Példatár
Lineáris algebra és többváltozós függvények

Simonné Szabó Klára

2012. február 24.

Tartalomjegyzék

1. Integrálszámítás 2

1.1. Racionális törtek integrálása

1.1.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{4}{2-3x}dx =$

   Megoldás: Az integrandus egy valódi racionális tört, mert a számlálóban alacsonyabb fokszámú polinom van, mint a nevezőben. Ha a számláló konstans, a nevező pedig elsőfokú, akkor mindig ki kell alakítani a számlálóban a nevező deriváltját, azaz

   $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

   integrálási szabályt kell alkalmazni:

   $$f(x) = 2-3x \qquad \text{és} \qquad f'(x) = -3$$

   $$\int \frac{4}{2-3x}dx = 4\int \frac{1}{2-3x}dx = \frac{4}{-3}\int \frac{-3}{2-3x}dx = -\frac{4}{3}\ln|2-3x| + c$$

2. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{7}{(x-5)^3}dx =$

   Megoldás: Mivel $x-5$ egy lineáris kifejezés és $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$ hatványfüggvény, azaz létezik primitív függvénye, ezért alkalmazzuk a

   $$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$$

   integrálási szabályt.

   Most

   $$ax+b = x-5 \qquad a = 1$$

   $$\int \frac{7}{(x-5)^3}dx = 7\int (x-5)^{-3}dx = 7\frac{(x-5)^{-2}}{-2\cdot 1} + c = -\frac{7}{2(x-5)^2} + c$$

   Megjegyzés: Ilyen típusú feladatokra kimondható a következő integrálási szabály:

   $$\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx = \int (ax+b)^{-n}dx = \frac{(ax+b)^{-n+1}}{(-n+1)\cdot a} + c \qquad n \neq -1$$

3. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{5}{9+4x^2}dx =$

   Megoldás: A számlálóban egy konstans van, a nevezőben lévő másodfokú kifejezésnek pedig nincs valós gyöke ($9+4x^2 \geq 9$, ha $x \in \mathbf{R}$), azaz a nevező nem bontható fel elsőfokú tényezők szorzatára. Ebben az esetben az integrandust $\frac{1}{1+(ax+b)^2}$ alakúra kell hozni!

Mert
$$\int \frac{1}{1+(ax+b)^2}dx = \frac{\text{arctg }(ax+b)}{a} + c$$

Kiemelésekkel alakítsuk ki az egyeseket a számlálóban és nevezőben is.

$$\int \frac{5}{9+4x^2}dx = 5\int \frac{1}{9+4x^2}dx = \frac{5}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{5}{9}\frac{\text{arctg }(\frac{2x}{3})}{\frac{2}{3}} + c = \frac{5}{6}\text{arctg }\left(\frac{2x}{3}\right) + c$$

4. **Feladat:** $\int \frac{2}{7+5x^2}dx =$

Megoldás: Az integrandust $\frac{1}{1+(ax+b)^2}$ alakúra kell hozni!

$$\int \frac{2}{7+5x^2}dx = \frac{2}{7}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right)^2}dx = \frac{2}{7}\frac{\text{arctg }\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right)}{\sqrt{\frac{5}{7}}} + c =$$

$$= \frac{2}{7}\text{arctg }\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right)\sqrt{\frac{7}{5}} + c = \frac{2}{\sqrt{35}}\text{arctg }\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right) + c$$

5. **Feladat:** $\int \frac{x}{1+x^2}dx =$

Megoldás: A számláló egy elsőfokú polinom, a nevező pedig egy tovább már nem bontható másodfokú, mivel $x^2+1 \geq 1$ ha $x \in \mathbf{R}$. Ilyen esetben az az első lépés, hogy megpróbáljuk kialakítani a számlálóban a nevező deriváltját.

A nevező deriváltja:
$$(1+x^2)' = 2x$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

Az abszolútérték elhagyható, mivel $1+x^2 > 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

6. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{x+1}{1+x^2}dx =$

   Megoldás: A nevező egy tovább már nem bontható másodfokú, a számláló pedig elsőfokú polinom. Alakítsuk ki a számlálóban a nevező deriváltját, azaz $2x$-t.

$$\int \frac{x+1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{1+x^2}dx =$$

   Ekkor az integrandust két olyan tört összegére kell bontani, amelyek egyikében a számláló a nevező deriváltja, a másik számlálója pedig konstans :

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \operatorname{arctg} x + c$$

7. **Feladat:** Írjuk fel parciális törtek összegeként az alábbi racionális törtet:

$$\frac{1}{x(x+2)} =$$

   Megoldás: A nevező elsőfokú tényezők szorzataként van felírva, ekkor a parciális törteket a következő alakban kell keresni:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

   Határozzuk meg A és B értékét.

   Első lépésben hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}$$

   A nevezők egyenlősége miatt a számlálóknak is meg kell egyezniük:

$$A(x+2) + Bx = 1$$

   Rendezzük a jobboldali polinomot:

$$(A+B)x + 2A = 1$$

   Két polinom egyenlőségét kell vizsgálnunk:

$$(A+B)x + 2A = 0 \cdot x + 1$$

   Két polinom akkor egyenlő, ha az azonos fokszámú kifejezések együtthatói rendre megegyeznek, azaz

$$A + B = 0 \qquad \text{és} \qquad 2A = 1$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$A = \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad B = -\frac{1}{2}$$

Tehát

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)$$

8. **Feladat:** Írjuk fel parciális törtek összegeként az alábbi racionális törtet:

$$\frac{12}{(x-4)(x+2)} =$$

Megoldás: A nevező két elsőfokú kifejezés szorzata. Keressük a parciális törteket a következő alakban:

$$\frac{12}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

Hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{12}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

Vizsgáljuk a számlálók egyenlőségét.

$$A(x+2) + B(x-4) = 12$$

Rendezzük a polinomot.

$$(A+B)x + 2A - 4B = 0 \cdot x + 12$$

Írjuk fel az együtthatók egyenlőségét.

$$A + B = 0 \qquad \text{és} \qquad 2A - 4B = 12$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert.

Ha

$$A = -B$$

akkor

$$2A - 4B = -6B = 12 \quad \Rightarrow \quad B = -2 \quad \text{és} \quad A = 2$$

Tehát a racionális tört parciális törtekre bontva:

$$\frac{12}{(x-4)(x+2)} = \frac{2}{x-4} - \frac{2}{x+2}$$

9. **Feladat:** Írjuk fel parciális törtek összegeként az alábbi racionális törtet:

$$\frac{12}{(x+3)x^2} =$$

Megoldás: A nevező elsőfokú tényezők szorzataként írható fel:

$$(x+3) \cdot x \cdot x$$

Ekkor a parciális törteket a következő alakban kell keresni:

$$\frac{12}{(x+3)x^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

Határozzuk meg A, B és C értékeit. Hozzunk közös nevezőre. Vegyük észre, hogy a közös nevező ebben az esetben is az eredeti nevezővel egyezik meg.

$$\frac{12}{(x+3)x^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x+3) + C(x+3)}{(x+3)x^2}$$

Vizsgáljuk a számlálók egyenlőségét.

$$Ax^2 + Bx(x+3) + C(x+3) = 12$$

Rendezzük a polinomokat.

$$(A+B)x^2 + (3B+C)x + 3C = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 12$$

Írjuk fel az együtthatók egyenlőségét.

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 3B+C &= 0 \\ 3C &= 12 \end{aligned}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert.

Az utolsó egyenlet alapján $C = 4$. Behelyettesítve a másodikba kapjuk, hogy $B = -\frac{4}{3}$. Az első egyenletbe helyettesítve $A = \frac{4}{3}$.

Tehát

$$\begin{aligned} C &= 4 \\ B &= -\frac{4}{3} \\ A &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

A racionális tört parciális tört alakja:

$$\frac{12}{(x+3)x^2} = \frac{\frac{4}{3}}{x+3} - \frac{\frac{4}{3}}{x} + \frac{4}{x^2}$$

10. **Feladat:** Írjuk fel parciális törtek összegeként az alábbi racionális törtet:

$$\frac{6x}{(x^2+5)(x+1)} =$$

Megoldás: Mivel $x^2 + 5 \geq 5$, ezért az első tényezőnek a nevezőben nincs gyöke, azaz egy tovább már nem bontható másodfokú polinom. Ekkor az egyik résztört nevezője $x^2 + 5$ és a hozzátartozó számlálót szigorúan elsőfokú polinom alakjában kell keresni.

$$\frac{6x}{(x^2+5)(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+5)} + \frac{C}{x+1} =$$

Hozzunk közös nevezőre.

$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+5)}{(x^2+5)(x+1)} =$$

Rendezzük a számlálót.

$$= \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B+5C}{(x^2+5)(x+1)} =$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$$(A+C)x^2+(A+B)x+B+5C = 6x$$

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ A+B &= 6 \\ B+5C &= 0 \end{aligned}$$

Olvassuk le az egyenletrendszer megoldását.

Ha $A = -C$, akkor

$$\begin{aligned} -C+B &= 6 \\ B+5C &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenletből vonjuk ki a másodikat.

$$-6C = 6 \quad \Rightarrow C = -1$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} C &= -1 \\ B &= 5 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Tehát a racionális tört parciális törtekre bontása:

$$\frac{6x}{(x^2+5)(x+1)} = \frac{x+5}{(x^2+5)} - \frac{1}{x+1} =$$

11. **Feladat:** Milyen típusú parciális törtek alakjában kell keresni az alábbi racionális törtet ?

$$\frac{1}{(x+3)^2(x^2+4)x^4} =$$

Megoldás:

$$\frac{1}{(x+3)^2(x^2+4)x^4} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)} + \frac{E}{x} + \frac{F}{x^2} + \frac{G}{x^3} + \frac{H}{x^4}$$

1.1.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:**

$$\int \frac{5x-6}{x^2-3x} dx =$$

Megoldás: Az integrandus egy valódi racionális tört, a számláló elsőfokú, a nevező pedig másodfokú polinom. A nevezőben x kiemelésével szorzattá alakítható, tehát a tört felírható parciális törtek összegeként.

Végezzük el a parciális törtekre való bontást.

$$\frac{5x-6}{x^2-3x} = \frac{5x-6}{(x-3)x} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x}$$

Hozzunk közös nevezőre.

$$\frac{5x-6}{x^2-3x} = \frac{5x-6}{(x-3)x} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x} = \frac{Ax+B(x-3)}{(x-3)x}$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$$Ax + B(x-3) = 5x - 6$$

Rendezzük a jobboldali polinomot.

$$(A+B)x - 3B = 5x - 6$$

Írjuk fel a megfelelő együtthatók egyenlőségét.

$$\begin{aligned} A+B &= 5 \\ -3B &= -6 \end{aligned}$$

Olvassuk le a megoldást.

$$B = 2 \qquad \text{és} \quad A = 3$$

Az integrandus parciális törtekre bontva:

$$\frac{5x-6}{x^2-3x} = \frac{5x-6}{(x-3)x} = \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x}$$

Végezzük el az integrálást!

$$\int \frac{5x-6}{x^2-3x}dx = \int \frac{5x-6}{(x-3)x}dx = \int \frac{3}{x-3}dx + \int \frac{2}{x}dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{x-3}dx + 2\int \frac{1}{x}dx = 3\ln|x-3| + 2\ln|x| + c$$

2. **Feladat:**

$$\int \frac{7}{x^2+4x+13}dx =$$

Megoldás: Az integrandus egy valódi racionális tört, a számláló egy konstans, a nevező egy másodfokú polinom. Nézzük meg, hogy a nevező szorzattá alakítható-e. Ha a másodfokú polinom diszkriminánsa pozitív, akkor van valós gyöke, azaz szorzattá alakítható. Ha a diszkrimináns negatív, akkor nincs valós gyöke, azaz nem írható fel elsőfokú tényezők szorzataként.

$$D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -26 < 0$$

Mivel a diszkrimináns negatív, a nevező nem alakítható szorzattá.

Ha a számláló egy konstans, a nevező pedig tovább már nem bontható kifejezés, akkor az integrandust $\dfrac{1}{1+(ax+b)^2}$ alakúra kell hozni!

Ebben az esetben először emeljük ki 7-t a számlálóból.

$$\frac{7}{x^2+4x+13} = 7\frac{1}{x^2+4x+13} =$$

Majd folytassuk teljes négyzetté alakítással és kiemeléssel.

$$= 7\frac{1}{(x+2)^2+9} = \frac{7}{9}\frac{1}{\frac{(x+2)^2}{9}+1} =$$

Vigyük be a 9-t a négyzet alá:

$$= \frac{7}{9}\frac{1}{(\frac{x+2}{3})^2+1}$$

Mivel $\frac{x+2}{3}$ egy lineáris kifejezés, az

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$$

integrálási szabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int \frac{7}{x^2+4x+13}dx = \frac{7}{9}\int \frac{1}{(\frac{x+2}{3})^2+1}dx = \frac{7}{9}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right)}{\frac{1}{3}} + c =$$

Egyszerűsítés után:

$$= \frac{7}{3}\text{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

Tehát

$$\int \frac{7}{x^2+4x+13}dx = \frac{7}{3}\text{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

3. **Feladat:**

$$\int \frac{3x+1}{4x^2+1}dx =$$

Megoldás: Mivel $4x^2+1 \geq 1$, ha $x \in \mathbf{R}$, a nevező egy tovább már nem bontható, a számláló pedig egy elsőfokú polinom. Ha a számláló a nevező deriváltjának számszorosa, akkor az integrálás elvégezhető.

$$(4x^2+1)' = 8x$$

Mivel ez most nem teljesül , ezért az integrandust két olyan tört összegére bontjuk, amelyek egyikében a a számláló a nevező deriváltjának konstansszorosa, a másik számlálója pedig konstans.

$$\frac{3x+1}{4x^2+1} = \frac{3x}{4x^2+1} + \frac{1}{4x^2+1} = \frac{3}{8}\frac{8x}{4x^2+1} + \frac{1}{4x^2+1} =$$

Az első tag $\frac{f'}{f}$ típusú. A második tagot írjuk át $\frac{1}{1+(ax+b)^2}$ alakúra.

$$= \frac{3}{8}\frac{8x}{4x^2+1} + \frac{1}{(2x)^2+1}$$

Most már az integrálás elvégezhető mindkét tagban.

$$\int \frac{3x+1}{4x^2+1}dx = \int \frac{3}{8}\frac{8x}{4x^2+1}dx + \int \frac{1}{(2x)^2+1}dx =$$

$$\frac{3}{8}\ln|4x^2+1| + \frac{\text{arctg } 2x}{2} + c$$

4. **Feladat:**

$$\int \frac{x}{x^2+6x+11}dx =$$

Megoldás: Az integrandus egy valódi racionális tört. A nevező egy tovább már nem bontható másodfokú polinom, mivel a diszkriminánsa negatív ($D = -8$). A számlálóban pedig egy lineáris kifejezés van.

Először nézzük meg, hogy a számláló a nevező deriváltjának számszorosa-e.

$$(x^2+6x+11)' = 2x+6$$

Ez ebben az esetben nem teljesül. Alakítsuk ki a számlálóban a nevező deriváltját.

$$\int \frac{x}{x^2+6x+11}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+6x+11}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6-6}{x^2+6x+11}dx =$$

Majd írjuk fel az integrandust két tört összegeként. Az egyik tört számlálójában a nevező deriváltja legyen, a másikban pedig konstans.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx - \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2+6x+11}dx =$$

Az első tag már $\frac{f'}{f}$ típusú, a másik tagot $\frac{1}{1+(ax+b)^2}$ alakúra kell hozni!

Első lépés a teljes négyzetté alakítás.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx - \frac{1}{2}\int \frac{6}{(x+3)^2+2}dx =$$

Második lépés, kiemelések:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx - \frac{6}{2\cdot 2}\int \frac{1}{\frac{(x+3)^2}{2}+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx =$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket.

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+11| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{2}+c$$

5. **Feladat:**

$$\int \frac{13x+12}{3x^2-x-2}dx =$$

Megoldás: Az integrandus valódi racionális tört. Vizsgáljuk meg, hogy a nevező felírható- e szorzat alakban. Mivel a nevezőben lévő másodfokú polinom diszkriminánsa $D=(-1)^2+24>0$, a nevező felírható szorzat alakban.

A megoldóképlettel keressük meg a nevezőben lévő polinom gyökeit.

$$3x^2-x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+24}}{2\cdot 3}=\frac{1\pm 5}{6}$$

Tehát

$$x_1=-\frac{2}{3}\qquad x_2=1$$

A nevező gyöktényezős alakja:

$$3x^2-x-2=3(x-1)(x+\frac{2}{3})=(x-1)(3x+2)$$

Végezzük el a parciális törtekre való bontást.

$$\frac{13x+12}{3x^2-x-2}=\frac{13x+12}{(x-1)(3x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{3x+2}$$

$$\frac{13x+12}{(x-1)(3x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{3x+2}=\frac{A(3x+2)+B(x-1)}{(x-1)(3x+2)}$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$$A(3x+2)+B(x-1)=13x+12$$

Rendezzük a polinomot.

$$(3A+B)x+2A-B=13x+12$$

Két polinom akkor egyezik meg, ha az azonos fokszámú tagok együtthatói rendre megegyeznek.

$$\begin{aligned}3A+B&=13\\2A-B&=12\end{aligned}$$

Adjuk össze a két egyenletet, akkor

$$5A=25\quad\Rightarrow\quad A=5$$

Behelyettesítve például az első egyenletbe kapjuk, hogy

$$B=-2$$

Az integrandus parciális törtekkel felírva:

$$\frac{13x+12}{(x-1)(3x+2)}=\frac{5}{x-1}-\frac{2}{3x+2}$$

Végezzük el az integrálást.

$$\int\frac{13x+12}{3x^2-x-2}dx=\int\frac{13x+12}{(x-1)(3x+2)}dx=\int\frac{5}{x-1}dx-\int\frac{2}{3x+2}dx=$$
$$=5\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{2}{3}\int\frac{3}{3x+2}dx=5\ln|x-1|-\frac{2}{3}\cdot\ln|3x+2|+c$$

6. **Feladat:**

$$\int \frac{-2x^2+10x-2}{2x^3+3x^2-2x}dx =$$

Megoldás: Egy valódi racionális törtet kell integrálnunk.

Mivel a nevező harmadfokú, biztosan szorzattá alakítható. Ennél a feladatnál x kiemelhető.

