.
A második megoldásban használjuk fel a szakasz felezéspontjának koordinátáira vonatkozó, korábban már

használt összefüggést. Eszerint a felezéspont koordinátái egyenlőek végpontok koordinátáinak számtani közepével. Mivel F felezi az AB szakaszt, ebből következően

$$f_1 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1, \quad f_2 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_2.$$

Most a B pont koordinátái az ismeretlenek, így ezekre rendezzük az egyenleteket.

$$b_1 = 2f_1 - a_1, \quad b_2 = 2f_2 - a_2.$$

Behelyettesítve F és A koordinátáit kapjuk: $B(6;\,7)$.
A C pont koordinátinak meghatározásánal abból indulunk ki, hogy S az FS szakasz F-hez közelebbi harmadolópontja. Az előző leckében szerepelt, hogy ha egy AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontja G, akkor G helyvektora az alábbi módon fejezhető ki a végpontok helyvektoraival:

$$\vec{g} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Ebből a pontok koordinátáira a következőt írhatjuk fel:

$$g_1 = \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}b_1, \quad g_2 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}b_2.$$

Ha most ezt az F, S és C pontokra alkalmazzuk, akkor az

$$s_1 = \frac{2}{3}f_1 + \frac{1}{3}c_1, \quad s_2 = \frac{2}{3}f_2 + \frac{1}{3}c_2$$

egyenleteket kapjuk. Fejezzük ki ezekből az ismeretlen C pont koordinátáit.

$$c_1 = 3s_1 - 2f_1, \quad c_2 = 3s_2 - 2f_2.$$

Az S és F pontok koordinátáit behelyettesítve $C(7;\,9)$ az eredmény. Megjegyzés: Amint a megoldásokból látható, ismeretlen pont koordinátit sokszor többféle úton is meghatározhatjuk. Egyik lehetőség, hogy a pont

helyvektorát ismert vektorokból előállítjuk, s vektorok koordinátáival elvégezzük a műveletket. Ha azonban az ismeretlen pont és két ismert pont úgy helyezkedik el egy egyenesen, hogy egyik felezi, vagy harmadolja a másik kettő által meghatározott szakaszt, akkor használhatjuk a felezéspont, illetve a harmadolópont koordinátátira vonatkozó összefüggéseket.

13-3. feladat: Döntsük el egy egyenesre illeszkedik-e az alábbi három pont:

$$A(-4;\,1), B(-1;\,3), C(5;\,9)!$$

Adjuk meg azon D pont második koordinátáját, melynek első koordinátája 2, és illeszkedik a A és B pontok által meghatározott egyenesre!

Megoldás: Ha az A, B és C pontok egy egyenesre illeszkednek, akkor az $\overrightarrow{AB}$ vektor párhuzamos $\overrightarrow{AC}$ vektorral. Két nem zérus vektor akkor és csak akkor párhuzamos egymással, ha egymás számszorosai, ez pedig azt jelenti, hogy a megfelelő koordináták hányadosa megegyezik. Határozzuk meg tehát a két vektor koordinátáit, és vizsgáljuk meg a megfelelő koordináták hányadosát, hogy megegyeznek-e. A vektorok koordinátáit úgy kapjuk, hogy a végpont koordinátáiból vonjuk a kezdőpont koordinátáit:
$\overrightarrow{AB}(3;\,2)$, $\overrightarrow{AC}(9;\,8)$.
Látható, hogy az első koordináták hányadosa $\frac{9}{3} = 3$, ami nem egyezik meg a második koordináták hányadosával, hiszen az $\frac{8}{2} = 4$. Ennek következtében kijelenthetjük, hogy a három pont nem illeszkedik egy egyenesre.
Nézzük ezután a feladat második részét. Mivel A, B és D egy egyenesen vannak, ezért $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ egymás számszorosai. Legyen D második koordinátája d_2, akkor $\overrightarrow{AD}(6;\,d_2-1)$. A két vektor megfelelő koordinátáinak hányadosa meg kell egyezzen, így az alábbi egyenletnek kell teljesülni.

$$\frac{6}{3} = \frac{d_2 - 1}{2}$$

Ebből kapjuk, hogy $d_2 = 5$, azaz a pont koordinátái $D(2;\,5)$.