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$$

Gyökképlettel nézzük meg van-e valós gyöke a második tényezőnek.

$$2x^2+3x-2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2+16}}{2\cdot 2} = \frac{-3\pm 5}{4}$$

Tehát

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -2$$

A gyöktényezős alak:

$$2x^2+3x-2 = 2(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x+2)(2x-1)$$

A nevező szorzat alakban felírva:

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2) = x(x+2)(2x-1)$$

Végezzük el a parciális törtekre való bontást. A résztörtekben a nevezők elsőfokúak, ekkor a számlálókat konstans alakban kell keresni.

$$\frac{-2x^2+10x-2}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{-2x^2+10x-2}{x(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{2x-1}$$

Hozzunk közös nevezőre.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{2x-1} = \frac{A(x+2)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(2x-1)}$$

Mivel

$$\frac{-2x^2+10x-2}{x(x+2)(2x-1)} = \frac{A(x+2)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(2x-1)},$$

írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$$-2x^2+10x-2 = A(x+2)(2x-1)+Bx(2x-1)+Cx(x+2)$$

Rendezzük a baloldali polinomot.

$$-2x^2 + 10x - 2 = (2A + 2B + C)x^2 + (3A - B + 2C)x - 2A$$

Írjuk fel az azonos fokszámú kifejezések együtthatóinak egyenlőségeit.

$$\begin{aligned} -2 &= 2A + 2B + C \\ 10 &= 3A - B + 2C \\ -2 &= -2A \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $A = 1$. Behelyettesítve a másik két egyenletbe, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} -4 &= 2B + C \\ 7 &= -B + 2C \end{aligned}$$

A második egyenlet kétszeresét adjuk hozzá az elsőhöz.

$$10 = 5C \qquad \Rightarrow \qquad C = 2$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy $B = -3$.

Tehát a az integrandus parciális törtek alakjában felírva:

$$\frac{-2x^2 + 10x - 2}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{-2x^2 + 10x - 2}{x(x+2)(2x-1)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{2}{2x-1}$$

Végezzük el az integrálást.

$$\int \frac{-2x^2 + 10x - 2}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \int \frac{-2x^2 + 10x - 2}{x(x+2)(2x-1)} dx =$$

$$= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{3}{x+2} dx + \int \frac{2}{2x-1} dx =$$

$$= \ln|x| - 3\ln|x+2| + \ln|2x-1| + c$$

7. **Feladat:**

$$\int \frac{4x^2 + 18x + 15}{(x+2)^3} dx =$$

Megoldás: Az integrandus valódi racionális tört, a nevező szorzat alakban van. Egy elsőfokú kifejezés szerepel harmadik hatványon. Ilyenkor a résztörtek száma megegyezik a külső hatvánnyal, azaz 3- mal, a számlálókat pedig konstans alakban kell keresni.

$$\frac{4x^2 + 18x + 15}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

Hozzunk közös nevezőre, ami ebben az esetben is az eredeti nevező lesz.

$$\frac{4x^2+18x+15}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3} =$$

$$= \frac{A(x+2)^2 + B(x+2) + C}{(x+2)^3} = \frac{A(x^2+4x+4) + B(x+2) + C}{(x+2)^3}$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$$A(x^2+4x+4) + B(x+2) + C = 4x^2+18x+15$$

Rendezzük a jobboldali polinomot.

$$Ax^2 + (4A+B)x + (4A+2B+C) = 4x^2+18x+15$$

Írjuk fel az azonos fokszámú kifejezések együtthatóinak egyenlőségeit.

$$\begin{aligned} A &= 4 \\ 4A+B &= 18 \\ 4A+2B+C &= 15 \end{aligned}$$

Olvassuk le a megoldásokat.

$$A = 4 \quad B = 2 \quad C = -5$$

Végezzük el az integrálást.

$$\int \frac{4x^2+18x+15}{(x+2)^3}dx = \int \frac{4}{x+2}dx + \int \frac{2}{(x+2)^2}dx - \int \frac{5}{(x+2)^3}dx =$$

$$= 4\int \frac{1}{x+2}dx + 2\int (x+2)^{-2}dx - 5\int (x+2)^{-3}dx =$$

$$= 4\ln|x+2| + 2\frac{(x+2)^{-1}}{-1\cdot 1} - 5\frac{(x+2)^{-2}}{-2\cdot 1} + c =$$

$$= 4\ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2} + c$$

8. **Feladat:**

$$\int \frac{5x^2+3x+20}{x^3+4x}dx =$$

Megoldás: Az integrandus valódi racionális tört, a nevező harmadfokú polinom, most x kiemelésével szorzattá alakítható.

$$\int \frac{5x^2+3x+20}{x^3+4x}dx = \int \frac{5x^2+3x+20}{x(x^2+4)}dx =$$

A második tényezőnek nincs valós gyöke, hiszen $x^2 + 4 \geq 4$ minden x valós szám esetén. Tehát megjelent egy tovább nem bontható másodfokú tényező a nevezőben.

Ilyen esetben a parciális törteket a következő alakban kell keresni.

$$\frac{5x^2 + 3x + 20}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Azaz az elsőfokú nevezőhöz most is csak konstans számláló tartozik, de a másodfokúhoz a számlálót már elsőfokú alakban kell keresni.

Hozzunk közös nevezőre.

$$\frac{5x^2 + 3x + 20}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} = \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 4)}$$

Újra írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$$A(x^2 + 4) + (Bx + C)x = 5x^2 + 3x + 20$$

$$(A + B)x^2 + Cx + 4A = 5x^2 + 3x + 20$$

Innen a megfelelő együtthatók egyenlősége:

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & 5 \\ C & = & 3 \\ 4A & = & 20 \end{array}$$

Olvassuk le a megoldásokat:

$$\begin{array}{rcl} A & = & 5 \\ C & = & 3 \\ B & = & 0 \end{array}$$

Végezzük el az integrálást.

$$\int \frac{5x^2 + 3x + 20}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{5}{x} dx + \int \frac{3}{x^2 + 4} dx =$$

$$= 5 \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = 5 \ln |x| + \frac{3}{4} \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= 5 \ln |x| + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2}\right) + c$$

9. **Feladat:**

$$\int \frac{x^2+10x+26}{x^3+6x^2+13x}dx =$$

Megoldás: Az integrandus valódi racionális tört. A nevező x kiemelésével szorzattá alakítható.

$$x^3+6x^2+13x = x(x^2+6x+13)$$

Vizsgáljuk meg, hogy a második tényező vajon tovább bontható-e. Ehhez elegendő megvizsgálni a kifejezés diszkriminánsát.

$$D = 6^2 - 4\cdot 13 = -16 < 0$$

Mivel a diszkrimináns negatív, $x^2+6x+13$ tovább már nem bontható másodfokú polinom.

Végezzük el a parciális törtekre bontását, ügyelve arra, hogy a nevező egy szorzattá nem alakítható másodfokú kifejezés, akkor a számlálót elsőfokú polinom alakjában kell keresni.

$$\frac{x^2+10x+26}{x(x^2+6x+13)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+13}$$

Hozzunk közös nevezőre.

$$\frac{x^2+10x+26}{x(x^2+6x+13)} = \frac{A(x^2+6x+13)+(Bx+C)x}{x(x^2+6x+13)}$$

$$\frac{x^2+10x+26}{x(x^2+6x+13)} = \frac{(A+B)x^2+(6A+C)x+13A}{x(x^2+6x+13)}$$

Írjuk fel a megfelelő együtthatók egyenlőségét.

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ 6A+C &= 10 \\ 13A &= 26 \end{aligned}$$

Olvassuk le a megoldásokat.

$$\begin{aligned} A &= 2 \\ B &= -1 \\ C &= -2 \end{aligned}$$

Végezzük el az integrálást.

$$\int \frac{x^2+10x+26}{x^3+6x^2+13x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-x-2}{x^2+6x+13}dx$$

Azt tudjuk, hogy

$$\int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x| + c$$

Nézzük a második integrált:

$$\int \frac{-x-2}{x^2+6x+13}dx = -\int \frac{x+2}{x^2+6x+13}dx$$

Tudjuk, hogy a nevező másodfokú, tovább már nem bontható polinom. A számláló pedig elsőfokú kifejezés. Ekkor az integrandust két olyan tört összegére bontjuk, amelyek egyikében a számláló a nevező deriváltjának konstansszorosa, a másik számlálója pedig konstans.

Határozzuk meg a nevező deriváltját.

$$(x^2+6x+13)' = 2x+6 = 2(x+3)$$

Alakítsuk ki először a számlálóban a nevező deriváltjának a felét:

$$\int \frac{x+2}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{x+3-1}{x^2+6x+13}dx =$$

$$= \int \frac{x+3}{x^2+6x+13}dx - \int \frac{1}{x^2+6x+13}dx =$$

Majd az első törtnél bővítsünk kettővel.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{x^2+6x+13}dx - \int \frac{1}{x^2+6x+13}dx =$$

Az első integrandus $\frac{f'}{f}$ alakú, tehát integrálható.

Nézzük a másik kifejezést. A számláló megint konstans, a nevező szorzattá nem alakítható, tehát az integrandust $\dfrac{1}{1+(ax+b)^2}$ alakúra kell hozni!

Először alakítsunk teljes négyzetté.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{x^2+6x+13}dx - \int \frac{1}{(x+3)^2+4}dx =$$

Majd emeljünk ki 4-et a nevezőben.

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{x^2+6x+13}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1}dx =$$

Most már a második tag is integrálható.

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13| - \frac{1}{4}\text{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right)\cdot 2 + c$$

Tehát a végeredmény:

$$\int \frac{x^2+10x+26}{x^3+6x^2+13x}dx = \int \frac{2}{x}dx - \int \frac{x+2}{x^2+6x+13}dx =$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13| + \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + c$$

10. **Feladat:**
$$\int \frac{2x}{x+3}dx =$$
Megoldás: Az integrandus egy nem valódi racionális tört, mert számlálóban és nevezőben azonos fokszámú polinom van. Ekkor alakítsuk ki a számlálóban a nevező többszörösét.
$$\int \frac{2x}{x+3}dx = \int \frac{2x+6-6}{x+3}dx = \int (2 - \frac{6}{x+3})dx =$$
A feladatot ezzel az egyszerű lépéssel visszavezettük racionális tört integrálására.
$$= 2x - 6\int \frac{1}{x+3}dx = 2x - 6\ln|x+3| + c$$

11. **Feladat:**
$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}dx =$$
Megoldás: Az integrandus egy nem valódi racionális tört. A legmagasabb fokszámok a számlálóban és nevezőben most is egyenlőek, tehát alakítsuk ki a számlálóban a nevező többszörösét.
$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}dx = \int \frac{x^2+x-x+1}{x^2+x}dx = \int \left(1 - \frac{x-1}{x^2+x}\right)dx =$$
A feladatot visszavezettük egy valódi racionális tört integrálására. A nevező x kiemelésével szorzattá alakítható.
$$= x - \int \left(\frac{x-1}{(x+1)x}\right)dx =$$
Végezzük el a parciális törtekre bontást.
$$\frac{x-1}{(x+1)x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B(x+1)}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x + B}{x(x+1)}$$
A számlálók egyenlősége:
$$x - 1 = (A+B)x + B$$
Írjuk fel a megfelelő együtthatók egyenlőségeit.
$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ B &= -1 \end{aligned}$$
Olvassuk le a megoldásokat:
$$B = -1 \qquad A = 2$$

Folytassuk az integrálást.

$$= x - \int \left(\frac{x-1}{(x+1)x} \right) dx = x - \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= x - 2\ln|x+1| + \ln|x| + c$$

12. **Feladat:**

$$\int \frac{2x^3 - 3x - 7}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

Megoldás: Az integrandus egy nem valódi racionális tört, mivel a számláló fokszáma (3) magasabb, mint a nevező fokszáma (2).

Polinomosztást kell először végezni.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & (2x^3 & - & 3x & - & 7) & & : & (x^2 & + & 2x & + & 2) & = & 2x & - & 4 \\
- & (2x^3 & + & 4x^2 & + & 4x) & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & - & 4x^2 & - & 7x & - & 7 & & & & & & & & & \\
 & & - & (-4x^2 & - & 8x & - & 8) & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & x & + & 1 & & & & & & & & &
\end{array}$$

Az osztást elvégeztük, a hányados $2x - 4$, a maradék pedig $x + 1$.

Tehát az integrandus felírható egy polinom és egy valódi racionális tört összegével:

$$\frac{2x^3 - 3x - 7}{x^2 + 2x + 2} = 2x - 4 + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$$

Most már el tudjuk végezni a kijelölt integrálást:

$$\int \frac{2x^3 - 3x - 7}{x^2 + 2x + 2} dx = \int (2x - 4 + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}) dx =$$

$$= x^2 - 4x + \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

Kaptunk egy valódi racionális törtet, amelynek nevezője tovább már nem bontható másodfokú polinom, mivel a diszkriminánsa negatív ($D = -4$). Mivel a számláló elsőfokú, nézzük meg, hogy a számlálóban kialakítható-e a nevező deriváltjának számszorosa.

A nevező deriváltja:

$$(x^2 + 2x + 2)' = 2x + 2 = 2(x + 1)$$

Vegyük észre, hogy most a számláló éppen a derivált fele. Így egy egyszerű bővítéssel kialakítható a derivált a számlálóban.

$$= x^2 - 4x + \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx = x^2 - 4x + \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

$$= x^2 - 4x + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + c = x^2 - 4x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + c$$

felhasználva, hogy $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$, ezért az abszolútérték elhagyható.

13. **Feladat:**

$$\int \frac{2x^4-13x^3+27x^2-18x-6}{x^3-5x^2+6x}dx =$$

Megoldás: Az integrandus egy nem valódi racionális tört, mivel a számláló negyedfokú, a nevező pedig harmadfokú polinom.

Most is polinomosztással kell kezdeni.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & (2x^4 & -13x^3 & +27x^2 & -18x & -6) & : (x^3 \;\; -5x^2 \;\; +6x) = 2x \;\; -3 \\
- & \underline{(2x^4} & \underline{-10x^3} & \underline{+12x^2)} & & & \\
 & & -3x^3 & +15x^2 & -18x & -6 & \\
 & - & \underline{(-3x^2} & \underline{+15x^2} & \underline{-18x)} & & \\
 & & & & & -6 &
\end{array}$$

A polinomosztást elvégeztük, a hányados $2x-3$, a maradék -6.

Tehát

$$\frac{2x^4-13x^3+27x^2-18x-6}{x^3-5x^2+6x} = 2x-3-\frac{6}{x^3-5x^2+6x}$$

Az integrandust felírtuk egy polinom és egy valódi racionális tört összegével.

A polinomot ki tudjuk integrálni. Foglalkozzunk a második taggal. Alakítsuk szorzattá a nevezőt.

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6)$$

A megoldóképlettel keressük meg a második tényező gyökeit.

$$x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 6}}{2} = \frac{5\pm 1}{2}$$

Tehát

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$$

A második tényező gyöktényezős alakja:

$$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$$

A nevező szorzat alakjában:

$$x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-3)(x-2)$$

Keressük a parciális törteket:

$$\frac{6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{6}{x(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-2)}$$

$$\frac{6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(A+B+C)x^2+(-5A-2B-3C)x+6A}{x(x-3)(x-2)}$$

Írjuk fel az együtthatók egyenlőségeit:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -5A-2B-3C &= 0 \\ 6A &= 6 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet alapján $A = 1$. Behelyettesítve a többi egyenletbe:

$$\begin{aligned} B+C &= -1 \\ -2B-3C &= 5 \end{aligned}$$

Az első egyenlet kétszeresét adjuk hozzá a második egyenlethez.

$$-C = 3 \qquad \Rightarrow C = -3 \qquad B = 2$$

Tehát

$$\frac{6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{6}{x(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int \frac{2x^4-13x^3+27x^2-18x-6}{x^3-5x^2+6x}dx = \int \left(2x-3-\frac{6}{x^3-5x^2+6x}\right)dx =$$

$$= \int (2x-3)dx - \int \frac{6}{x^3-5x^2+6x}dx = \int (2x-3)dx - \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x-2}\right)dx =$$

$$= x^2-3x-\ln x-2\ln|x-3|+3\ln|x-2|+c$$

1.2. Integrálás helyettesítéssel

1.2.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** $\int x^2 \operatorname{sh}\,(x^3+5)dx =$

   Megoldás: Az integrandus egy szorzat, amelynek egyik tényezője egy összetett függvény, $f(x) = \operatorname{sh} x$ külső és $g(x) = x^3 + 5$ belső függvénnyel. Vegyük észre, hogy mivel $g'(x) = 3x^2$, a szorzat másik tényezője majdnem a belső függvény deriváltja, csak egy konstans szorzó hiányzik. A feladatot az

   $$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

   integrálási szabály alkalmazásával lehet megoldani. Az integrandust bővítsük 3-mal:

   $$\int \operatorname{sh}\,(x^3+5)x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sh}\,(x^3+5)3x^2\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{ch}\,(x^3+5) + c$$

   A feladat megoldásának menete átláthatóbb, ha alkalmazzuk a következő helyettesítést:

   Legyen $t = g(x)$, ekkor $dt = g'(x)dx$.

   $$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + c = F(g(x)) + c$$

   Végezzük el a helyettesítést erre a feladatra.

   Legyen $t = x^3 + 5$, ekkor $\dfrac{dt}{dx} = 3x^2$, azaz $dt = 3x^2\,dx$.

   $$\int \operatorname{sh}\,(x^3+5)x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sh}\,(x^3+5)3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sh}\,t\,dt =$$

   $$= \frac{1}{3}\operatorname{ch}\,t + c =$$

   Térjünk vissza a régi változóra, azaz t helyére írjuk vissza $x^2 + 5$-t:

   $$= \frac{1}{3}\operatorname{ch}\,(x^3+5) + c$$

   Más lépéssorozattal is elvégezhető a helyettesítés. Most a régi változót helyettesítsük az új változó valamely függvényével.

   Legyen $t = x^3 + 5$, innen $x = \sqrt[3]{t-5} = (t-5)^{\frac{1}{3}}$.

   Deriváljunk most t szerint.

   $$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(t-5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(t-5)^2}}$$

Innen

$$dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{(t-5)^2}}dt$$

$$\int x^2 \,\text{sh}\, (x^3+5)dx = \int \sqrt[3]{(t-5)^2}\,\text{sh}\; t \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(t-5)^2}}\, dt =$$

Egyszerűsítsünk a gyökös kifejezéssel.

$$= \frac{1}{3}\int \text{sh}\; t\, dt = \frac{1}{3}\text{ch}\; t + c = \frac{1}{3}\text{ch}\; (x^3+5) + c$$

Megjegyzés: Az integrálásnak ez a típusa sok nehézséget szokott okozni. Ha az integrandusban egy összetett függvény szorzódik a belső függvény deriváltjával, vagy majdnem a deriváltjával, épp egy konstans szorzó hiányzik, akkor bátran használhatunk helyettesítést. A hiányzó konstans szorzó egy bővítéssel mindig behozható.

2. **Feladat:** $\int \cos(3x+5)dx =$

Megoldás:

1. megoldás Az integrandus összetett függvény, $g(x) = 3x+5$ belső függvénnyel. Ennek deriváltja $g'(x) = 3$, csak egy konstans. Ha az integrandust bővítjük 3-mal, akkor megjelenik szorzótényezőként a belső függvény deriváltja.

Legyen $t = 3x+5$, akkor $\frac{dt}{dx} = 3$, azaz $dt = 3\,dx$.

$$\int \cos(3x+5)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+5)3\,dx = \frac{1}{3}\int \cos t\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos t\, dt = \frac{1}{3}\sin t + c = \frac{1}{3}\sin(3x+5) + c$$

2. megoldás

Legyen $t = 3x+5$, innen $x = \frac{1}{3}(t-5)$.

Deriváljunk t szerint.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}, \qquad \text{azaz} \qquad dx = \frac{1}{3}dt$$

$$\int \cos(3x+5)dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos t\, dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos t\, dt = \frac{1}{3}\sin t + c = \frac{1}{3}\sin(3x+5) + c$$

Megjegyzés: A helyettesítéses integrál egy speciális esetét kapjuk, ha az integrandusban nincs szorzat, csak egy összetett függvény lineáris belső függvénnyel, azaz $f(ax+b)$ alakú. Ezekben az esetekben levezethető egy korábban már tanult integrálási szabály:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c \qquad \text{ahol} \qquad F(x)' = f(x)$$

Most $ax+b = 3x+5$, $\quad f(x) = \cos x$, $\quad a = 3$ és $F(x) = \sin x$

Tehát helyettesítés nélkül azonnal elvégezhető az integrálás:

$$\int \cos(3x+5)dx = \frac{\sin(3x+5)}{3} + c$$

3. **Feladat:** $\displaystyle\int_{-5}^{1} \sqrt{5-4x}dx =$

Megoldás: Egy határozott integrált kell kiszámolni. Szükségünk van az integrandus egy primitív függvényére. Vizsgáljuk meg az integrandust. A belső függvény $5-4x$, aminek a deriváltja -4. Alkalmazzunk helyettesítéses integrálást.

1. megoldás

Legyen

$$t = 5-4x \qquad \frac{dt}{dx} = -4 \qquad \Rightarrow \qquad dt = -4\,dx$$

$$\int \sqrt{5-4x}\,dx = -\frac{1}{4}\int \sqrt{5-4x}(-4)dx = -\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x)^3} + c$$

Számoljuk ki a határozott integrált.

$$\int_{-5}^{1} \sqrt{5-4x}\,dx = \left[-\frac{1}{6}\sqrt{(5-4x)^3}\right]_{-5}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{25^3} = -\frac{1}{6} + \frac{125}{6} = \frac{124}{6} = \frac{62}{3}$$

2. megoldás

$$t = 5-4x \qquad x = \frac{1}{4}(5-t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad dx = -\frac{1}{4}dt$$

Most határozott integrálként kezeljük végig a feladatot, tehát néznünk kell azt is, hogy hogyan változnak a határok.

$$\text{Ha} \qquad x = -5 \quad \text{akkor} \qquad t = 25$$

$$\text{Ha} \qquad x = 1 \quad \text{akkor} \qquad t = 1$$

$$\int_{-5}^{1} \sqrt{5-4x}dx = \int_{25}^{1} \sqrt{t}(-\frac{1}{4})dt = -\frac{1}{4}\int_{25}^{1} t^{\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{25}^{1} = -\frac{1}{6}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_{25}^{1} = -\frac{1}{6}\left[1-\sqrt{25^3}\right] = \frac{62}{3}$$

Megjegyzés: Mindkét levezetés használható, de a továbbiakban csak a második módszert fogjuk alkalmazni, hogy a határok átváltását gyakoroljuk.

4. **Feladat:** $\int x^2\sqrt{2-x^3}dx =$

Megoldás: Ha $f(x) = \sqrt{x}$ a külső, $g(x) = 2 - x^3$ a belső függvény és $g(x)' = -3x^2$, akkor egy bővítéssel most is kialakítható a belső függvény deriváltja, tehát alkalmazhatunk helyettesítést.

Legyen

$$t = 2 - x^3 \qquad \frac{dt}{dx} = -3x^2 \qquad \Rightarrow \quad -3x^2dx = dt$$

$$\int x^2\sqrt{2-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int(-3x^2)\sqrt{2-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int\sqrt{t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{9}t^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{9}(2-x^3)^{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= -\frac{2}{9}\sqrt{(2-x^3)^3} + c$$

2. megoldás

A helyettesítéses integrálás egy speciális esete, ha az integrandus $f^n(x)f'(x)$ alakú, ilyenkor helyettesítés nélkül alkalmazhatjuk a következő szabályt:

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int x^2\sqrt{2-x^3}\,dx = \int x^2(2-x^3)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{3}\int(2-x^3)^{\frac{1}{2}}(-3x^2)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{(2-x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{9}(2-x^3)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{9}\sqrt{(2-x^3)^3} + c$$

5. **Feladat:** $\int \frac{4e^x}{3e^x+5}dx =$

Megoldás: Vegyük észre, hogy ha $f(x) = \frac{1}{x}$ a külső, $g(x) = 3e^x + 5$ a belső függvény és $g(x)' = 3e^x$, akkor egy bővítéssel most is kialakítható a belső függvény deriváltja.

Legyen

$$t = 3e^x + 5 \qquad \frac{dt}{dx} = 3e^x \qquad \Rightarrow \qquad 3e^x dx = dt$$

$$\int \frac{4e^x}{3e^x+5}dx = \frac{4}{3}\int \frac{3e^x}{3e^x+5}dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{4}{3}\ln|t| + c = \frac{4}{3}\ln|3e^x+5| + c$$

2. megoldás

Ez a feladat egy példa a helyettesítéses integrál harmadik speciális esetére. Ha az integrandus $\frac{f'}{f}$ alakú, akkor helyettesítés nélkül azonnal alkalmazható a következő szabály:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

Tehát

$$\int \frac{4e^x}{3e^x+5}dx = \frac{4}{3}\int \frac{3e^x}{3e^x+5}dx =$$

$$\frac{4}{3}\ln|3e^x+5| + c = \frac{4}{3}\ln(3e^x+5) + c$$

Mivel $2e^x + 5 > 0$, ezért az abszolútérték elhagyható.

6. **Feladat:** $\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{3-3x^2}}dx =$

Megoldás: A integrandus egy törtfüggvény, de ha átírjuk szorzat alakba, akkor jól látható lesz az összetett függvény és belső függvényének deriváltja.

$$\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{3-3x^2}}dx = \int 2^{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

Így legyen

$$t = \arcsin x \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{3-3x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int 2^{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int 2^t dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2^t}{\ln 2} + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2^{\arcsin x}}{\ln 2} + c$$

7. **Feladat:** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{e^{\mathrm{tg}\ x}}{\cos^2 x} dx =$

Megoldás: Az integrandus egy folytonos függvény a $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ intervallumon. Tehát a keresett határozott integrál létezik. Ennek a meghatározásához szükségünk van az integrandus egy primitív függvényére.

Vegyük észre, hogyha tg x-t választjuk belsőfüggvénynek, akkor deriváltja $(\mathrm{tg}\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ az integrandus egyik szorzótényezője, ezért helyettesítéses integrált alkalmazhatunk.

Legyen

$$t = \mathrm{tg}\ x \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{Ha} \qquad x = -\frac{\pi}{4} \quad \text{akkor} \qquad t = \mathrm{tg}\ (-\frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\text{Ha} \qquad x = 0 \quad \text{akkor} \qquad t = \mathrm{tg}\ 0 = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{e^{\mathrm{tg}\ x}}{\cos^2 x} dx = \int_{-1}^{0} e^t dt = \left[e^t\right]_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

1.2.2. Összetett feladatok:

1. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{1}{x + x \ln^2 x} dx =$

Megoldás: Emeljük ki $\dfrac{1}{x}$ -t

$$\int \frac{1}{x + x \ln^2 x} dx = \int \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \ln^2 x} dx =$$

Innen látszik, ha $\ln x$ belső függvény, akkor az összetett függvény szorzódik a belső deriváltjával, azaz $\dfrac{1}{x}$-szel.

Ezért legyen

$$t = \ln x \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{x + x \ln^2 x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \ln^2 x} dx = \int \frac{1}{1 + t^2} dt =$$

$$= \mathrm{arctg}\ t + c = \mathrm{arctg}\ (\ln x) + c$$

2. megoldás

$$t = \ln x \qquad x = e^t \qquad \frac{dx}{dt} = e^t \qquad \Rightarrow \quad dx = e^t dt$$

$$\int \frac{1}{x + x\ln^2 x} dx = \int \frac{1}{e^t + e^t t^2} e^t dt =$$

Egyszerűsítsünk e^t-szel:

$$= \int \frac{1}{1+t^2} dt = \text{arctg } t + c = \text{arctg } (\ln x) + c$$

2. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x^2} dx =$

Megoldás: Vegyük észre, hogy ha $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ a külső, $g(x) = x^2$ a belső függvény és $g'(x) = 2x$, akkor egy bővítéssel most is kialakítható a belső függvény deriváltja.

Ezért legyen

$$t = x^2 \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \qquad \Rightarrow \quad dt = 2x\, dx$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\cos^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \text{tg } t + c = \frac{1}{2} \text{tg } (x^2) + c$$

2. megoldás

$$t = x^2 \qquad x = \sqrt{t} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x^2} dx = \int \frac{\sqrt{t}}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \text{tg } t + c = \frac{1}{2} \text{tg } (x^2) + c$$

3. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1} dx =$

Megoldás: Végezzük el a következő átalakítást:

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+1} dx =$$

Ha x^2 a belső függvény, akkor a számlálóban majdnem a deriváltja van, csak egy 2 szorzó hiányzik.

Legyen

$$t = x^2 \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \qquad \Rightarrow \quad dt = 2x\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$= \frac{1}{2}\text{arctg }t + c = \frac{1}{2}\text{arctg }(x^2) + c$$

2. megoldás

$$t = x^2 \qquad x = \sqrt{t} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \qquad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$$

$$\int \frac{x}{x^4+1}dx = \int \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\frac{1}{2\sqrt{t}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$= \frac{1}{2}\text{arctg }t + c = \frac{1}{2}\text{arctg }(x^2) + c$$

4. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{7}{\sqrt{5-4x^2}}dx =$

Megoldás: Mivel

$$\int \frac{7}{\sqrt{5-4x^2}}dx = \int \frac{7}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x\right)^2}}dx =$$

Tudjuk, hogy $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ezért most legyen $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a külső, $g(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,x$ a belső függvény és $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, akkor egy bővítéssel most is kialakítható a belső függvény deriváltja.

Legyen

$$t = \frac{2}{\sqrt{5}}x \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \Rightarrow \quad dt = \frac{2}{\sqrt{5}}dx$$

$$\int \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x\right)^2}}dx = \frac{7}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x\right)^2}}\frac{2}{\sqrt{5}}dx =$$

$$\frac{7}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{7}{2}\arcsin t + c = \frac{7}{2}\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,x\right) + c$$

5. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{2x-x^2}}dx =$

Megoldás: Mivel

$$\int \frac{3}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int \frac{3}{\sqrt{1-1+2x-x^2}}dx = \int \frac{3}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx =$$

ezért legyen

$$t = x-1 \qquad \frac{dt}{dx} = 1 \qquad \Rightarrow \quad dt = dx$$

$$= \int \frac{3}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx = 3\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= 3\arcsin t + c = 3\arcsin(x-1) + c$$

6. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx =$

Megoldás: Ez a feladat az előzőektől teljesen eltér. Itt nem a belső függvényt és annak deriváltját kell keresni. Most az integrandus egy tört kifejezés, de nem racionális tört a gyökös tag miatt. Ha $\sqrt{x}$ -t helyettesítjük egy új változóval, t-vel, akkor egy racionális törtet kapunk, amit remélhetőleg már ki tudunk integrálni.

Legyen

$$t = \sqrt{x} \qquad t^2 = x \qquad \frac{dx}{dt} = 2t \qquad \Rightarrow \quad dx = 2t\,dt$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{1+t}2t\,dt = \int \frac{2t}{1+t}\,dt =$$

Kaptunk egy nem valódi racionális törtet, amelyben a számlálóban és a nevezőben a legmagasabb fokszámok megegyeznek. Ilyen esetben alakítsuk ki a számlálóban a nevező többszörösét, majd egyszerűsítsünk.

$$\int \frac{2t}{1+t}dt = \int \frac{2t+2-2}{1+t}dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right)dt =$$

$$= \int \left(2 - 2\frac{1}{1+t}\right)dt = 2t - 2\ln|t+1| + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + c$$

7. **Feladat:** $\displaystyle\int (2x-3)\sqrt{x+5}dx =$

Megoldás: Most az integrandus nem tört, de próbáljuk meg újra a gyökös kifejezést helyettesíteni, mert akkor egy polinomot kapunk, amit könnyű lesz kiintegrálni.

Legyen

$$t=\sqrt{x+5} \qquad t^2=x+5 \qquad x=t^2-5$$

$$\frac{dx}{dt}=2t \qquad \Rightarrow \quad dx=2t\,dt$$

$$\int(2(t^2-5)-3)t\cdot 2t\,dt=\int(2t^2-13)2t^2dt=2\int(2t^4-13t^2)dt=$$

$$=2\left(2\frac{t^5}{5}-13\frac{t^3}{3}\right)+c=4\frac{\sqrt{(x+5)^5}}{5}-26\frac{\sqrt{(x+5)^3}}{3}+c$$

8. **Feladat:** $\displaystyle\int\frac{2-3x}{\sqrt{5x-1}}dx=$

Megoldás: Legyen

$$t=\sqrt{5x-1} \qquad t^2=5x-1 \qquad x=\frac{t^2+1}{5}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{5}t \qquad \Rightarrow \quad dx=\frac{2}{5}t\,dt$$

$$\int\frac{2-3x}{\sqrt{5x-1}}dx=\int\frac{2-3(\frac{t^2+1}{5})}{t}\cdot\frac{2}{5}t\,dt=$$

Egyszerűsítsünk t-vel, majd folytassuk az integrálást:

$$=\frac{2}{5}\int\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}t^2\right)dt=\frac{2}{25}\int(7-3t^2)dt=$$

$$=\frac{2}{25}(7t-t^3)+c=\frac{14}{25}\sqrt{5x-1}-\frac{2}{25}\sqrt{(5x-1)^3}+c$$

9. **Feladat:** $\displaystyle\int\text{ch }\sqrt{4x+1}\,dx=$

Megoldás: Legyen

$$t=\sqrt{4x+1} \qquad t^2=4x+1 \qquad x=\frac{t^2-1}{4}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{4}t \qquad \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{2}t\,dt$$

$$\int\text{ch }\sqrt{4x+1}\,dx=\int\text{ch }t\,\frac{1}{2}t\,dt=\frac{1}{2}\int t\,\text{ch }t\,dt=$$

Parciális integrálással folytatva:

$$f'(t)=\text{ch }t \qquad f(t)=\text{sh }t$$

$$g(t)=t \qquad g'(t)=1$$

$$\frac{1}{2}\int t\,\mathrm{ch}\ t\,dt = \frac{1}{2}\left[t\,\mathrm{sh}\ t - \int \mathrm{sh}\ t\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[t\,\mathrm{sh}\ t - \mathrm{ch}\ t\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{4x+1}\,\mathrm{sh}\ \sqrt{4x+1} - \mathrm{ch}\ \sqrt{4x+1}\right] + c$$

10. **Feladat:** $\int e^{\sqrt[3]{2-x}}\,dx =$

Megoldás: Legyen

$$t = \sqrt[3]{2-x} \qquad t^3 = 2-x \qquad x = 2-t^3$$

$$\frac{dx}{dt} = -3t^2 \qquad \Rightarrow \quad dx = -3t^2 dt$$

$$\int e^{\sqrt[3]{2-x}} dx = \int e^t(-3t^2)dt =$$

Parciális integrálási szabályt alkalmazva:

$$\begin{array}{ll} f'(t) = e^t & f(t) = e^t \\ g(t) = -3t^2 & g'(t) = -6t \end{array}$$

$$= -3t^2e^t - \int(-6t)e^t dt = -3t^2e^t + \int 6te^t dt$$

Újra parciális integrálással:

$$\begin{array}{ll} f'(t) = e^t & f(t) = e^t \\ g(t) = 6t & g'(t) = 6 \end{array}$$

$$= -3t^2e^t + (6te^t - \int 6e^t dt) = -3t^2e^t + 6te^t - 6e^t + c =$$

Visszahelyettesítve:

$$= -3\sqrt[3]{(2-x)^2}e^{\sqrt[3]{2-x}} + 6\sqrt[3]{2-x}e^{\sqrt[3]{2-x}} - 6e^{\sqrt[3]{2-x}} + c$$

11. **Feladat:** $\int \frac{7}{x+\sqrt{x}-12}dx =$

Megoldás: Legyen

$$t = \sqrt{x} \qquad t^2 = x$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \qquad \Rightarrow \quad dx = 2t\,dt$$

$$\int \frac{7}{x+\sqrt{x}-12}dx = \int \frac{7}{t^2+t-12}2t\,dt = \int \frac{14t}{t^2+t-12}dt =$$

Egy valódi racionális törtet kaptunk másodfokú nevezővel. Nézzük meg, hogy szorzattá tudnánk-e alakítani a nevezőt.

$$t^2 + t - 12 = 0$$

Megoldóképlettel:

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

Tehát a gyökök:

$$t_1 = 3 \qquad t_2 = -4$$

A gyöktényezős alak:

$$t^2 + t - 12 = (t-3)(t+4)$$

Folytassuk az integrálást parciális törtekre bontással.

$$= \int \frac{14t}{t^2 + t - 12} dt = \int \frac{14t}{(t-3)(t+4)} dt = \int \left(\frac{A}{t-3} + \frac{B}{t+4} \right) dt =$$

Hozzunk közös nevezőre:

$$= \int \frac{A(t+4) + B(t-3)}{(t-3)(t+4)} dt =$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét:

$$A(t+4) + B(t-3) = 14t$$

Rendezzük a jobboldalt.

$$(A+B)t + 4A - 3B = 14t$$

Írjuk fel az azonos fokszámú kifejezések együtthatóira vonatkozó egyenlőségeket.

$$\begin{aligned} A + B &= 14 \\ 4A - 3B &= 0 \end{aligned}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert. Adjuk az első egyenlet 3-szorosát a másodikhoz.

$$7A = 42 \qquad \Rightarrow \qquad A = 6 \qquad B = 8$$

Tehát

$$\frac{14t}{(t-3)(t+4)} = \frac{6}{t-3} + \frac{8}{t+4}$$

Folytassuk az integrálást.

$$\int \frac{14t}{(t-3)(t+4)} dt = \int \left(\frac{6}{t-3} + \frac{8}{t+4} \right) dt =$$

$$= 6 \ln |t-3| + 8 \ln |t+4| + c = 6 \ln |\sqrt{x} - 3| + 8 \ln |\sqrt{x} + 4| + c$$

12. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+1}dx =$

Megoldás: Az integrandus egy tört, de nem racionális. Helyettesítsük most e^x-t egy új változóval, mert akkor racionális tört kifejezést kapunk.