13-4. feladat: Határozzuk meg a $\vec{v}(-3;\,4)$ vektorral ellentétes irányú egységvektor koordinátáit!

Megoldás: Jelöljük a keresett vektort $-\vec{e_v}$-vel!
Első lépésként határozzuk meg a $\vec{v}$ vektor hosszát.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

Egy 5 egység hosszúságú vektorból úgy kaphatunk vele megegyező irányú egységnyi hosszúságú vektort, hogy a vektort $\frac{1}{5}$-del megszorozzuk. Általánosságban azt mondhatnánk, hogy ha egy vektort a hosszának reciprokával szorzunk meg, akkor a vektorral megegyező irányú egységvektort kapunk. Mivel most ellentétes irányú egységvektort kell előállítanunk, így ennek még a -1-szeresét kell vennünk, tehát a $\vec{v}$ vektort $-\frac{1}{5}$-del kell megszorozzuk, azaz $-\vec{e_v} = -\frac{1}{5}\vec{v}$. Ennek koordinátái:

$$-\vec{e_v}\left(\frac{3}{5};\,-\frac{4}{5}\right).$$

13-5. feladat: Mik a P pont koordinátái, ha az origótól 7 egységnyire helyezkedik el, az origó és a $Q(12;\,5)$ pont között, az általuk meghatározott egyenesen? A keresett pont helyvektora az $\overrightarrow{OQ}$ vektorral megegyező irányú, 7 egység hosszúságú vektor lesz. Ezt úgy állíthatjuk elő, hogy először vesszük az $\overrightarrow{OQ}$-val megegyező irányú egységvektort, majd azt megszorozzuk 7-tel. Az előző feladatban szerepelt, hogy egy vektorból úgy kapunk vele megegyező irányú egységvektort, ha megszorzzuk hosszának reciprokával. Ezek alapján a P pont helyvektorára az alábbit írhatjuk fel:

$$\overrightarrow{OP} = 7\frac{1}{\left|\overrightarrow{OQ}\right|}\overrightarrow{OQ} = \frac{7}{\sqrt{12^2+5^2}}\overrightarrow{OQ} = \frac{7}{13}\overrightarrow{OQ}.$$

Mivel egy pont koordinátái egyenlők a pontba mutató helyvektor koordinátáival, ezért az $\overrightarrow{OP}$ vektor koordinátái egyben a P pont koordinátái is. Behelyettesítve az adatokat kapjuk:

$$P\left(\frac{84}{13};\,\frac{35}{13}\right).$$

Megoldás:

13-6. feladat: Adott az $\vec{a}(5;\,2)$ és $\vec{b}(-3;\,1)$ vektor. Számoljuk ki az $\vec{a}\cdot\vec{b}$ skaláris szozatot, és határozzuk meg mekkora szöget zár be a két vektor!

Megoldás: A skaláris szorzatot megkapjuk, ha a vektorok megfelelő koordinátáit szorozzuk, és a szorzatokat összeadjuk. Írjuk fel azt képlettel, és egyből helyettesítsünk be.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = 5\cdot(-3) + 2\cdot 1 = -13$$

A vektorok szögének meghatérozásához induljunk ki a skaláris szorzat definíciójából.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Fejezzük ki ebből a vektorok szögének koszinuszát.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

A két vektor skaláris szorzatát már meghatároztuk, ha kiszámoljuk a két vektor hosszát is, akkor mindent ismerni fogunk az egyenlet jobb oldalán, s így a vektorok szögének koszinuszát meghatározhatjuk.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Térjünk vissza a szög koszinuszához, és helyettesítsük be a részeredményeket.

$$\cos\alpha = \frac{-13}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{10}} \approx -0{,}7634$$

Végül a szög koszinuszából keressük vissza a két vektor szögét.

$$\alpha \approx 139.76^\circ$$

Amint látható egy tompaszöget kaptunk eredményül. Ez nem meglepő, hiszen a két vektor skaláris szorzata negatív volt, és tudjuk azt, hogy a tompaszögek koszinusza negatív. Ha a skaláris szorzat pozitív lett volna, akkor hegyesszöget zárt volna be a két vektor, hiszen a hegyesszögek koszinusza pozitív. Ezért a skaláris szorzat pozitív vagy negatív előjeléből rögtön láthatjuk, hogy két vektor hegyesszöget, vagy tompaszöget zár be egymással.