Legyen

$$t = e^x \qquad t^2 = (e^x)^2 = e^{2x} \qquad x = \ln t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{t}dt$$

$$\int \frac{2e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{2t^2+3t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt =$$

Egyszerűsítsünk t-vel.

$$= \int \frac{2t+3}{t^2+1}dt =$$

Egy valódi racionális törtet kaptunk, aminek a nevezője tovább már nem bontható másodfokú kifejezés, mivel $t^2+1 \geq 1$. Nézzük meg, hogy kialakítható -e a nevező deriváltjának többszöröse a számlálóban.

$$(t^2+1)' = 2t$$

Ebben az esetben a törtet bontsuk szét két résztörtre, az egyik tört számlálójában legyen a nevező deriváltja, a másik tört számlálója pedig legyen konstans.

$$= \int \frac{2t}{t^2+1}dt + \int \frac{3}{t^2+1}dt = \ln|t^2+1| + 3\mathrm{arctg}\ t + c$$

Visszahelyettesítve és figyelembe véve, hogy $t^2+1 \geq 1$, tehát az abszolútérték elhagyható:

$$= \ln(e^{2x}+1) + 3\mathrm{arctg}\ e^x + c$$

13. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{5e^{2x}-8e^x}{2e^{2x}+9e^x-5}dx =$

Megoldás: Legyen

$$t = e^x \qquad t^2 = (e^x)^2 = e^{2x} \qquad x = \ln t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{t}dt$$

$$\int \frac{5e^{2x}-8e^x}{2e^{2x}+9e^x-5}dx = \int \frac{5t^2-8t}{2t^2+9t-5}\cdot\frac{1}{t}dt =$$

Egyszerűsítsünk t-vel.

$$= \int \frac{5t-8}{2t^2+9t-5}dt =$$

Egy valódi racionális törtet kaptunk másodfokú nevezővel. Nézzük meg, hogy felírható-e szorzat alakban.

$$2t^2 + 9t - 5 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{-9 \pm 11}{4}$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = -5$$

A nevező gyöktényezős alakja:

$$2t^2 + 9t - 5 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t+5) = (2t-1)(t+5)$$

Tehát a nevező szorzattá alakítható. Végezzük el a parciális törtekre bontást.

$$= \int \frac{5t-8}{2t^2+9t-5} dt = \int \frac{5t-8}{(2t-1)(t+5)} dt = \int \left(\frac{A}{2t-1} + \frac{B}{t+5}\right) =$$

$$= \int \frac{A(t+5) + B(2t-1)}{(2t-1)(t+5)} dt =$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét.

$$A(t+5) + B(2t-1) = 5t - 8$$

$$(A+2B)t + 5A - B = 5t - 8$$

A megfelelő együtthatók egyenlősége:

$$\begin{aligned} A + 2B &= 5 \\ 5A - B &= -8 \end{aligned}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert. Az második egyenlet kétszeresét adjuk hozzá az elsőhöz.

$$11A = -11 \qquad \Rightarrow \qquad A = -1 \qquad B = 3$$

Folytassuk az integrálást.

$$\int \frac{5t-8}{(2t-1)(t+5)} dt = \int \left(-\frac{1}{2t-1} + \frac{3}{t+5}\right) =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2t-1} + 3 \cdot \frac{1}{t+5}\right) = -\frac{1}{2} \ln|2t-1| + 3\ln|t+5| + c =$$

Visszahelyettesítve:

$$= -\frac{1}{2} \ln|2e^x - 1| + 3\ln|e^x + 5| + c$$

14. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}dx =$

Megoldás: Az adott intervallumon az integrandus folytonos, tehát a keresett határozott integrál létezik. Ennek értékét akkor tudjuk megadni, ha tudunk adni primitív függvényt és alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt

Végezzük el a helyettesítést:

Legyen

$$t = \sqrt{3x+1} \qquad t^2 = 3x+1 \qquad x = \frac{1}{3}(t^2-1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}t \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{2}{3}t\,dt$$

Nézzük meg, hogy helyettesítéssel a határok hogyan változnak.

Ha $\quad x = 0, \quad$ akkor $\quad t = \sqrt{3\cdot 0+1} = 1.$

Ha $\quad x = 5, \quad$ akkor $\quad t = \sqrt{3\cdot 5+1} = 4.$

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}dx = \int_1^4 \frac{\frac{1}{3}(t^2-1)}{t} \cdot \frac{2}{3}t\,dt =$$

Egyszerűsítsünk t-vel és vigyük ki a konstans szorzókat az integráljel elé:

$$= \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{1}{3}(t^2-1)dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\int_1^4 (t^2-1)dt = \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)dt =$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^4 = \frac{2}{9}\left[\frac{4^3}{3} - 4 - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)\right] = \frac{2}{9}\left[\frac{63}{3} - 3\right] = \frac{2}{9}\cdot 18 = 4$$

15. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{e^x+2}dx =$

Megoldás: Mivel az integrandus folytonos, létezik határozott integrál. Helyettesítéses integrálással alkalmazva legyen

$$t = e^x \qquad x = \ln t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{t}dt$$

Adjuk meg az új határokat.

Ha $\quad x = 0, \quad$ akkor $\quad t = e^0 = 1.$

Ha $\quad x = 1, \quad$ akkor $\quad t = e^1 = e.$

$$\int_0^1 \frac{4}{e^x+2}dx = \int_1^e \frac{4}{t+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt =$$

Helyettesítéssel egy valódi racionális törtet kaptunk, ahol a nevező szorzat alakban van. Írjuk fel az integrandust parciális törtek összegeként.

$$\frac{4}{(t+2)t} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(t+2)}{(t+2)t}$$

Írjuk fel a számlálók egyenlőségét:

$$(A+B)t + 2B = 4$$

Innen

$$A+B=0 \qquad 2B=4 \qquad \Rightarrow \qquad B=2 \qquad A=-2$$

Folytassuk az integrálást:

$$\int_1^e \frac{4}{t+2}\cdot\frac{1}{t}dt = \int_1^e \left(\frac{-2}{t+2}+\frac{2}{t}\right)dt =$$
$$= 2\int_1^e \left(-\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t}\right)dt = 2[-\ln|t+2| + \ln|t|]_1^e =$$
$$2[-\ln|(e+2)| + \ln e - (-\ln 3 + \ln 1)] =$$
$$= 2[1 - \ln|(e+2)| + \ln 3] = 2\left[1 + \ln\frac{3}{e+2}\right]$$

16. **Feladat:** $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx =$

Megoldás: Ennél a feladatnál próbáljunk meg egy olyan helyettesítést, amivel a gyökös kifejezés eltüntethető. Ügyelni kell arra is, hogy csak invertálható kifejezés jöhet szóba, azaz egy szigorúan monoton függvényt használhatunk fel.

Ezért legyen $x = \sin t$ és $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, akkor $\cos t \ge 0$.

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin t)^2} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$$

alkalmazva a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, másképp $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ trigonometrikus összefüggést.

Végezzük el a helyettesítést.

$$x = \sin t \qquad t = \arcsin x \qquad \frac{dx}{dt} = \cos t$$

Innen

$$dx = \cos t\, dt$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-(\sin t)^2} \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt =$$

Használjunk fel a $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ trigonometrikus összefüggést:

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + c =$$

Az integrálást elvégeztük, helyettesítsünk vissza.

$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{\sin(2\arcsin x)}{2}\right) + c =$$

$$\frac{1}{2}\left(\arcsin x + \frac{2\cos(\arcsin x)\sin(\arcsin x)}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c$$

mivel

$$\sin(\arcsin x) = x$$

és

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

Tehát a végeredmény:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c$$

17. **Feladat:** $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2} dx =$

Megoldás: Használjuk fel az előző feladat eredményét, azaz

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) + c$$

$$\int \sqrt{1-4x^2}\, dx = \int \sqrt{1-(2x)^2}\, dx =$$

Most alkalmazzunk $t = 2x$ helyettesítést:

$$x = \frac{1}{2}t \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \qquad dx = \frac{1}{2}dt$$

$$= \int \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}(\arcsin t - t\sqrt{1-t^2}) + c =$$

$$= \frac{1}{4}(\arcsin 2x - 2x\sqrt{1-(2x)^2}) + c$$

18. **Feladat:** $\int \sqrt{1+x^2}\,dx =$

Megoldás: Megint szükségünk van egy alkalmas helyettesítésre, amellyel a gyök eltüntethető. Ebben az esetben használjuk fel a következő összefüggéseket:

$$\text{ch}^{\,2}x - \text{sh}^{\,2}x = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{ch}^{\,2}x = 1 + \text{sh}^{\,2}x$$

Valamint

$$\text{ch}^{\,2}x = \frac{\text{ch } 2x + 1}{2}$$

Legyen

$$x = \text{sh } t \qquad \frac{dx}{dt} = \text{ch } t \qquad \Rightarrow \quad dx = \text{ch } t\,dt$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\;dx = \int \sqrt{1+(\text{sh } t)^2}\text{ch } t\,dt = \int \sqrt{(\text{ch } t)^2}\,\text{ch } t\,dt =$$

$$= \int (\text{ch } t)^2 dt = \int \frac{1+\text{ch } 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int (1+\text{ch } 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\text{sh } 2t}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\left(\text{arsh } x + \frac{\text{sh } 2(\text{arsh } x)}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}(\text{arsh } x + x\sqrt{1+x^2}) + c$$

felhasználva hogy:

$$\text{sh } (\text{arsh } x) = x$$

és

$$\text{ch } (\text{arsh } x) = \sqrt{1+\text{sh}^{\,2}(\text{arsh } x)} = \sqrt{1+x^2}$$

Tehát

$$\text{sh } 2(\text{arsh } x) = 2\text{sh } (\text{arsh } x)\text{ch } (\text{arsh } x) = 2x\,\sqrt{1+x^2}$$

19. **Feladat:** $\int \sqrt{10+6x+x^2}dx =$

Megoldás: Mivel

$$\int \sqrt{10+6x+x^2}dx = \int \sqrt{1+(3+x)^2}dx =$$

Legyen

$$x+3 = \text{sh } t \qquad t = \text{arsh } (x+3)$$

$$\frac{dx}{dt} = \text{ch } t \qquad \Rightarrow \quad dx = \text{ch } t\, dt$$

$$= \int \sqrt{1 + (3+x)^2}\, dx = \int \sqrt{1 + (\text{sh } t)^2} \cdot \text{ch } t\, dt =$$

$$\int (\text{ch } t)^2\, dt = \int \frac{1 + \text{ch } 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int (1 + \text{ch } 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\text{sh } 2t}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\left(\text{arsh } (x+3) + \frac{\text{sh } 2(\text{arsh } (x+3))}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{arsh } (x+3) + (x+3)\sqrt{1+(x+3)^2}\right) + c$$

20. **Feladat:** $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx =$

Megoldás: Az előző feladat ötletét felhasználva végezzük el a következő helyettesítést:

$$x = \text{sh } t \qquad t = \text{arsh } x$$

$$\frac{dx}{dt} = \text{ch } t \qquad \Rightarrow \quad dx = \text{ch } t\, dt$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \frac{(\text{sh } t)^2}{\sqrt{1+(\text{sh } t)^2}} \text{ch } t\, dt = \int \frac{(\text{sh } t)^2}{\text{ch } t} \text{ch } t\, dt =$$

Egyszerűsítsünk ch t-vel:

$$= \int (\text{sh } t)^2 = \int \frac{\text{ch } 2t - 1}{2} dt = \frac{1}{2} \int (\text{ch } 2t - 1) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{sh } 2t}{2} - t\right) + c = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{sh } 2\text{arsh } x}{2} - \text{arsh } x\right) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2(\text{sh arsh } x)\,(\text{ch arsh } x)}{2}\right) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} - \text{arsh } x) + c$$

21. **Feladat:** $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{x^2-1} dx =$

Megoldás: Helyettesítéshez használjuk ebben az esetben ch x függvényt. Az adott intervallumon tudjuk, hogy sh $x > 0$.

Így legyen

$$x = \text{ch } t \qquad t = \text{arch } x \qquad \frac{dx}{dt} = \text{sh } t$$

$$dx = \text{sh } t\, dt$$

$$\text{Ha} \qquad x = 1 \quad \text{akkor} \qquad t = \text{arch } 1 = 0$$

$$\text{Ha} \qquad x = 5 \quad \text{akkor} \qquad t = \text{arch } 5$$

$$\int_1^5 \sqrt{x^2-1}\,dx = \int_0^{\text{arch } 5} \sqrt{(\text{ch } t)^2 - 1}\text{sh } t\,dt = \int_0^{\text{arch } 5} \sqrt{(\text{sh } t)^2}\text{sh } t\,dt =$$

$$= \int_0^{\text{arch } 5} \text{sh } t\,\text{sh } t\,dt = \int_0^{\text{arch } 5} \text{sh }^2 t\,dt = \int_0^{\text{arch } 5} \frac{\text{ch } 2t - 1}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\text{arch } 5} (\text{ch } 2t - 1)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sh } 2t}{2} - t\right]_0^{\text{arch } 5} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\text{sh } 2\text{arch } 5}{2} - \text{arch } 5 - 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}(5\sqrt{24} - \text{arch } 5)$$

Felhasználva, hogy:

$$\text{sh } 2(\text{arch } 5) = 2\text{sh } (\text{arch } 5)\text{ch } (\text{arch } 5) =$$

$$= 2\cdot 5\sqrt{\text{ch }^2(\text{arch } x) - 1} = 10\sqrt{5^2 - 1}$$

1.3. Improprius integrálás

1.3.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx =$

   Megoldás: Egy improprius integrált kell meghatározni, mivel a felső integrálási határ ∞.

   Használjuk fel, hogy ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a,\infty[$ intervallumon, akkor $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha

   $$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

   határérték létezik (véges) és ekkor

   $$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

   Ha a határérték nem véges, akkor az improprius integrál nem létezik (divergens).

   Ennél a feladatnál az adott intervallumon az integrandus folytonos, így

   $$\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{4}{x^3}dx =$$

Szükségünk van egy primitív függvényre. Azért hogy a megoldás jobban átlátható legyen, végezzük el külön a határozatlan integrál keresését, majd térjünk vissza az improprius integrál meghatározásához.

$$\int \frac{4}{x^3}dx = 4\int x^{-3}dx = 4\frac{x^{-2}}{-2} + c = -2\frac{1}{x^2} + c$$

Folytassuk az improprius integrálást:

$$\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{4}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-2\frac{1}{x^2}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left[-2\frac{1}{b^2} + \frac{2}{4}\right] =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[-2\frac{1}{b^2}\right] + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b\to\infty \quad \Rightarrow \quad b^2\to\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b^2}\to 0$$

2. **Feladat:** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx =$

Megoldás: Az adott intervallumon folytonos függvény improprius integrálját kell meghatározni, ha létezik.

Tehát

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{3}{2}}dx =$$

Szükségünk van a határozatlan integrálra.

$$\int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2\frac{1}{\sqrt{x}} + c$$

Folytassuk az improprius integrál meghatározását.

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{3}{2}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{1}}\right] =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{\sqrt{b}}\right] + 2 = 0 + 2 = 2$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b\to\infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt{b}\to\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{b}}\to 0$$

3. **Feladat:** $\displaystyle\int_8^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}dx =$

Megoldás: Az adott intervallumon folytonos függvény improprius integrálját keressük, ha létezik.

$$\int_8^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_8^b \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_8^b (x+4)^{-\frac{1}{3}}dx =$$

Külön végezzük el a határozatlan integrál számítását.

$$\int (x+4)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{(x+4)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+4)^2} + c$$

Folytassuk az improprius integrálást:

$$= \lim_{b\to\infty}\int_8^b (x+4)^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+4)^2}\right]_8^b =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+4)^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{12^2}\right] == \lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+4)^2}\right] + 2\sqrt{3} = \infty$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b\to\infty \quad \Rightarrow \quad (b+4)^2\to\infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{(b+4)^2}\to\infty$$

Mivel a határérték nem egy véges valós szám, hanem ∞, ezért az improprius integrál nem létezik (divergens).

4. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}dx =$

Megoldás: Az integrandus folytonos az adott intervallumon, így:

$$\int_0^\infty e^{-3x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}dx =$$

Felhasználva, hogy:

$$\int e^{-3x}dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$$

folytassuk az integrálást:

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3b}}{-3} - \frac{e^0}{-3}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3b}}{-3}\right] + \frac{1}{3} =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-3e^{3b}}\right] + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Felhasználva, mivel:

$$\lim_{b\to\infty}\left[-3e^{3b}\right]=\infty$$

akkor

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-3e^{3b}}\right]=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

5. **Feladat:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx=$

Megoldás: Most az alsó integrációs határ $-\infty$. Használjuk fel, hogy ha az $f(x)$ függvény folytonos az $]-\infty,a]$ intervallumon, akkor $\displaystyle\int_{-\infty}^{b}f(x)dx$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b}f(x)dx=F(b)-\lim_{a\to-\infty}F(a)$$

határérték létezik (véges) és ekkor

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b}f(x)dx=F(b)-\lim_{a\to-\infty}F(a)$$

Ha a határérték nem véges, akkor az improprius integrál nem létezik (divergens).

Tehát

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx=$$

A határozatlan integrál:

$$\int\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx=\int(2-x)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot(-1)}+c=-2\sqrt{2-x}+c$$

Folytassuk az improprius integrálást.

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx=\lim_{a\to-\infty}\left[-2\sqrt{2-x}\right]_{a}^{1}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[-2\sqrt{2-1}+2\sqrt{2-a}\right]=-2+\lim_{a\to-\infty}\left[2\sqrt{2-a}\right]=\infty$$

felhasználva:

$$\text{ha}\quad a\to-\infty\quad\Rightarrow\quad 2-a\to\infty\quad\Rightarrow\quad\sqrt{2-a}\to\infty$$

Mivel a határérték nem egy véges valós szám, hanem ∞, ezért az improprius integrál nem létezik (divergens).

6. **Feladat:** $\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{1+x^2} dx =$

Megoldás: A definíció alapján:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{1+x^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{-1} \frac{3}{1+x^2} dx = \lim_{a \to -\infty} [3\text{arctg } x]_a^{-1} =$$

$$\lim_{a \to -\infty} [3\text{arctg } (-1) - 3\text{arctg } (a)] = 3\text{arctg } (-1) - \lim_{a \to -\infty} [3\text{arctg } (a)] =$$

$$= 3\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\frac{\pi}{4}$$

Felhasználva, hogy:

$$\text{arctg } (-1) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{és} \quad \lim_{x \to -\infty} [\text{arctg } (x)] = -\frac{\pi}{2}$$

7. **Feladat:** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4x^2} dx =$

Megoldás: Most az egyik integrációs határ sem véges. Ilyen esetben a feladatot visszavezetjük az előző esetekre. Ha f függvény folytonos és c egy tetszőleges valós szám, valamint

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \qquad \text{és} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

improprius integrálok külön-külön léteznek, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

Először végezzük el a primitív függvény keresését.

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{\text{arctg } 2x}{2} + C$$

Legyen most $c = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+4x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+4x^2} dx =$$

Határozzuk meg külön-külön az improprius integrálokat.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+4x^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+4x^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{\text{arctg } 2x}{2}\right]_a^0 =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{\text{arctg } 0}{2} - \frac{\text{arctg } 2a}{2}\right] = \frac{\text{arctg } 0}{2} - \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{\text{arctg } 2a}{2}\right] =$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+4x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+4x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\text{arctg } 2x}{2}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\text{arctg } 2b}{2} - \frac{\text{arctg } 0}{2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\text{arctg } 2b}{2}\right] - \frac{\text{arctg } 0}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4}$$

Mindkét improprius integrál külön-külön létezik (végesek a határértékek), tehát létezik a keresett integrál is és

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+4x^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+4x^2}dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+4x^2}dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Megjegyzés: A feladat kicsit egyszerűbben is megoldható, ha felhasználjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx =$$

$$= F(c) - \lim_{a\to-\infty} F(a) + \lim_{b\to\infty} F(b) - F(c) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

feltéve, hogy a két határérték külön-külön létezik.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+4x^2}dx = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty}\left[\frac{\text{arctg } 2x}{2}\right]_a^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{\text{arctg } 2b}{2} - \lim_{a\to-\infty}\frac{\text{arctg } 2a}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

8. **Feladat:** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{\frac{x}{3}}dx =$

Megoldás: Először keressünk primitív függvényt.

Alkalmazzuk az alábbi integrálási szabályt:

$$\int f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a} + c \quad \text{ahol} \quad F(x)' = f(x)$$

Ebben az esetben: $\quad ax + b = \dfrac{1}{3}x \quad$ és $\quad a = \dfrac{1}{3}$

$$\int e^{\frac{x}{3}}dx = \frac{e^{\frac{x}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3e^{\frac{x}{3}} + C$$

Használjuk fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

Legyen most $c = 3$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x}{3}}dx = \int_{-\infty}^{3} e^{\frac{x}{3}}dx + \int_{3}^{\infty} e^{\frac{x}{3}}dx =$$

Határozzuk meg külön-külön az improprius integrálokat.

$$\int_{-\infty}^{3} e^{\frac{x}{3}}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{3} e^{\frac{x}{3}}dx = \lim_{a\to-\infty} \left[3e^{\frac{x}{3}}\right]_a^3 =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \left[3e^{\frac{3}{3}} - 3e^{\frac{a}{3}}\right] = 3e - \lim_{a\to-\infty} \left[3e^{\frac{a}{3}}\right] = 3e - 0 = 3e$$

Felhasználva, hogy:

$$\text{ha} \quad a \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{3} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{a}{3}} \to 0$$

$$\int_{3}^{\infty} 3e^{\frac{x}{3}}dx = \lim_{b\to\infty} \int_{3}^{b} 3e^{\frac{x}{3}}dx = \lim_{b\to\infty} \left[3e^{\frac{x}{3}}\right]_3^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[3e^{\frac{b}{3}} - 3e^{\frac{3}{3}}\right] = \lim_{b\to\infty} \left[3e^{\frac{b}{3}}\right] - 3e = \infty$$

Felhasználva:

$$\text{ha} \quad a \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{3} \to \infty \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{a}{3}} \to \infty$$

A két improprius integrál közül csak az egyik létezik, ezért $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x}{3}}dx$ nem létezik (divergens).

9. **Feladat:** $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}dx =$

Megoldás: Vegyük észre, hogy az integrandus nincs értelmezve az $x = -1$, pontban és ezen pont jobboldali környezetében nem korlátos.

$$\lim_{x\to-1+} \frac{1}{(x+1)^2} = \left(\frac{1}{+0}\right) = \infty$$

Definíció: Ha $f :]a,b] \to \mathbf{R}$ függvény az $]a;b]$ intervallumon folytonos, de nem korlátos az a pont környezetében és

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$$

határérték létezik (véges), akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

Kezdjük a határozatlan integrál megadásával:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int (x+1)^{-2}dx = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x+1} + c$$

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-1+\epsilon}^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[-\frac{1}{x+1} \right]_{-1+\epsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[-\frac{1}{2+1} + \frac{1}{-1+\epsilon+1} \right] = -\frac{1}{3} + \frac{1}{+0} = \infty$$

Mivel a határérték nem véges, az improprius integrál nem létezik.

10. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}dx =$

Megoldás: Egy improprius integrált kell meghatároznunk, mivel az integrandus nincs értelmezve $x = 0$ pontban, és ezen pont jobboldali környezetében nem korlátos, azaz:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}} = \lim_{x \to 0+} -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = -\left(\frac{1}{+0} \right) = -\infty$$

Most is kezdjük azzal, hogy elvégezzük a határozatlan integrálást.

$$\int \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}dx = \int -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int -x^{-\frac{2}{3}}dx = -\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = -3\sqrt[3]{x} + c$$

A primitív függvényt ismerjük, számoljuk ki az improprius integrált, ha létezik.

$$\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}dx = \int_0^1 -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{0+\epsilon}^1 -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx =$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[-3\sqrt[3]{x} \right]_{0+\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \to 0} \left[-3\sqrt[3]{1} + 3\sqrt{0+\epsilon} \right] =$$

$$-3 + 3 \lim_{\epsilon \to 0} \left[\sqrt{\epsilon} \right] = -3 + 3 \cdot 0 = -3$$

A határérték véges, az improprius integrál létezik és:

$$\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt[3]{x^5}}dx = -3$$

11. **Feladat:** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

Megoldás: Egy improprius integrált kell meghatározni, mert az integrandus nincs értelmezve $x = 1$ helyen, és ezen hely baloldali környezetében a függvény nem korlátos.

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{+0} \right) = \infty$$

Definíció: Ha $f : [a, b[\to \mathbf{R}$ függvény a b pont környezetében nem korlátos, de az $[a, b[$ intervallumon folytonos és

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

határérték létezik (véges), akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

Ennél a feladatnál

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} [\arcsin x]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} [\arcsin(1-\epsilon) - \arcsin 0] =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

1.3.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx =$

Megoldás: Egy folytonos függvény improprius integrálját keressük, mivel a felső integrálási határ ∞.

Először helyettesítéssel végezzük el a határozatlan integrál keresését:

$$t = -x^2 \quad \frac{dt}{dx} = -2x \qquad dt = -2x\,dx$$

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int -2x\, e^{x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

A primitív függvény segítségével határozzuk meg az improprius integrált.

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{0}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{b^2}}\right]+\frac{1}{2} = 0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b\to\infty \quad \text{akkor} \quad b^2\to\infty \quad \text{és} \quad \frac{1}{e^{b^2}}\to 0$$

2. **Feladat:** $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^3 x}dx =$

Megoldás: A felső integrációs határ ∞, egy improprius integrált keresünk.

Először adjuk meg határozatlan integrált.

Felhasználva, hogy:

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+c \qquad n\neq -1$$

ezért, ha $f(x)=\ln x$, akkor $f'(x)=\frac{1}{x}$, tehát

$$\int \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \int \ln^{-3}x\frac{1}{x}dx = \frac{\ln^{-2}x}{-2}+c = -\frac{1}{2\ln^2 x}+c$$

Az improprius integrál:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2\ln^2 x}\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2\ln^2 b}+\frac{1}{2\ln^2 2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2\ln^2 b}\right]+\frac{1}{2\ln^2 2} =$$

$$= 0+\frac{1}{2\ln^2 2} = \frac{1}{2\ln^2 2}$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b\to\infty \quad \Rightarrow \quad \ln^2 b\to\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\ln^2 b}\to 0$$

3. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x}dx =$

Megoldás: A felső integrációs határ miatt egy folytonos függvény improprius integrálját keressük.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+e^x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\left[x-\ln(1+e^x)\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[b-\ln(1+e^b)-0+\ln(1+e^0)\right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[b-\ln(1+e^b)\right]+\ln 2 =$$

Egy $\infty-\infty$ típusú határértéket kaptunk, használjuk fel, hogy $b=\ln e^b$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln e^b-\ln(1+e^b)\right]+\ln 2 = \lim_{b\to\infty}\ln\frac{e^b}{e^b+1}+\ln 2 =$$

$$= 0+\ln 2 = \ln 2$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b\to\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{e^b}{e^b+1}\to 1 \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{e^b}{e^b+1}\to \ln 1 = 0$$

Tehát

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+e^x}dx = \ln 2$$

4. **Feladat:** $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$

Megoldás: Az alsó integrációs határ $-\infty$, egy improprius integrált keresünk.

A primitív függvény meghatározásával kezdjük. Az integrandus egy nem valódi racionális tört, alakítsuk ki a számlálóban a nevezőt, majd egyszerűsítsünk.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= x-\text{arctg } x + c$$

$$\int_{-\infty}^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[x-\text{arctg } x\right]_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[1-\text{arctg }(1)-a+\text{arctg }(a)\right] =$$

$$= 1-\text{arctg }(1)-\lim_{a\to-\infty}\left[a-\text{arctg }(a)\right] = \infty$$

A határérték nem véges, ezért az improprius integrál nem létezik (divergens).

5. **Feladat:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{10+6x+x^2}dx =$

Megoldás: Az alsó integrációs határ $-\infty$, egy improprius integrált keresünk.

Először adjunk primitív függvényt. Az integrandus egy valódi racionális tört. A számláló egy konstans, a nevezőben lévő kifejezés diszkriminánsa pedig negatív ($D = -16$), tehát a polinom nem írható fel szorzatalakban.

Ilyen esetben az integrandust $\displaystyle\frac{1}{1+(ax+b)^2}$ alakúra kell hozni. Kezdjük teljes négyzetté alakítással.

$$\int \frac{1}{10+6x+x^2}dx = \int \frac{1}{1+(x+3)^2}dx =$$

Helyettesítéssel folytatva:

$$t = x+3 \qquad \frac{dt}{dx} = 1 \qquad dt = dx$$

$$= \int \frac{1}{1+(x+3)^2}dx = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \text{arctg } t + c = \text{arctg } (x+3) + c$$

Az improprius integrál:

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{10+6x+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-3} \frac{1}{10+6x+x^2}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} [\text{arctg } (x+3)]_a^{-3} = \lim_{a\to-\infty} [\text{arctg } (0) - \text{arctg } (a+3)] =$$

$$= 0 - \lim_{a\to-\infty} [\text{arctg } (a+3)] = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad a \to -\infty \quad \Rightarrow \quad a+3 \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{arctg } (a+3) \to -\frac{\pi}{2}$$

6. **Feladat:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx =$

Megoldás:

Először végezzük el a primitív függvény keresését. Az integrandus egy valódi racionális tört. Vegyük észre, hogy a számlálóban bővítéssel kialakítható a nevező deriváltja. Mivel $(1+3x^2)' = 6x$, bővítsünk 6-tal.

$$\int \frac{x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\ln|1+3x^2| + C$$

Mivel $1 + 3x^2 > 0$, ezért az abszolútértéket a továbbiakban elhagyhatjuk.

Használjuk fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx =$$

ahol c egy tetszőleges valós szám, legyen most $c = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+3x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx =$$

Határozzuk meg külön-külön az improprius integrálokat.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+3x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{x}{1+3x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{6}\ln(1+3x^2)\right]_a^0 =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{6}\ln 1 - \frac{1}{6}\ln(1+3a^2)\right] = 0 - \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{6}\ln(1+3a^2)\right] = -\infty$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad a \to -\infty \quad \Rightarrow \quad 1+3a^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \ln(1+3a^2) \to \infty$$

Mivel már az első határérték nem véges ezért $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx$ improprius integrál nem létezik (divergens).

7. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[4]{x^3}}dx =$

Megoldás: Egy improprius integrált kell meghatároznunk, mivel az integrandus nincs értelmezve $x = 0$ pontban, és ezen pont jobboldali környezetében nem korlátos, azaz:

$$\lim_{x\to0+} \frac{3x^2+2}{\sqrt[4]{x^3}} = \left(\frac{2}{+0}\right) = \infty$$

Használjuk fel, hogy:

$$\int \frac{3x^2+2}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \left(3x^{\frac{5}{4}} + 2x^{-\frac{3}{4}}\right)dx =$$

$$= 3\frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + 2\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^9} + 8\sqrt[4]{x} + c$$

$$\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \lim_{\epsilon\to0} \int_{0+\epsilon}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[4]{x^3}}dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^9} + 8\sqrt[4]{x}\right]_{0+\epsilon}^{1} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{4}{3}\sqrt[4]{1^9} + 8\sqrt[4]{1} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{\epsilon^9} - 8\sqrt[4]{\epsilon}\right] =$$

$$= \frac{4}{3} + 8 - 0 = \frac{28}{3}$$

Tehát

$$\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \frac{28}{3}$$

8. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

Megoldás: Egy improprius integrált kell meghatározni, mert az integrandus nincs értelmezve $x = 1$ helyen, és ezen hely baloldali környezetében a függvény nem korlátos.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{+0}\right) = \infty$$

A primitív függvény keresésénél alkalmazzuk az alábbi integrálási szabályt:

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \qquad \text{ha} \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

Most $f(x) = 1 - x^2$ és $f'(x) = -2x$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + c$$

Találtunk primitív függvényt, vizsgáljuk meg az improprius integrált.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1-\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\sqrt{1-(1-\epsilon)^2} + \sqrt{1+0^2}\right] =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\sqrt{2\epsilon-\epsilon^2}\right] + 1 = 0 + 1 = 1$$

Tehát

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1$$

9. **Feladat:** $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx =$

Megoldás: Az integrandus egyik integrációs határnál sincs értelmezve, és mindkét határ környezetében a függvény nem korlátos. Válasszuk ki a $[-3, 3]$ intervallum egy tetszőleges belső pontját, például 0-t. Tehát most két határértéket fogunk felírni, és ezeknek külön-külön végesnek kell lenniük, csak akkor létezik a keresett improprius integrál.

A primitív függvény megadásával kezdjük.

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\arcsin(\frac{x}{3})}{\frac{1}{3}} + c = \arcsin(\frac{x}{3}) + c$$

$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{0}^{3-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{0}^{3-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{3}\right)\right] =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\arcsin\left(\frac{3-\epsilon}{3}\right)\right] - \arcsin 0 = \arcsin 1 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad \epsilon \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3+\epsilon}{3} \to \frac{3}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(\frac{3+\epsilon}{3}\right) \to \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

A másik határérték:

$$\int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-3+\epsilon}^{0} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3+\epsilon}^{0} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\arcsin\left(\frac{0}{3}\right) - \arcsin\left(\frac{-3+\epsilon}{3}\right)\right] =$$

$$= 0 - \arcsin(-1) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Tehát

$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Megjegyzés Ha figyelembe vesszük, hogy az integrandus egy páros függvény, akkor elég lett volna egy határértéket kiszámolni, mert:

$$\int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = 2 \int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

10. **Feladat:** $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx =$

Megoldás: Ebben az esetben az integrandus $x = 1$ pontban nincs értelmezve, és ezen pont jobb és baloldali környezetében nem korlátos. Ezért a keresett improprius integrált bontsuk fel két improprius integrál összegére.

$$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx + \int_1^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx$$

Tehát most is két határértéket kell felírnunk, és mindkettőnek végesnek kell lenniük, ellenkező esetben nem létezik a keresett improprius integrál.

Kezdjük most is a határozatlan integrállal.

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = \int (x^2-1)^{-\frac{2}{3}} 2x\,dx =$$

Folytassuk helyettesítéssel.

$$t = x^2 - 1 \qquad \frac{dt}{dx} = 2x \qquad dt = 2x\,dx$$

$$= \int t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{x^2-1} + c$$

Az első improprius kiszámolása:

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon} \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[3\sqrt[3]{x^2-1}\right]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[3\sqrt[3]{(1-\epsilon)^2-1} - 3\sqrt[3]{0^2-1}\right] =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[3\sqrt[3]{(1-\epsilon)^2-1}\right] - 3\sqrt[3]{-1} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[3\sqrt[3]{\epsilon^2-2\epsilon}\right] + 3 = 3\cdot 0 + 3 = 3$$

A második improprius kiszámolása:

$$\int_1^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{1+\epsilon}^{3} \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[3\sqrt[3]{x^2-1}\right]_{1+\epsilon}^{3} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[3\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{(1+\epsilon)^2-1}\right] =$$

$$= 3\cdot 2 - \lim_{\epsilon\to 0}\left[3\sqrt[3]{(1+\epsilon)^2-1}\right] = 6 - 3\lim_{\epsilon\to 0}\left[\sqrt[3]{\epsilon^2+2\epsilon}\right] =$$

$$= 6 - 3 \cdot 0 = 6$$

Tehát

$$\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx + \int_1^3 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = 3+6 = 9$$

2. Lineáris algebra

2.1. Vektortér

2.1.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg $5\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$, $\dfrac{1}{2}\mathbf{c}$ és $5\mathbf{a}-\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c}$ vektorokat, ha

$$\mathbf{a} = (0;-1;3;4;0)$$
$$\mathbf{b} = (1;0;-2;-1;7)$$
$$\mathbf{c} = (-3;1;7;9;0)\,.$$

Megoldás:

$$5\mathbf{a} = 5\,(0;-1;3;4;0) = (0;-5;15;20;0)$$
$$-\mathbf{b} = -1\,(1;0;-2;-1;7) = (-1;-0;2;1;-7)$$
$$\frac{1}{2}\mathbf{c} = \frac{1}{2}\,(-3;1;7;9;0) = \left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{7}{2};\frac{9}{2};0\right)$$
$$5\mathbf{a}-\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{c} = \left(-\frac{5}{2};-\frac{9}{2};\frac{41}{2};\frac{51}{2};-7\right)$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg $||\mathbf{4a}||$, $||-\dfrac{1}{2}(\mathbf{2b}-\mathbf{c})||$, $\langle\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b}\rangle$ és $\langle 2\mathbf{a},-\mathbf{c}\rangle$ kifejezések értékét, ha

$$\mathbf{a} = (0;-1;3;4;0)$$
$$\mathbf{b} = (1;0;-2;-1;7)$$
$$\mathbf{c} = (-3;1;7;9;0)\,.$$

Megoldás:

Mivel
$$4\mathbf{a} = 4\,(0;-1;3;4;0) = (0;-4;12;16;0)\,,$$
ezért
$$||\mathbf{4a}|| = \sqrt{0^2+(-4)^2+12^2+16^2+0^2} = \sqrt{416} = 4\sqrt{26}.$$

Ha felhasználjuk, hogy $||\lambda\mathbf{a}|| = |\lambda|\cdot||\mathbf{a}||$, akkor a számolás egyszerűbben is elvégezhető.

$$||\mathbf{4a}|| = 4||\mathbf{a}|| = 4\sqrt{0^2+(-1)^2+3^2+4^2+0^2} = 4\sqrt{26}$$

Mivel
$$\mathbf{2b}-\mathbf{c} = 2\,(1;0;-2;-1;7) - (-3;1;7;9;0) =$$

$$= (5; -1; -11; -11; 14)\,,$$

ezért

$$|| -\frac{1}{2}(\mathbf{2b}-\mathbf{c})|| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}||(\mathbf{2b}-\mathbf{c})|| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-11)^2 + (-11)^2 + 14^2} = \frac{1}{2}\sqrt{464} = \sqrt{116}$$