13-7. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha felcseréljük egy vektor két koordinátáját, és az egyik előjelét megváltoztatjuk, akkor az eredeti vektorra merőleges vektort kapunk!

Megoldás: Tekintsük az $\vec{a}(a_1;\, a_2)$ vektort. Cseréljük fel a két koordinátát és változtassuk meg az egyik előjelét, így a $\vec{b}(a_2;\, -a_1)$ vagy $\vec{c}(-a_2;\, a_1)$ vektort kapjuk. Ez a két vektor egymás ellentetje így párhuzamosak egymással. Ha az egyik merőleges az $\vec{a}$ vektorra, akkor nyilvánvaló, hogy a másik is merőleges $\vec{a}$-ra, ezért elég csak egyiket vizsgálnunk. Legyen ez $\vec{b}$.
Tudjuk, hogy két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szozatuk 0, ezért határozzuk meg a két vektor skaláris szorzatát.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 a_2 + a_2\,(-a_1) = 0$$

Amint látható, a skaláris szorzat valóban 0-val egyenlő, függetlenül az $\vec{a}$ vektor koordinátáinak értékétől. Tehát valóban igaz, hogy ha egy vektor koordinátit felcseréljük, és az egyik előjelét megváltoztajuk, akkor az ereditre merőleges vektort kapunk.

13-8. feladat: Adott az $\vec{a}(2;\, 7)$ vektor. A rá merőleges $\vec{b}$ vektorról tudjuk, hogy két koordinátájának különbsége 5. Határozzuk meg $\vec{b}$ koordinátáit!

Megoldás: Mivel nem tudjuk, hogy a $\vec{b}$ vektor melyik koordinátája a nagyobb ezért két esetre kell bontanunk a megoldást. Elsőként foglalkozunk azzal, ha az első koordináta nagyobb. Ha az első koordinátát x-szel jelöljük, akkor a második koordináta $x-5$ lesz, tehát $\vec{b}(x;\, x-5)$. Mivel a vektorok merőlegesek, így skaláris szorzatuk 0. Ezt felírva a következő egyenletet kapjuk,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2x + 7(x-5) = 0$$

amit megoldva $x = \dfrac{35}{9}$.
Ebből pedig a keresett vektor $\vec{b}\left(\dfrac{35}{9};\, -\dfrac{10}{9}\right)$.

Következzen a második eset, amikor az első koordináta a kisebb. Jelöljük az első koordinátát most is x-szel, ekkor a második koordináta $x+5$, tehát $\vec{b}(x;\ x+5)$. Írjuk fel most is azt, hogy vektorok merőlegessége miatt 0 a skaláris szorzat.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2x + 7(x+5) = 0$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $x = -\dfrac{35}{9}$.

Így a keresett vektor $\vec{b}\left(-\dfrac{35}{9};\ \dfrac{10}{9}\right)$.

Amint látható a feladatnak két megoldása van, melyek egymás -1-szeresei.

13-9. feladat: Egy háromszög csúcsai $A(3;\ 5)$, $B(7;\ -2)$ és $C(-6;\ 1)$. Határozzuk meg a háromszög legnagyobb szögét!

Megoldás: Mivel a háromszögnek csak a legnagyobb szöge a kérdés, ezért jó lenne eldönteni, melyik csúcsnál található ez, különben mindhárom szöget meg kell határoznunk, s kiválasztani közülük a legnyagyobbat. Tudjuk, hogy háromszögben nagyobb oldalla szemben nagyobb szög van, így a legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemben található. Számoljuk ki ezért az oldalak hosszát. Ehhez határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok koordinátáit, majd pedig a vektorok hosszát, hiszen ezek egyben az oldalak hosszát is megadják. A vektorok koordinátáit szokás szerint úgy kapjuk, hogy a végpont koordinátáiból vonjuk a kezdőpont koordinátáit.

$$\overrightarrow{AB}(4;\ -7),\quad \overrightarrow{AC}(-9;\ -4),\quad \overrightarrow{BC}(-13;\ 3)$$

Következzen a vektorok hossza.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2+(-7)^2} = \sqrt{65}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-9)^2+(-4)^2} = \sqrt{97}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-13)^2+3^2} = \sqrt{178}$$

Amint látható, a BC oldal a leghosszabb, tehát az A csúcsnál található α a legnagyobb szög. Ez a szög tulajdonképpen az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok szöge, így a problémát visszavezettük két vektor szögének meghatározására. Amint egy korábbi feladatban, most is a skaláris szorzat definíciójából fejezzük ki a keresett szög koszinuszát.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

A két vektor hosszát már ismerjük, még a skaláris szorzatukat kell kiszámolnunk.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot(-9)+(-7)\cdot(-4) = -8$$

Majd térjünk vissza a szög koszinuszához.

$$\cos\alpha = \frac{-8}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{97}} \approx -0.1008$$

Ebből visszakeresve kapjuk: $\alpha \approx 95.78°$.

13-10. feladat: Bontsuk fel a $\vec{v}(18;\,-1)$ vektort az $\vec{a}(-2;\,5)$ és $\vec{v}(6;\,7)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

Megoldás: Az összetevőkre bontás azt jeleti, hogy a $\vec{v}$ vektort két olyan vektor összegeként állítjuk elő, melyek közül az egyik $\vec{a}$-val, a másik pedig $\vec{b}$-vel párhuzamos. Az $\vec{a}$-val párhuzamos összetevő valamilyen α-szorosa lesz az $\vec{a}$ vektornak, a $\vec{b}$-vel párhuzamos összetevő pedig a $\vec{b}$-nek lesz valamilyen β-szorosa. Ezek alapján a következő vektoregyenletet írhatjuk.

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

Ebből a vektoregyenletből egy egyenletrendszert kapunk, hiszen a vektorok megfelelő koordinátáira ugyanilyen egyenletek igazak.

$$\begin{array}{rcccl} v_1 & = & \alpha a_1 & + & \beta b_1 \\ v_2 & = & \alpha a_2 & + & \beta b_2 \end{array}$$

Helyettesítsük be a vektorok koordinátáit.

$$\begin{array}{rcrcr} 18 & = & -2\alpha & + & 6\beta \\ -1 & = & 5\alpha & + & 7\beta \end{array}$$

Fejezzük ki az első egyenletből α-t.

$$\alpha = 3\beta - 9$$

Helyettesítsük ezt a második egyenletbe.

$$-1 = 5(3\beta - 9) + 7\beta = 22\beta - 45$$

Ebből $\beta = 2$ adódik, amit az első egyenletbe helyettesítünk.

$$18 = -2\alpha + 6 \cdot 2$$

Az egyenletből kapjuk: $\alpha = -3$.
A $\vec{v}$ vektor tehát az alábbi módon bontható fel $\vec{a}$-val és $\vec{b}$-vel práhuzamos összetvőkre:

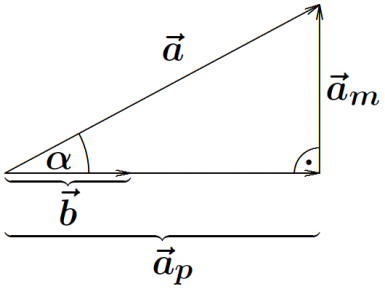
$$\vec{v} = -3\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Az összetevők koordinátái pedig:

$$-3\vec{a}(6;\ -15), \quad 2\vec{b}(12;\ 14).$$

13-11. feladat: Bontsuk fel az $\vec{a}(5;\ 10)$ vektort a $\vec{b}(2;\ 1)$ vektorral párhuzamos, és merőleges összetevőkre!