Mivel

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (\mathbf{1}; -\mathbf{1}; \mathbf{1}; \mathbf{3}; \mathbf{7})$$

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = (-\mathbf{1}; -\mathbf{1}; \mathbf{5}; \mathbf{5}; -\mathbf{7})\,,$$

ezért

$$\langle \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}\rangle = 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 5 + 3\cdot 5 + 7\cdot(-7) = -29$$

Mivel

$$2\mathbf{a} = 2\,(0; -1; 3; 4; 0) = (0; -2; 6; 8; 0)$$

és

$$-\mathbf{c} = (3; -1; -7; -9; 0)\,,$$

így

$$\langle 2\mathbf{a}, -\mathbf{c}\rangle = 0\cdot 3 + (-2)\cdot(-1) + 6\cdot(-7) + 8\cdot(-9) + 0\cdot 0 = -112$$

Ha felhasználjuk, hogy $\langle \lambda\mathbf{a}, -\mathbf{c}\rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle$, a számolás másképp is elvégezhető.

$$\langle 2\mathbf{a}, -\mathbf{c}\rangle = -2\langle \mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle = -2[0\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 + 3\cdot 7 + 4\cdot 9 + 0\cdot 0] =$$

$$-2\cdot 56 = -112$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg $3\mathbf{a}$, $-5\mathbf{b}$, $\sqrt{2}\mathbf{c}$ és $\mathbf{a}-2\mathbf{b}+4\mathbf{c}$ vektorokat, ha

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

$$3\mathbf{a} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-5\mathbf{b} = -5\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -20 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2}\mathbf{c} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -22 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix}$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg $||\mathbf{a}||$, $||\mathbf{a} - \mathbf{b}||$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ és $\langle -\mathbf{a}, 4\mathbf{c} \rangle$ kifejezések értékét, ha

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2 + 0^2} = \sqrt{30}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$||\mathbf{a} - \mathbf{b}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{37}$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + (-5) \cdot 2 + 0 \cdot 3 = -13$$

$$-\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 4\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 20 \\ -16 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\langle -\mathbf{a}, 4\mathbf{c} \rangle = (-1) \cdot 20 + (-2) \cdot (-16) + 5 \cdot 8 + 0 \cdot 12 = 52$$

Egyszerűbb a számolás, ha felhasználjuk, hogy

$$\langle -\mathbf{a}, 4\mathbf{c} \rangle = -4\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = (-4)(-13) = 52$$

5. **Feladat:** Adjuk meg

$$\mathbf{a} = (0; -1; 3; 4; 0)\,,$$

$$\mathbf{b} = (1; 0; -2; -1; 7)\,,$$

$$\mathbf{c} = (-3; 1; 7; 9; 0)$$

vektorok

$$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -7 \qquad \lambda_3 = -1$$

együtthatókkal képzett lineáris kombinációját.

Megoldás: Az **a**, **b**, **c** vektorok λ_1, λ_2, λ_3 valós számokkal képzett lineáris kombinációja a

$$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c}$$

vektor, ami ennél a feladatnál

$$4\mathbf{a} - 7\mathbf{b} - \mathbf{c} = (-4; -5; 19; 14; -49)$$

6. **Feladat:** Bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorvektorok lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{c_1} = (1; -2) \qquad \mathbf{c_2} = (4; 3)$$

Megoldás: A két vektor lineárisan független, ha lineáris kombinációjuk a zérusvektort csak a triviális módon állítják elő.

Azaz

$$x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} = \mathbf{0}$$

egyenlőség csak akkor teljesül, ha $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$.

Felhasználva, hogy

$$x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} = x_1\,(1; -2) + x_2\,(4; 3) = \mathbf{0}$$

$$(1x_1 + 4x_2\,;\, -2x_1 + 3x_2) = (0; 0)$$

Két vektor akkor egyenlő, ha koordinátáik rendre megegyeznek, azaz

$$\begin{array}{rcrcl} 1x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \end{array}$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldanunk.

Ha az első egyenlet 2-szeresét hozzáadnánk a másodikhoz, akkor

$$11x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 0$$

Behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $x_1 = 0$.

Tehát csak a triviális csupa 0 megoldás létezik, vagyis tényleg lineárisan független a két vektor.

7. **Feladat:** Lineárisan függetlenek-e az alábbi formulákkal megadott függvények?

   (*a*) $x^2 + 3x^3 - 1$, $2x^2 + 6$, x

   (*b*) e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, 1, e^{-2x}

   (*c*) $\ln(1 + e^x)$, x, 1, $\ln\sqrt{\frac{e^{-x}+1}{e^x+1}}$

Megoldás:

(a) Nézzük meg, hogy a polinomok lineáris kombinációja a 0-t hogyan állítja elő, azaz milyen $a, b, c \in \mathbf{R}$ esetén teljesül a következő egyenlőség:

$$3ax^3 + (a + 2b)x^2 + cx + 6b - a = 0$$

Írjuk fel a jobboldalt is egy harmadfokú polinommal.

$$3ax^3 + (a + 2b)x^2 + cx + 6b - a = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

Két polinom akkor egyenlő, ha együtthatóik rendre megegyeznek.

$$3a = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a = 0$$

$$a + 2b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 0$$

és

$$c = 0$$

Tehát csak $a = b = c = 0$ esetén teljesül az egyenlőség, így a három polinom lineárisan független.

(b) Mivel $e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$, így $e^x = 1 \cdot \operatorname{sh} x + 1 \cdot \operatorname{ch} x + 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^{-2x}$. Vagyis az egyik elem előáll a többi lineáris kombinációjaként, azaz összefüggőek.

(c) Vegyük észre, hogy

$$\ln \sqrt{\frac{e^{-x}+1}{e^x+1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{-x}+1}{e^x+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{e^x+1}{e^x(e^x+1)} = \frac{1}{2} \ln e^{-x} = -\frac{1}{2}x$$

Így $x = 0 \cdot \ln(1+e^x) + 0 \cdot 1 + (-2) \ln \sqrt{\frac{e^{-x}+1}{e^x+1}}$, tehát összefüggőek.

8. **Feladat:** Vizsgáljuk meg,hogy az alábbi vektorok lineárisan összefüggőek vagy függetlenek-e. Ha összefüggőek írjuk fel az egyik vektort a másik kettő lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

Az a kérdés, hogy $x_1\mathbf{b_1} + x_2\mathbf{b_2} + x_3\mathbf{b_3} = \mathbf{0}$ milyen x_1, x_2 és x_3 valós számok esetén teljesül ?

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Írjuk fel a koordinátákra vonatkozó egyenleteket:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ -1x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & = & 0 \\ & & 7x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

A harmadik egyenletből adódik, hogy $x_3 = 0$. Behelyettesítve a negyedik és első egyenletbe kapjuk, hogy $x_2 = x_1 = 0$. Tehát csak a triviális megoldás létezik, a három vektor lineárisan független.

9. **Feladat:** Állítsuk elő a $Q(x) = 2x^2 + 8x + 13$ polinomot a

$$P_1(x) = x^2 + x, \qquad P_2(x) = 3x - 1, \qquad P_3(x) = 5$$

polinomok lineáris kombinációjaként.

Megoldás: Határozzuk meg, hogy milyen $a, b, c \in \mathbf{R}$ számok esetén teljesül, hogy

$$aP_1(x) + bP_2(x) + cP_3(x) = Q(x)$$

azaz

$$a(x^2 + x) + b(3x - 1) + 5c = 2x^2 + 8x + 13$$

Rendezzük a baloldali polinomot.

$$ax^2 + (3b + a)x - b + 5c = 2x^2 + 8x + 13$$

Két polinom megegyezik, ha az azonos fokszámú kifejezések együtthatói rendre megegyeznek, azaz

$$a = 2,$$

$$a + 3b = 8 \qquad \Rightarrow \qquad b = 2$$

és

$$-b + 5c = 13 \qquad \Rightarrow \qquad c = 3$$

Tehát

$$2P_1(x) + 2P_2(x) + 3P_3(x) = Q(x)$$

2.1.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Vizsgáljuk meg,hogy az alábbi vektorok lineárisan összefüggőek vagy függetlenek-e. Ha összefüggőek írjuk fel az egyik vektort a másik kettő lineáris kombinációjaként.

$$\mathbf{a_1} = (1; 3; 2) \qquad \mathbf{a_2} = (2; 1; 5) \qquad \mathbf{a_3} = (8; -1; 21)$$

Megoldás: Meg kell nézni, hogy milyen x_1, x_2 és x_3 valós számok esetén teljesül az alábbi egyenlőség:

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3} = \mathbf{0}$$

$$x_1\,(1;3;2) + x_2\,(2;1;5) + x_3\,(8;-1;21) = \mathbf{0}$$

Írjuk fel a koordinátákra vonatkozó egyenlőségeket:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 21x_3 & = & 0 \end{array}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert. Küszöböljük ki a második és harmadik egyenletből x_1-t.

(a) lépés: Az első egyenlet (-3)- szorosát adjuk hozzá a második egyenlethez.

(b) lépés: Az első egyenlet (-2)- szeresét adjuk hozzá a harmadik egyenlethez.

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ & - & 5x_2 & - & 25x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy a harmadik egyenlet (-5)- szöröse a második egyenlet, nem hordoz új összefüggést az ismeretlenekre vonatkozóan. Azaz csak két egyenletünk van.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

A második egyenletből fejezzük ki például x_2-t az x_3-vel. Persze ezt fordítva is megtehettük volna, de akkor törtekkel kellene számolni.

$$x_2 = -5x_3$$

Ezt helyettesítsük be az első egyenletbe:

$$x_1 + 2(-5x_3) + 8x_3 = 0$$

$$x_1 = 2x_3$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = 2x_3 \qquad x_2 = -5x_3 \qquad \text{és} \quad x_3 \quad \text{tetszőleges valós szám}$$

Végtelen sok megoldást találtunk, ebből válasszunk ki egyet. Például legyen $x_3 = 1$. Ekkor

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$$

Tehát vektoregyenletnek létezik a triviálistól eltérő megoldása, azaz a három vektor lineárisan összefüggőek.

A köztük lévő kapcsolat:

$$2\mathbf{a_1} - 5\mathbf{a_2} + \mathbf{a_3} = \mathbf{0}$$

Fejezzük ki $\mathbf{a_3}$ vektort:

$$\mathbf{a_3} = -2\mathbf{a_1} + 5\mathbf{a_2}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, ha x_3-nak más értéket adtunk volna, akkor a másik két ismeretlen értéke is más lenne, de a lineáris kapcsolat minden esetben az előző egyenlet valahányszorosa lenne.

2. **Feladat:** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetlenek-e.

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Nézzük meg milyen x_1, x_2, és x_3 valós számok esetén teljesül, hogy $x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3} = \mathbf{0}$?

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A koordinátákra vonatkozó egyenlőség:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert.

Először válasszunk ki egy egyenletet, aminek a segítségével a többiből eltüntetjük x_1 ismeretlent. Ehhez válasszuk a második egyenletet.

Cseréljük fel az első két egyenletet. (Másik egyenletet is választhattuk volna, de ezzel az egyenlettel a legegyszerűbb a számolás.)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}$$

(a) Az első egyenlet (-2)-szeresét adjuk hozzá a második egyenlethez.

(b) Az első egyenletet adjuk hozzá a harmadikhoz.

(c) Az első egyenlet (-4)-szeresét adjuk hozzá a negyedik egyenlethez.

(d) Az utolsó egyenletben nincs x_1, végeztünk a kiküszöböléssel.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy az utolsó három egyenlet a második egyenlet többszörösei. Így ezek új információt nem adnak az ismeretlenekről. Elég csak az első két egyenletet vizsgálni.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{array}{rcr} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 \end{array} \qquad \text{és} \qquad x_3 \in \mathbf{R}$$

Tehát kaptunk a triviálistól eltérő más megoldást is, a három vektor lineárisan összefüggő.

Legyen $x_3 = 2$, ekkor $x_1 = 2$ és $x_2 = -4$, ekkor

$$2\mathbf{a_1} - 4\mathbf{a_2} + 2\mathbf{a_3} = \mathbf{0}$$

3. **Feladat:** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi oszlopvektorok egy 4 dimenziós vektorteret alkotnak-e.

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A megadott négy oszlopvektor akkor feszíti ki egy 4 dimenziós vektorteret, ha lineárisan függetlenek.

Tehát az a kérdés, hogy $x_1\mathbf{b_1} + x_2\mathbf{b_2} + x_3\mathbf{b_3} + x_4\mathbf{b_4} = \mathbf{0}$ milyen x_1, x_2, x_3 és x_4 valós számok esetén teljesül ?

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Írjuk fel a koordinátákra vonatkozó egyenleteket:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 4x_4 & = & 0 \end{array}$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldani. Vegyük észre, hogy a második és negyedik egyenletben nem szerepel x_3. Az első egyenletből pedig el tudjuk tüntetni x_3-t, ha a harmadik egyenlet 3-szorosát hozzáadjuk az első egyenlethez.

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 4x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 4x_4 & = & 0 \end{array}$$

Rendezzük át az egyenletrendszerünket, cseréljük fel az első és harmadik egyenletet:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 4x_4 & = & 0 \end{array}$$

Foglalkozzunk csak az utolsó három egyenlettel és próbáljuk csökkenteni az ismeretleneket.

A második egyenlet (-4)- szeresét adjuk hozzá a harmadik egyenlethez.

Majd a második egyenlet (-1)- szeresét adjuk hozzá a negyedik egyenlethez.

Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \\ & - & 7x_2 & & & - & 11x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

A negyedik egyenlet (-7)- szeresét adjuk hozzá a harmadik egyenlethez.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & & & - & 28x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

A harmadik egyenlet szerint $x_4 = 0$.

Ezt behelyettesítve a negyedik egyenletbe: $x_2 = 0$.

A behelyettesítéseket folytatva kapjuk, hogy $x_1 = 0$ és $x_3 = 0$. Tehát csak a triviális megoldás létezik, a négy vektor lineárisan független.

4. **Feladat:** Állítsuk elő $\mathbf{b}$ oszlopvektort $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ és $\mathbf{a_3}$ oszlopvektorok lineáris kombinációjaként., ha

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Oldjuk meg a következő vektoregyenletet:

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3} = \mathbf{b}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

Cseréljük fel az első és harmadik egyenletet.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Elimináljuk x_1 ismeretlent a második és harmadik egyenletből.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \\ & - & 2x_2 & - & 10x_3 & = & -7 \\ & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -7 \end{array}$$

A harmadik egyenlet (-2)- szeresét adjuk hozzá a második egyenlethez.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 7 \\ & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -7 \end{array}$$

A második egyenlet egy nyilvánvaló ellentmondás, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathbf{b}$ vektor nem állítható elő $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ és $\mathbf{a_3}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Megjegyzés Ha megnézzük ennek az az oka, hogy $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ és $\mathbf{a_3}$ vektorok lineáris összefüggőek, így a három vektor 3 dimenziós tér helyett csak egy 2 dimenziós alteret feszítenek ki. A vizsgált $\mathbf{b}$ vektor pedig nem illeszkedik ebbe az altérbe. (A három vektor függetlenségének vizsgálatánál majdnem ugyanez egyenletrendszer írnánk fel, csak a jobb oldalán lévő konstansok rendre nullák lennének, a megoldás menete ugyanaz, az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása lenne, ez pedig $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ és $\mathbf{a_3}$ vektorok lineáris függőségét jelenti.)

5. **Feladat:** Benne van-e a $\mathbf{b} = (4; 7; 9)$ vektor az $\mathbf{a_1} = (1; 3; 2)$ és $\mathbf{a_2} = (2; 1; 5)$ vektorok által generált altérben?

   Megoldás: Akkor lesz $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a_1}$ és $\mathbf{a_2}$ vektorok alterében, ha $\mathbf{a_1}$ és $\mathbf{a_2}$ lineárisan függetlenek és $\mathbf{b}$ előállítható a másik két vektor lineáris kombinációjaként.

   Azaz
$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} = \mathbf{b}$$
   Másképp
$$x_1\,(1; 3; 2) + x_2\,(2; 1; 5) = (4; 7; 9)$$
   A koordináták egyenlősége:
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & 9 \end{array}$$
   Küszöböljük ki x_1 ismeretlent az utolsó két egyenletből.
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ & - & 5x_2 & = & -5 \\ & & x_2 & = & 1 \end{array}$$
   Az utolsó két egyenlet szerint $x_2 = 1$.

   Az első egyenletbe behelyettesítve $x_1 = 2$ adódik.

   Tehát $\mathbf{b}$ vektor előállítható a másik két vektor lineáris kombinációjaként,
$$2\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} = \mathbf{b}$$
   így $\mathbf{b}$ benne van az $\mathbf{a_1}$ és $\mathbf{a_2}$ vektorok által generált altérben.

2.2. Mátrixok

2.2.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{2A}$, $-\mathbf{3B}$, $\mathbf{2A}-\mathbf{3B}$,$\mathbf{A^T}$ és $(\mathbf{B^T})^\mathbf{T}$ mátrixokat.

Megoldás: A definíciók alapján

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1+3 & 0+0 & -3+1 \\ 2+4 & 1+1 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1-3 & 0-0 & -3-1 \\ 2-4 & 1-1 & 0-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{2A}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{3B}=\begin{pmatrix} -9 & 0 & -3 \\ -12 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{2A}-\mathbf{3B}=\mathbf{2A}+(-\mathbf{3B})=\begin{pmatrix} 2-9 & 0+0 & -6-3 \\ 4-12 & 2-3 & 0-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 0 & -9 \\ -8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^T}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B^T})^\mathbf{T}=\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Feladat:** Legyen

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$, $\mathbf{5A}+\mathbf{B}-\mathbf{7C}$, $\mathbf{A^T}-\mathbf{4B}-\mathbf{6C^T}$, mátrixokat.

Megoldás:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 3+2-1 & -2+1+5 \\ 7+0-1 & 0+0-8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{5A}+\mathbf{B}-\mathbf{7C}=\begin{pmatrix} 15+2+7 & -10+1-35 \\ 35+0+7 & 0+0+56 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 & -44 \\ 42 & 56 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\mathbf{A^T}=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C^T}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

ezért

$$\mathbf{A^T}-\mathbf{4B}-\mathbf{6C^T}=\begin{pmatrix} 3-8+6 & 7-4+6 \\ -2-0-30 & 0-0+48 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -32 & 48 \end{pmatrix}$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $(\mathbf{AB})\mathbf{A}$, $\mathbf{A}(\mathbf{BA})$ és $\mathbf{A^2}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ 2×2-es mátrixok, a sorok és oszlopok száma

azonos, a szorzások elvégezhetőek.

		2	1
		0	0
3	-2	**6**	**3**
7	0	**14**	**7**

tehát $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$

		3	-2
		7	0
2	1	**13**	**-4**
0	0	**0**	**0**

tehát $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, azaz a mátrixok szorzása nem kommutatív.