Megoldás: Az összetevőkre bontás azt jelenti, hogy az $\vec{a}$ vektort két olyan vektor összegeként kell felírnunk, melyek közül az egyik párhuzamos a $\vec{b}$ vektorral, a másik pedig merőleges a $\vec{b}$ vektorra. Jelöljük a két összetevőt $\vec{a}_p$-vel, illetve $\vec{a}_m$-mel. Mielőtt a konkrét adatokkal számolnánk, azelőtt vezessük le általánosan,



25. ábra.

hogy miként lehet meghatározni ilyen esetben az összetevőket. Készítsünk ábrát az $\vec{a}$ felbontásáról. Sajnos két esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt α szög hegyes vagy tompa. Elsőként foglalkozzunk a hegyesszögű esettel.

Próbálkozzunk a párhuzamos összetevő előállításával, mert az a $\vec{b}$ vektor valamilyen számszorosa kell, hogy legyen. Azt kell csak meghatároznunk, milyen számmal kell szorozni a $\vec{b}$ vektort. Az ábrán látható derékszögű háromszögből kifejezhetjük a párhuzamos összetvő hosszát.

$$|\vec{a}_p| = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$$

A skaláris szorzat definíciója szerint

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha,$$

amiből kifejezhetjük az előző egyenlet jobb oldalán álló szorzatot.

$$|\vec{a}| \cdot \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Eszerint tehát a párhuzamos összetevő hossza felírható az alábbi módon is:

$$|\vec{a}_p| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}.$$

Magát a párhuzamos összetevő vektort úgy kaphatjuk meg, ha ezzel a hosszal megszorzunk egy olyan egységvektort, mely egyirányú a párhuzamos összetevővel. Mivel ebben az esetben a $\vec{a}_p$ és $\vec{b}$ egyirányúak, ha előállítjuk a $\vec{b}$ vektoral megegyező irányú egységvektort, azaz $\vec{e}_b$-t, akkor az megfelelő lesz. Korábbi feladatban szerepelt, hogy ehhez a $\vec{b}$ vekort a hosszának reciprokával kell szoroznunk.

$$\vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$

Ezután a párhuzamos összetevőt is megkapjuk.

$$\vec{a}_p = |\vec{a}_p| \cdot \vec{e}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} \cdot \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$$

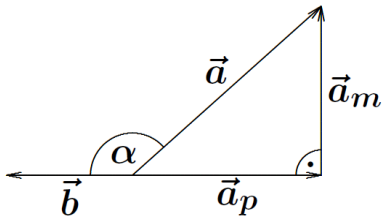
Ezzel kaptunk egy képletet arra, hogyan határozhatjuk meg az $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ vektorral párhuzamos összetevőjét. Kérdés azonban, hogy ugyanígy számolhatunk-e akkor is, ha a két vektor tompaszöget zár be. Készítsünk erről is egy ábrát.

A párhuzamos összetevő hosszára most az alábbit írhatjuk fel.

$$|\vec{a}_p| = |\vec{a}| \cdot \cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha.$$

Amint az előbb is, ezt kifejezhetjük a skaláris szorzat definíciójából.

$$|\vec{a}_p| = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$$



26. ábra.

Mivel most $\vec{a}_p$ és $\vec{b}$ ellentétes irányúak, ezért a $\vec{b}$-vel ellentétes irányú egységvektort kell megszoroznunk ezzel a hosszal, hogy megkapjuk a párhuzamos összetevő vektort.

$$\vec{a}_p = |\vec{a}_p| \cdot (-\vec{e}_b) = \left(-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right) \cdot \left(-\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}$$

Amint látható, ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az előbb, képletünk mindkét esetben használható.
A párhuzamos összetevő ismeretében a merőleges összetevő már könnyen meghatározható, hiszen

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_m,$$

amiből a merőleges összetevő kifejezhető.
Ezután alkalmazzuk levezetésünk eredményét a két megadott vektor esetében. Határozzuk mega két vektor skaláris szorzatát.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot 2 + 10\cdot 1 = 20$$

Számoljuk ki a $\vec{b}$ vektor hosszát.

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

A részeredményket helyettesítsük a párhuzamos összetevő képletébe.

$$\vec{a}_p = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\vec{b} = \frac{20}{(\sqrt{5})^2}\cdot\vec{b} = 4\vec{b}$$

Ebből a párhuzamos összetevő koordinátái $\vec{a}_p(8;\,4)$. Már csak a merőleges összetevőt kell számolnunk, melyet az alábbi módon kapunk.

$$\vec{a}_m = \vec{a} - \vec{a}_p$$

Ebből a merőleges összetevő koordinátái $\vec{a}_m(-3;\,6)$.
Megjegyzés: Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a kapott $\vec{a}_m$ vektor valóban merőleges a $\vec{b}$ vektorra, csak a skaláris szorzatukat kell kiszámolnuk. Ez természetesen 0 lesz, s ebből következően valóban merőleges a két vektor.

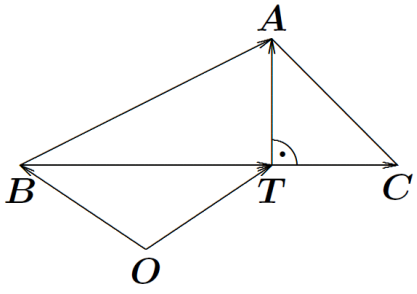
13-12. feladat: Határozzuk meg az $A(3;\,-1)$, $B(-5;\,-2)$, $C(4;\,4)$ háromszögben az A csúcshoz tartozó magasság T talppontjának koordinátáit, és a magasság hosszát!

Megoldás: Készítsünk egy ábrát a háromszögről, melyen feltüntetjük az origót is.

Az ábrán jól látható, hogy a T pont helyvektora helyettesíthető az OBT irányított töröttvonallal, amiből következik

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}.$$

Ha sikerül előállítanunk a $\overrightarrow{BT}$ vektort, akkor megkapjuk T koordinátáit, ha a B pont koordinátáihoz hozzáadjuk ezen $\overrightarrow{BT}$ vektor koordinátáit.
Az ábráról azonban az is leolvasható, hogy a $\overrightarrow{BT}$ vektor nem más, mint a $\overrightarrow{BA}$ vektor $\overrightarrow{BC}$ vektorral párhuzamos összetevője, valamint a $\overrightarrow{TA}$ vektor a $\overrightarrow{BA}$ vektor $\overrightarrow{BC}$ vektorra merőleges összetevője. Lényegében tehát annyit kell tennünk, hogy a $\overrightarrow{BA}$ vektort fel kell bontanunk $\overrightarrow{BC}$ vektorral párhuzamos és merőleges összetevőkre.



27. ábra.

Az előző feladatban szerepelt, hogy ha az $\vec{a}$ vektort felbontjuk $\vec{b}$ vektorral párhuzamos és merőleges összetevőkre, akkor a párhuzamos összetevő képlete:

$$\vec{a}_p = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \cdot \vec{b}.$$

Helyettesítsük most be ebbe a háromszögből a megfelelő vektorokat.

$$\overrightarrow{BT} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

A feladat megoldásának menete ezzel megvan, már csak a számolást kell végrehajtanunk. Elsőként határozzuk meg a $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok koordinátáit.

$$\overrightarrow{BA}(8;\ 1), \quad \overrightarrow{BC}(9;\ 6)$$

Vegyük a két vektor skaláris szorzatát.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 8 \cdot 9 + 1 \cdot 6 = 78$$

Számoljuk ki $\overrightarrow{BC}$ hosszát.

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117}$$

Határozzuk meg hányszorasa a $\overrightarrow{BT}$ vektor a $\overrightarrow{BC}$ vektornak.

$$\overrightarrow{BT} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|^2} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{78}{(\sqrt{117})^2} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$$

Ebből következően $\overrightarrow{BT}(6;\ 4)$.
Adjuk hozzá $\overrightarrow{BT}$ koordinátáit a B pont koordinátáihoz, a kapjuk $\overrightarrow{OT}(1;\ 2)$, azaz $T(1;\ 2)$.
Még a magasság hosszát kell kiszámolnunk. Ez egynlő a $\overrightarrow{TA}$ hosszával. Mivel

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TA},$$

az egyenlet rendezése után

$$\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BT}.$$

Ebből a vektor koordinátái $\overrightarrow{TA}(2;\ -3)$. Számoljuk ki a hosszát.

$$\left|\overrightarrow{TA}\right| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

Az A csúcshoz tartozó magasság tehát $\sqrt{13}$ hosszúságú.