		3	-2
		7	0
6	3	**39**	**-12**
14	7	**91**	**-28**

tehát $(\mathbf{AB})\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 39 & -12 \\ 91 & -28 \end{pmatrix}$

		13	-4
		0	0
3	-2	**39**	**-12**
7	0	**91**	**-28**

tehát $\mathbf{A}(\mathbf{BA}) = \begin{pmatrix} 39 & -12 \\ 91 & -28 \end{pmatrix}$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{ABA} = \mathbf{A}(\mathbf{BA}) = (\mathbf{AB})\mathbf{A}$, azaz teljesül a mátrixok szorzásra vonatkozó asszociatív tulajdonság.

		3	-2
		7	0
3	-2	**-5**	**-6**
7	0	**21**	**-14**

tehát $\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 21 & -14 \end{pmatrix}$

4. **Feladat:** Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre $\mathbf{2A}+\mathbf{X}=\mathbf{5B}$ teljesül.
Megoldás: Az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{X}=\mathbf{5B}-\mathbf{2A}=\begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 35 & -10 \\ 45 & 15 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 8 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 35 & -18 \\ 39 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Feladat:** Legyen

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg $\mathbf{AB}+\mathbf{C}$, $\mathbf{AB}+\mathbf{B}$, $\mathbf{CB}+\mathbf{A}$ és $\mathbf{BC}+\mathbf{A^T}$ mátrixokat.

Megoldás: A mátrixok különböző típusúak, ezért első lépésben mindig meg kell nézni, hogy vajon a kijelölt művelet elvégezhető-e?

$\mathbf{AB}+\mathbf{C}$ vizsgálata:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{AB} \\ (2\times\mathbf{3}) & (\mathbf{3}\times 2) & & (2\times 2) \end{array}$$

Mivel $\mathbf{A}$ mátrix oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}$ mátrix sorainak számával, azaz a belső indexek azonosak, a szorzás elvégezhető, a külső indexek pedig meghatározzák a szorzatmátrix típusát.

Valamint

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{AB} & + & \mathbf{C} & = & \mathbf{AB}+\mathbf{C} \\ (2\times 2) & & (2\times 2) & & (2\times 2) \end{array}$$

azaz $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok azonos típusúak, ezért $\mathbf{AB}+\mathbf{C}$ művelet elvégezhető.

Készítsük el $\mathbf{AB}$ szorzáshoz a táblázatot.

			9	0
			8	6
			7	9
1	2	3	**46**	**39**
4	5	6	**118**	**84**

tehát $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 46 & 39 \\ 118 & 84 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{AB}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 46 & 39 \\ 118 & 84 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 47 & 38 \\ 118 & 85 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{AB}+\mathbf{B}$ vizsgálata:

Mivel

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{AB} & + & \mathbf{B} \\ (2\times 2) & & (3\times 2) \end{array}$$

A két mátrix típusa különböző, az összeadás nem végezhető el.

$(\mathbf{BA})^\mathbf{2}$ vizsgálata:

$$\underset{(3\times\mathbf{2})}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(\mathbf{2}\times 3)}{\mathbf{A}} = \underset{(3\times 3)}{\mathbf{BA}}$$

A belső indexek azonosak, $\mathbf{BA}$ szorzat létezik. A művelet eredménye egy négyzetes mátrix, így $(\mathbf{BA})^\mathbf{2}$ művelet is elvégezhető.

		1	2	3
		4	5	6
9	0	**9**	**18**	**27**
8	6	**32**	**46**	**60**
7	9	**43**	**59**	**75**

$$\text{tehát } \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 32 & 46 & 60 \\ 43 & 59 & 75 \end{pmatrix}$$

			9	18	27
			32	46	60
			43	59	75
9	18	27	**1818**	**2583**	**3348**
32	46	60	**4340**	**6232**	**8124**
43	59	75	**5500**	**7913**	**10326**

$$\text{tehát } (\mathbf{BA})^\mathbf{2} = \begin{pmatrix} 1818 & 2583 & 3348 \\ 4340 & 6232 & 8124 \\ 5500 & 7913 & 10326 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{CB}+\mathbf{A}$ vizsgálata:

Mivel

$$\underset{(2\times\mathbf{2})}{\mathbf{C}} \cdot \underset{(\mathbf{3}\times 2)}{\mathbf{B}}$$

a belső indexek nem egyeznek meg, a művelet nem végezhető el.

$\mathbf{BC}+\mathbf{A^T}$ vizsgálata:

Mivel

$$\underset{(3\times\mathbf{2})}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(\mathbf{2}\times 2)}{\mathbf{C}} = \underset{(3\times 2)}{\mathbf{BC}}$$

és

$$\underset{(3\times 2)}{\mathbf{BC}} + \underset{(3\times 2)}{\mathbf{A^T}} = \underset{(3\times 2)}{\mathbf{BC}+\mathbf{A^T}}$$

a művelet elvégezhető.

Számolás:

		1	-1
		0	1
9	0	**9**	**-9**
8	6	**8**	**-2**
7	9	**7**	**2**

tehát $\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 8 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

Az eredmény:

$$\mathbf{BC} + \mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 8 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 10 & 3 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

6. **Feladat:** Határozzuk meg **AB**, **BA**, és **CA** szorzatokat,ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Először nézzük meg a szorzások elvégezhetőek-e.

Mivel

$$\underset{(3\times\mathbf{1})}{\mathbf{A}} \quad \underset{(\mathbf{1}\times 3)}{\mathbf{B}} = \underset{(3\times 3)}{\mathbf{AB}}$$

a belső indexek azonosak a szorzás elvégezhető.

	1	1	3
4	**4**	**4**	**12**
0	**0**	**0**	**0**
-1	**-1**	**-1**	**-3**

tehát $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Mivel

$$\underset{(1\times\mathbf{3})}{\mathbf{B}} \quad \underset{(\mathbf{3}\times 1)}{\mathbf{A}} = \underset{(1\times 1)}{\mathbf{BA}}$$

a belső indexek azonosak, a szorzás elvégezhető.

			4
			0
			-1
1	1	3	**1**

tehát $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

Mivel

$$\underset{(2\times\mathbf{3})}{\mathbf{C}} \quad \underset{(\mathbf{3}\times 1)}{\mathbf{A}} = \underset{(2\times 1)}{\mathbf{CA}}$$

a belső indexek azonosak, a szorzás elvégezhető.

			4
			0
			-1
0	-2	1	**-1**
-1	0	1	**-5**

tehát $\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

7. **Feladat:** Határozzuk meg $\mathbf{AA^T}$ és $\mathbf{A^TA}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A belső indexek megegyeznek, a műveletek elvégezhetőek.

$$\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AA^T} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^TA} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{AA^T} \neq \mathbf{A^TA}$, de mindkettő szimmetrikus.

8. **Feladat:** Határozza meg az $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{B^TA}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 10 & -8 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 10 & -8 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^TA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 10 & -8 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

9. **Feladat:** Határozza meg az $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{B^TA^T}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ 5y + z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^T A^T} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z & 5y + z \end{pmatrix}$$

10. **Feladat:** Végezzük el a következő szorzást:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x + 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$2x^2 + xy + xy + 3y^2 = 2x^2 + 2xy + 3y^2$$

11. **Feladat:** Mutassuk meg, hogy $(\mathbf{AB})^\mathbf{T} = \mathbf{B^T A^T}$, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})^\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^T A^T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

Valóban teljesül, hogy $(\mathbf{AB})^\mathbf{T} = \mathbf{B^T A^T}$

2.2.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   Határozzuk meg $\mathbf{3}((\mathbf{2A} - \mathbf{B}) - (\mathbf{A} - \mathbf{3B}))$ mátrixot.

   Megoldás:

$$\mathbf{3}\left((\mathbf{2A} - \mathbf{B}) - (\mathbf{A} - \mathbf{3B})\right) = \mathbf{3}(\mathbf{2A} - \mathbf{B} - \mathbf{A} + \mathbf{3B}) = \mathbf{3A} + \mathbf{6B} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -12 & 0 \\ 0 & 15 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 42 & 18 \\ 12 & 0 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 30 & 18 \\ 12 & 15 & -27 \end{pmatrix}$$

2. **Feladat:** Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Határozzuk meg $(\mathbf{A} + \mathbf{A^2})^\mathbf{2}$ mátrixot.

   Megoldás: Először határozzuk meg $\mathbf{A^2}$ mátrixot.

			1	-1	1
			-1	2	0
			0	-1	1
1	-1	1	**2**	**-4**	**2**
-1	2	0	**-3**	**5**	**-1**
0	-1	1	**1**	**-3**	**1**

$$\mathbf{A} + \mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -4 & 7 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Végül határozzuk meg $(\mathbf{A} + \mathbf{A^2})^\mathbf{2}$ mátrixot.

			3	-5	3
			-4	7	-1
			1	-4	2
3	-5	3	**32**	**-62**	**20**
-4	7	-1	**-41**	**73**	**-21**
1	-4	2	**21**	**-41**	**11**

Az eredmény: $(\mathbf{A} + \mathbf{A^2})^\mathbf{2} = \begin{pmatrix} 32 & -62 & 20 \\ -41 & 73 & -21 \\ 21 & -41 & 11 \end{pmatrix}$

3. **Feladat:** Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Határozzuk meg $\mathbf{AB} - \mathbf{B^2}$ mátrixot.

Megoldás: Mivel

			5	-3	2
			0	4	0
			1	3	2
-3	2	1	**-14**	**20**	**-4**
1	-1	0	**5**	**-7**	**2**
3	-2	-1	**14**	**-20**	**4**

			5	-3	2
			0	4	0
			1	3	2
5	-3	2	**27**	**-21**	**14**
0	4	0	**0**	**16**	**0**
1	3	2	**7**	**15**	**6**

Tehát

$$\mathbf{AB} - \mathbf{B^2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 20 & -4 \\ 5 & -7 & 2 \\ 14 & -20 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 & -21 & 14 \\ 0 & 16 & 0 \\ 7 & 15 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 & 41 & -18 \\ 5 & -23 & 2 \\ 7 & -35 & -2 \end{pmatrix}$$

Egyszerűbb a számolás, ha észrevesszük, hogy $\mathbf{AB} - \mathbf{B^2} = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{B}$.

4. **Feladat:** Határozzuk meg $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{AC}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

			1	4	1	0
			2	1	1	1
			1	-2	1	2
2	-3	-5	**-9**	**15**	**-6**	**-13**
-1	4	5	**12**	**-10**	**8**	**14**
1	-3	-4	**-9**	**9**	**-6**	**-11**

			0	7	3	2
			3	-2	-1	-1
			0	1	3	4
2	-3	-5	**-9**	**15**	**-6**	**-13**
-1	4	5	**12**	**-10**	**8**	**14**
1	-3	-4	**-9**	**9**	**-6**	**-11**

Tehát

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} -9 & 15 & -6 & -13 \\ 12 & -10 & 8 & 14 \\ -9 & 9 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

De ebből nem következik $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ egyenlőség.

5. **Feladat:** Határozzuk meg $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ és $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Először nézzük meg, hogy a művelet elvégezhető-e.

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ (3 \times \mathbf{2}) & (\mathbf{2} \times \mathbf{4}) & (\mathbf{4} \times 3) \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{ABC} \\ (3 \times 3) \end{matrix}$$

Az egymás mellett lévő belső indexek megegyeznek, ezért a szorzások elvégezhetőek. Ebben az esetben használjuk fel, hogy a mátrixok szorzása asszociatív, azaz $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, így elég csak $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ mátrixot kiszámolni.

Határozzuk meg $\mathbf{AB}$ szorzatot.

		2	1	0	0
		0	5	3	-1
1	-2	**2**	**-9**	**-6**	**2**
-2	2	**-4**	**8**	**6**	**-2**
0	3	**0**	**15**	**9**	**-3**

Határozzuk meg $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ mátrixot.

				1	1	1
				-3	0	1
				0	2	1
				-2	3	4
2	-9	-6	2	**25**	**-4**	**-5**
-4	8	6	-2	**-24**	**2**	**8**
0	15	9	-3	**-39**	**9**	**12**

Tehát

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{pmatrix} 25 & -4 & -5 \\ -24 & 2 & 8 \\ -39 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

6. **Feladat:** Határozzuk meg $\mathbf{AA^T}$ és $\mathbf{A^TA}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Egy négyzetes mátrix adjungáltja is vele azonos típusú négyzetes mátrix, így a szorzások elvégezhetőek.

			1	3	2
			2	-1	1
			1	0	3
1	2	1	**6**	**1**	**7**
3	-1	0	**1**	**10**	**5**
2	1	3	**7**	**5**	**14**

Tehát

$$\mathbf{AA^T} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 1 & 10 & 5 \\ 7 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

			1	2	1
			3	-1	0
			2	1	3
1	3	2	**14**	**1**	**7**
2	-1	1	**1**	**6**	**5**
1	0	3	**7**	**5**	**10**

$$\mathbf{A^TA} = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy önadjungált (szimmetrikus) mátrixokat kaptunk, de $\mathbf{AA^T} \neq \mathbf{A^TA}$

7. **Feladat:** Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ négyzetes mátrixot akár jobbról, akár balról szorozzuk meg transzponáltjával, az eredmény mindig egy szimmetrikus mátrix lesz.

   Megoldás: Négyzetes mátrixok esetén $\mathbf{AA^T}$ és $\mathbf{A^TA}$ mátrix is létezik.

   Felhasználva a transzponálásra vonatkozó $(\mathbf{AB})^\mathbf{T} = \mathbf{B^TA^T}$ azonosságot:
$$(\mathbf{AA^T})^T = (\mathbf{A^T})^\mathbf{T}\mathbf{A^T} = \mathbf{AA^T}$$
   és
$$(\mathbf{A^TA})^T = \mathbf{A^T}(\mathbf{A^T})^\mathbf{T} = \mathbf{A^TA}$$
   Ha pedig egy mátrix egyenlő a transzponáltjával, akkor ez azt jelenti, hogy a mátrix szimmetrikus.

   Tehát $\mathbf{AA^T}$ és $\mathbf{A^TA}$ mátrix is szimmetrikus.

8. **Feladat:** Keressünk olyan (valós elemű) $\mathbf{J} \in \mathbf{M}_{2\times 2}$ mátrixot, melyre $\mathbf{J^2} = -\mathbf{I}$, ahol $\mathbf{I}$ egy 2×2 egységmátrix.

   Megoldás: A $\mathbf{J} \in \mathbf{M}_{2\times 2}$ mátrixot keressük a következő alakban:
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   ahol $a, b, c,$ és d valós számok. Ekkor
$$\mathbf{J^2} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} a^2+bc &= -1 \\ ac+cd &= 0 \\ ab+bd &= 0 \\ d^2+bc &= -1 \end{aligned}$$
   Az első és utolsó egyenletből következik, hogy $a^2 = d^2$, azaz $a = d$ vagy $a = -d$.

   Másrészt, ha
$$a^2 + bc = -1 \qquad \text{akkor} \qquad bc \neq 0 \qquad (a^2 \neq -1)$$
   Tehát $c \neq 0$ és $b \neq 0$.

   Ha $a = d$ és $c \neq 0$, akkor
$$ac + cd = 2ac = 0 \qquad \text{azaz} \qquad a = d = 0$$

Ha $a = 0$, akkor $bc = -1$.

Tehát a feltételnek megfelelő mátrixok például:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Az $a = -d$ esetben szintén $d = a = 0$ és $bc = -1$ feltételek adódnak.

Megjegyzés: A $\mathbf{J^2} = -\mathbf{I}$ egyenlőség a komplex $i^2 = -1$ egyenlőség pontos megfelelője. Ily módon a komplex számok egyértelműen reprezentálhatók 2×2-es mátrixokkal. Feleltessük meg a $z = a + ib$ komplex számnak a $Z := a\mathbf{I} + b\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mátrixot, akkor ez a megfeleltetés összeg- és szorzattartó.

9. **Feladat:** Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ tetszőleges négyzetes mátrixok, akkor $\mathrm{sp}(\mathbf{AB}) = \mathrm{sp}(\mathbf{BA})$, ahol $\mathrm{sp}(\mathbf{M})$ jelöli az $\mathbf{M}$ mátrix fődiagonálisában álló elemek összegét, azaz a mátrix *nyomát*.

Megoldás:

$$\mathrm{sp}(\mathbf{AB}) = \sum_{k=1}^{n} (ab)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jk} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} (ba)_{jj} = \mathrm{sp}(\mathbf{BA})$$

10. **Feladat:** Az előző feladat eredményének felhasználásával igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{I}$$

egyenlőség semmilyen négyzetes $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ mátrixokra nem teljesül.

Megoldás: Ugyanis $\mathrm{sp}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) = \mathrm{sp}(\mathbf{AB}) - \mathrm{sp}(\mathbf{BA}) = 0$, míg $\mathrm{sp}(\mathbf{I}) = n \neq 0$.

2.3. Determinánsok

2.3.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a következő determinánsok értékét.

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 6 \cdot (-1) = 26$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

2. **Feladat:** Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

   Határozzuk meg $\det(\mathbf{B} - \mathbf{A})$, $\det(\mathbf{AB})$, $\det(\mathbf{B^2})$ és $\det(\mathbf{AA^T})$ értékét.

   Megoldás:

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 1 \cdot 4 - (-6)(-8) = -44$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 30 \\ 27 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{AB}) = 13 \cdot 9 - 30 \cdot 27 = -693$$

Másképp:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) = -63 \cdot 11 = -693$$

$$\mathbf{B^2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{B^2}) = 170 - 49 = 121$$

Másképp:

$$\det(\mathbf{B^2}) = (\det(\mathbf{B}))^2 = 11^2 = 121$$

$$\mathbf{AA^T} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & 18 \\ 18 & 81 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{AA^T}) = 4293 - 324 = 3969$$

Másképp:

$$\det(\mathbf{AA^T}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A^T}) = (-63)^2 = 3969$$

3. **Feladat:** Milyen x esetén teljesül a következő egyenlőség?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Megoldás: Mivel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 8 \end{vmatrix} = 8 - 2x = 0$$

ezért $x = 4$.

4. **Feladat:** Határozzuk meg a következő determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0+1) = 1$$

Az 1. sort hozzáadva a 3. sorhoz és 3. sor szerinti kifejtve.

5. **Feladat:** Határozzuk meg a következő determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Megoldás: Az első sor szerinti kifejtést alkalmazásával.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{-1} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = 1 + 1 = 2$$

6. **Feladat:** Határozzuk meg a következő determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Megoldás: A számolás sokat egyszerűsödik, ha észrevesszük, hogy az 1. sor (-1) -szeresét hozzáadva a 2. , majd a 3. sorhoz, akkor az utolsó sor a 2. sor kétszerese lesz, ez pedig azt jelenti , hogy a determináns értéke 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

7. **Feladat:** Határozzuk meg a következő determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{5} & 2-\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} & 1-\sqrt{5} \end{vmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{5} & 2-\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} & 1-\sqrt{5} \end{vmatrix} = (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) - (2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6}) =$$

$$= 1 - 5 - (4-6) = -2$$

8. **Feladat:** Milyen y valós számra van megoldása a $\det(\mathbf{A} - y\mathbf{I}) = 0$ egyenletnek, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

és $\mathbf{I}$ a 2×2 egységmátrix.