13.2. Ellenőrző kérdések

Kvíz

1. Egy paralelogramma egyik csúcsa $A(2;\ -1)$, átlóinak metszéspontja $M(6;\ 5)$. Mik az A-val szemközti C csúcs koordinátái?

☐ $(-2;\ -7)$ ☐ $(0;\ -4)$ ☐ $(4;\ 2)$ ☐ $(10;\ 11)$

2. Egy háromszög egyik csúcsa $A(-2;\ 5)$, súlypontja $S(4;\ 1)$. Mik a BC oldal F felezéspontjának koordinátái?

☐ $(-4;\ 8)$ ☐ $(0;\ 2)$ ☐ $(7;\ 1)$ ☐ $(10;\ -4)$

3. Adott két pont $A(7;\ -3)$ és $B(10;\ 0)$. Mi a C pont második koordinátája, ha illeszkedik az A és B pontok által meghatározott egyenesre, és első koordinátája -2?

☐ -12 ☐ -10 ☐ -6 ☐ -4

4. Mik a koordinátái a $\vec{v}(5;\ -12)$ vektorral ellentétes irányú egységvektornak?

☐ $\left(-\frac{12}{13};\ \frac{5}{13}\right)$ ☐ $\left(-\frac{5}{13};\ \frac{12}{13}\right)$ ☐ $\left(\frac{5}{13};\ -\frac{12}{13}\right)$ ☐ $\left(\frac{12}{13};\ -\frac{5}{13}\right)$

5. Mik az A pont koordinátái, ha az origótól 2 egységnyire helyezkedik el, az origó és a $B(-3;\ 4)$ pont között, az általuk meghatározott egyenesen?

☐ $\left(-\frac{9}{5};\ \frac{12}{5}\right)$ ☐ $\left(-\frac{6}{5};\ \frac{8}{5}\right)$ ☐ $\left(\frac{9}{5};\ -\frac{12}{5}\right)$ ☐ $\left(\frac{6}{5};\ -\frac{8}{5}\right)$

6. Mekkora szöget zár be az $\vec{a}(7;\ -5)$ és $\vec{b}(12;\ 2)$ vektor?

☐ $30°$ ☐ $45°$ ☐ $60°$ ☐ $120°$

7. Adott az $\vec{a}(8;\ 3)$ vektor. Mi a $\vec{b}$ vektor első koordinátája, ha merőleges az $\vec{a}$ vektrorra, és második koordinátája -4?

☐ -6 ☐ 6 ☐ -1.5 ☐ 1.5

8. Mit kapunk, ha a $\vec{v}(-9;\ -7)$ vektort felbontjuk az $\vec{a}(-3;\ 2)$ és $\vec{b}(-1;\ 5)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre?

☐ $\vec{v} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$ ☐ $\vec{v} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$ ☐ $\vec{v} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ ☐ $\vec{v} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$

9. Az $\vec{a}(13;\ 1)$ vektort felbontjuk a $\vec{b}(-9;\ 15)$ vektorral párhuzamos, és merőleges összetevőkre. Mik a

párhuzamos összetevő koordinátái?

☐ $(-6;\ 10)$ ☐ $(-3;\ 5)$ ☐ $(3;\ -5)$ ☐ $(6;\ -10)$

10. Mik az $A(9;\ 7)$, $B(11;\ 13)$, $C(1;\ 15)$ háromszögben a B csúcshoz tartozó magasság talppontjának koordinátái?

☐ $(4;\ 12)$ ☐ $(5;\ 11)$ ☐ $(6;\ 10)$ ☐ $(7;\ 9)$

Clear