Megoldás: Írjuk fel először $\mathbf{A} - \mathbf{yI}$ mátrixot.

$$\mathbf{A} - \mathbf{yI} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & 6 \\ 7 & 2-y \end{pmatrix}$$

A következő determináns alakban adott egyenletet kell megoldani:

$$\begin{vmatrix} 1-y & 6 \\ 7 & 2-y \end{vmatrix} = 0$$

azaz

$$(1-y)(2-y) - 42 = 0$$

$$y^2 - 3y - 40 = 0$$

Gyökképlettel megoldva:

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 40}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2}$$

$$y_1 = 8 \qquad \text{és} \qquad y_2 = -5$$

2.3.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Számítsuk ki a következő determináns értékét a 3. sor, majd a 3. oszlop szerint.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Megoldás:

- Vegyük észre, hogy a 3. sor szerint kifejtés sokat egyszerűsödne, ha három 0 lenne a sorban. Egyik megoldás, ha $a_{32} = 4$ elemet kinulláznánk. Ennek módja, ha a determináns 4. oszlopának (-2)-szeresét hozzáadjuk a 2. oszlophoz.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -11 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & -13 & -2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -11 & 0 \\ 5 & -13 & -2 \end{vmatrix} =$$

Ha az 1. sort hozzáadjuk a 3. sorhoz és a 3. oszlop szerint fejtjük ki:

$$= (-2) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -11 & 0 \\ 8 & -13 & 0 \end{vmatrix} = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -11 \\ 8 & -13 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-13 + 88) = -300$$

- Most végezzük el a számolást a 3. oszlop szerint. Az ötlet legyen szintén ugyanaz, legyen minél több nulla a megfelelő oszlopban, ezért az 1. sort adjuk hozzá a 4.-hez:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} =$$

Majd az 1. sor (-8)-szorosát adjuk hozzá a 3. sorhoz.

$$= (-1)^{1+3} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 43 & -16 \end{vmatrix} =$$

1. oszlop szerint kifejtve:

$$= 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 43 & -16 \end{vmatrix}}_{-64-86} = -300$$

2. **Feladat:** Oldjuk meg x-re a következő egyenletet.

$$\begin{vmatrix} x & 5 & x \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2x$$

Megoldás: Először határozzuk meg a determináns értékét. Írjuk fel az 1. oszlop szerinti kifejtést:

$$\begin{vmatrix} x & 5 & x \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = x \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}_{-5} - 0 + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & x \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}_{-10-3x} =$$

$$= x(-5) + (-10 - 3x) = -8x - 10$$

Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$-8x - 10 = 2x$$

$$-10 = 10x$$

$$x = -1$$

3. **Feladat:** Oldjuk meg x-re a következő egyenletet.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Megoldás: Megint kezdjük a determináns értékének meghatározásával. Írjuk fel az 1. oszlop szerinti kifejtést:

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} - x \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-5} + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{-6} =$$

$$= -x^2 + 5x - 6$$

A következő egyenletet kell megoldani:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

Gyökképlettel megoldva:

$$x_1 = 3 \qquad s \qquad x_2 = 2$$

4. **Feladat:** Milyen y valós számra van megoldása a $\det(\mathbf{A} - \mathbf{yI}) = 0$ egyenletnek, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Megoldás: Írjuk fel először $\mathbf{A}-\mathbf{yI}$ mátrixot.

$$\mathbf{A}-\mathbf{yI}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\mathbf{y}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-y & 1 & 3 \\ 0 & 1-y & 1 \\ 0 & 1 & 1-y \end{pmatrix}$$

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\begin{vmatrix} 4-y & 1 & 3 \\ 0 & 1-y & 1 \\ 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix}=0$$

Első oszlop szerinti kifejtéssel:

$$(4-y)((1-y)^2-1)=0$$

$$(4-y)(y^2-2y)=0$$

$$y(4-y)(y-2)=0$$

Olvassuk le a megoldásokat:

$$y_1=0 \qquad y_2=4 \qquad y_3=2$$

2.4. Lineáris egyenletrendszerek

2.4.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Jelentse $\mathbf{A}$ egy lineáris egyenletrendszer mátrixát és $\mathbf{B}$ a bővített mátrixát. Határozzuk meg $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ és $\mathbf{A^2}$ mátrixokat, ha

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & - & 4x_2 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 7 \end{array}.$$

Megoldás:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{AB}$ szorzat meghatározása:

		5	-4	3
		2	1	7
5	-4	17	-24	-13
2	1	12	-7	13

Tehát

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 17 & -24 & -13 \\ 12 & -7 & 13 \end{pmatrix}$$

BA szorzat nem létezik, mivel **B** mátrix oszlopainak száma nem egyezik meg az A mátrix sorainak számával.

$\mathbf{A^2}$ mátrix meghatározása:

		5	-4
		2	1
5	-4	17	-24
2	1	12	-7

Tehát

$$\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} 17 & -24 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$$

2. **Feladat:** Jelentse **A** egy lineáris egyenletrendszer mátrixát és **B** a bővített mátrixát. Határozza meg $\det(\mathbf{A} - \mathbf{A^T})$, $\det(\mathbf{AA^T})$ és $\det \mathbf{A^2}$ kifejezések értékeit, ha

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & - & 4x_2 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 7 \end{array}.$$

Megoldás:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{A^T}) = 0 + 36 = 36$$

$$\det(\mathbf{AA^T}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A^T} = 13 \cdot 13 = 169$$

$$\det(\mathbf{A^2}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A} = 13^2 = 169$$

3. **Feladat** Lineáris egyenletrendszerek megoldásánál Gauss eliminálással a következő táblázatokat kaptuk.Olvassuk le a megoldásokat.

(a) **Táblázat**

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	2	1	6
0	1	-2	7
0	0	1	-1

Megoldás: Írjuk fel a táblázathoz tartozó egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből tudjuk, hogy $x_3 = -1$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe, kapjuk, hogy $x_2 = 5$. Ha x_3 és x_2 értékét behelyettesítjük az első egyenletbe, kapjuk, hogy $x_1 = -3$.

Tehát a megoldás: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ és $x_3 = -1$

(b) **Táblázat**

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	5	3	3
0	-1	3	2
0	0	0	4

Megoldás: Írjuk fel a táblázathoz tartozó egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ -x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet egy nyilvánvaló ellentmondás, így nincs megoldása az egyenletrendszernek. Vegyük észre, hogy a csupa nullától különböző sorok száma az egyenletrendszer mátrixában kettő, a bővített mátrixban pedig három.

Megjegyzés: Általában is kimondható, ha Gauss eliminálással kialakult a felsőháromszög alak és a csupa nullától különböző sorok száma nem egyezik meg az egyenletrendszer mátrixában és a bővített mátrixban, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek.

(c) **Táblázat**

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	-4	2	5
0	2	1	1
0	0	0	0

Megoldás: Kezdjük az egyenletrendszer felírásával.

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletet elhagyhatjuk, nem ad új információt az ismeretlenekre. Csak két egyenletünk maradt.

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Fejezzük ki a második egyenletből az egyik ismeretlent a másik segítségével. Bármelyiket választhatnánk, de a törtek elkerülése miatt fejezzük ki inkább x_3-t x_2-vel.

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_3 &= 1 - 2x_2 \end{aligned}$$

A kapott kifejezést helyettesítsük be az első egyenletbe és x_1-t is adjuk meg x_2 segítségével:

$$x_1 = 5 + 4x_2 - 2(1 - 2x_2)$$

$$x_1 = 3 + 8x_2$$

Végtelen sok megoldást kaptunk:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + 8x_2 \\ x_3 &= 1 - 2x_2 \end{aligned} \quad \text{és} \quad x_2 \in \mathbf{R}$$

Megjegyzés: A továbbiakban, ha látjuk, hogy az eliminálás során felsőháromszög mátrix kialakult és az egyenletrendszer mátrixában és bővített mátrixban a csupa nullától különböző sorok száma azonos, de kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor az mindig azt jelenti, hogy végtelen sok megoldás van.

(d) **Táblázat**

x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
1	1	-3	1	-2
0	3	3	6	12
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Megoldás: Most két csupa nulla sor miatt csak két egyenletünk maradt és van négy ismeretlenünk. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok megoldásunk van.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 12 \end{aligned}$$

A második egyenletből az egyik ismeretlent, például x_2-t, fejezzük ki a másik kettő segítségével

$$x_2 = 4 - x_3 - 2x_4$$

Helyettesítsük be a kapott kifejezést az első egyenletbe!

$$x_1 = -2 - (4 - x_3 - 2x_4) + 3x_3 - x_4 = -6 + 4x_3 + x_4$$

Az egyenletrendszer végtelen sok megoldása:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & -6 + 4x_3 + x_4 \\ x_2 & = & 4 - x_3 - 2x_4 \end{array} \quad \text{és} \quad x_3, x_4 \in \mathbf{R}$$

4. **Feladat:** Lineáris egyenletrendszerek megoldásánál Gauss-Jordan módszerrel a következő táblázatokat kaptuk. Olvassuk le a megoldásokat.

(a) **Táblázat**

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	6
0	1	0	7
0	0	1	-3

Megoldás: A főátlóban egyesek vannak, minden más elem nulla. Az eliminálást befejeztük. A táblázat a következő egyenlőségeket írja le:

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 7 \qquad x_3 = -3$$

(b) **Táblázat**

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	2
0	1	0	0
0	0	0	4

Megoldás: A táblázat utolsó sora szerint:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 4$$

ez egy nyilvánvaló ellentmondás, tehát nincs megoldása az egyenletrendszernek.

(c) **Táblázat**

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	2	3
0	1	1	2
0	0	0	0

Megoldás: Kialakult a felsőháromszög mátrix. A csupa nullától különböző sorok száma az egyenletrendszer mátrixában és bővített mátrixban azonos (2), de kisebb, mint az ismeretlenek száma (3), tehát végtelen sok megoldás van.

Az egyik ismeretlen szabadon választható, legyen $x_3 = t$. Ekkor az utolsó sor megfelelő oszlopába írjunk 1-t, a bővítő oszlop utolsó sorába pedig t-t. Majd folytassuk az eliminációt tovább, a főátlóban legyenek egyesek, minden más elem pedig legyen nulla.

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	2	3
0	1	1	2
0	0	0	0

→

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	2	3
0	1	1	2
0	0	1	t

→

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	3-2t
0	1	0	2-t
0	0	1	t

Most már leolvasható a megoldás:

$$x_1 = 3 - 2t \qquad x_2 = 2 - t \qquad x_3 = t \qquad \text{és} \qquad t \in \Re$$

Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy x_2 legyen a szabadon választható ismeretlen, azaz legyen $x_2 = i$. Most az utolsó sor második eleme legyen 1, és a bővítő oszlop utolsó eleme pedig i.

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	2	3
0	1	1	2
0	0	0	0

→

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	2	3
0	1	1	2
0	1	0	t

→

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	2	3
0	0	1	2-i
0	1	0	i

→

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	-1+2i
0	0	1	2-i
0	1	0	i

A táblázat szerint a megoldás:

$$x_1 = -1 + 2i \qquad x_2 = i \qquad x_3 = 2 - i \qquad \text{és} \qquad i \in \Re$$

Úgy tűnik, hogy most más eredményt kaptunk. Ha $i = 2 - t$ helyettesítést elvégeznénk, akkor a megoldás előző alakjához jutunk. Tehát a megoldáshalmaz ugyanaz, csak i és t különböző értékei állítják elő ugyanazt a megoldást.
Ha a szabadon válaszható ismeretlennek x_1-t választjuk, ugyanezt az eredményt kapjuk.

(d) **Táblázat**:

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	3	2	4
0	0	2	3
0	0	0	0

Megoldás: Kialakult a felsőháromszög mátrix. A csupa nullától különböző sorok száma az egyenletrendszer mátrixában és bővített mátrixban azonos (2), de kisebb, mint az ismeretlenek száma (3), tehát végtelen sok megoldás van.

Az utolsó sor szerint $2x_3 = 3$ azaz $x_3 = \frac{3}{2}$. Így a szabadon választható ismeretlen csak x_1 és x_2 lehet.

Legyen $x_2 = t$. Először cseréljük fel a második és harmadik sort. Majd a második sorban a_{22} elem legyen 1 és a bővítő oszlopban jelenjen meg t.

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	3	2	4
0	0	2	3
0	0	0	0

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	3	2	4
0	0	0	0
0	0	2	3

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	3	2	4
0	1	0	t
0	0	2	3

Most már folytatható az eliminálás. A 3. sor (-1)-szeresét adjuk hozzá az első sorhoz.

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	2	4-3t
0	1	0	t
0	0	2	3

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	1-3t
0	1	0	t
0	0	2	3

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	1-3t
0	1	0	t
0	0	1	$\frac{3}{2}$

Tehát a megoldás:

$$x_1 = 1 - 3t \qquad x_2 = t \qquad x_3 = \frac{3}{2} \qquad \text{és} \qquad t \in \Re$$

Oldjuk meg a feladatot, ha a szabadon választható ismeretlen x_1, azaz legyen $x_1 = i$.

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	3	2	4
0	0	2	3
0	0	0	0

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
0	0	0	0
1	3	2	4
0	0	2	3

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	i
1	3	2	4
0	0	2	3

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	i
0	3	2	4 - i
0	0	2	3

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	i
0	3	0	1 - i
0	0	2	3

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	i
0	1	0	$\frac{1-i}{3}$
0	0	1	$\frac{3}{2}$

Tehát a megoldás:

$$x_1 = i \qquad x_2 = \frac{1-i}{3} \qquad x_3 = \frac{3}{2} \qquad \text{és} \qquad i \in \Re$$

(e) **Táblázat**:

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	2	-1	5
0	0	0	0
0	0	0	0

Megoldás: Kialakult a felsőháromszög mátrix. A csupa nullától különböző sorok száma az egyenletrendszer mátrixában és bővített mátrixban azonos (1), de kisebb, mint az ismeretlenek száma (3), tehát végtelen sok megoldás van. De most két szabadon választható ismeretlenünk is van. Több választási lehetőség van, mi nézzük meg azt az esetet, amikor $x_2 = t$ és $x_3 = i$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	2	-1	5
0	0	0	0
0	0	0	0

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	2	-1	5
0	1	0	t
0	0	1	i

$\rightarrow$

Folytatva az eliminálást:

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	-1	5-2t
0	1	0	t
0	0	1	i

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	0	0	5-2t+i
0	1	0	t
0	0	1	i

Tehát a megoldás:

$$x_1 = 5 - 2t + i \quad x_2 = t \quad x_3 = i \qquad t \in R \qquad \text{és} \quad i \in R$$

5. **Feladat:** Milyen a esetén van pontosan egy megoldása a következő inhomogén egyenletrendszernek?

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & -7 \\ ax_1 & + & 4x_2 & = & 3 \end{array}$$

Megoldás: Egy inhomogén lineáris egyenletrendszernek akkor van pontosan egy megoldása, ha az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nem 0, azaz $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Most

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 4 \end{pmatrix} = 8 - a = 0$$

Az egyenletet megoldva $a = 8$ adódik. Ez azt jelenti, hogy ha $a \neq 8$ az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Ha $a = 8$, akkor ennél a feladatnál az egyenletrendszernek éppen nincs megoldása.

6. **Feladat:** Milyen a esetén van pontosan egy megoldása a következő egyenletrendszernek?

$$\begin{array}{rcrcl} ax_1 & - & 4x_2 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 7x_2 & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: Egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van pontosan egy, a triviális csupa 0 megoldása, ha az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nem 0, azaz $\det(A) \neq 0$.

Most

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = 7a - 12 = 0$$

Az egyenlet megoldása: $a = \dfrac{12}{7}$. Ez azt jelenti, hogy ha $a \neq \dfrac{12}{7}$, akkor csak a triviális megoldás létezik, ha $a = \dfrac{12}{7}$, akkor végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

7. **Feladat:** Milyen a esetén van végtelen sok megoldása a következő homogén lineáris egyenletrendszernek?

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ ax_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: Egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van végtelen sok megoldása, ha az egyenletrendszer mátrixának determinánsa 0, azaz $\det(\mathbf{A}) = 0$.

$$\det(\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ a & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5+2a & 0 & -5 \\ a & 1 & -2 \\ 6-2a & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

Második oszlop szerinti kifejtéssel, majd rendezve kapjuk, hogy:

$$= 1((5(5+2a) + 5(6-2a)) = 11 \neq 0$$

Ez azt jelenti, hogy a determináns értéke a-tól függetlenül mindig 11, tehát bármely a esetén csak egy, a triviális megoldás létezik.

8. **Feladat:** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi vektorok vajon lineárisan függők vagy függetlenek.

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Arra vagyunk kíváncsiak, hogy az $\mathbf{x_1 a_1}+\mathbf{x_2 a_2}+\mathbf{x_3 a_3}=\mathbf{0}$ vektoregyenletnek vajon hány megoldása van.

A vektoregyenlet felírható a következő homogén lineáris egyenletrendszerrel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Tehát az a kérdés, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van. Ezt pedig az egyenletrendszer mátrixának determinánsa határozza meg.

Most az egyenletrendszer mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -16 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -16 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 16 = 24 \neq 0$$

Tehát az egyenletrendszernek és a vektoregyenletnek is csak a triviális csupa 0 megoldása létezik, ezért a három vektor lineárisan független.

2.4.2. Összetett feladatok

Oldjuk meg a következő inhomogén lineáris egyenletrendszereket Gauss eliminációval.

1. **Feladat:**

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Megoldás: Dolgozzunk az egyenletrendszer bővített mátrixával. Az egyenletrendszer mátrixát felsőháromszög mátrix alakúra kell hozni.

A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Hozzuk létre a felsőháromszög mátrixot.

(a) Elimináljunk az első oszlopban. A számolás egyszerűbb, ha a_{11} elem éppen 1. Ezért cseréljük fel az 1. és 2. sorokat. ()

(b) Az 1. sor (-2)-szeresét adjuk hozzá a 2., majd a 3. sorhoz. Kieliminàltuk az 1. oszlopot.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 5 & 7 & -9 \end{array}\right) \sim$$

(c) Végezzük el az eliminálást a 2. oszlopban. A 2. sor (-5)- szörösét adjuk hozzá a 3. sorhoz. Kialakult a felső háromszögmátrix.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & -28 & 56 \end{array}\right)$$

Írjuk fel az egyenletrendszer új alakját!

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 + 7x_3 &= -13 \\ -28x_3 &= 56 \end{aligned}$$

Olvassuk le a megoldásokat! Az utolsó egyenletből adódik, hogy:

$$x_3 = -2$$

A második egyenletből, felhasználva, hogy $x_3 = -2$:

$$x_2 = 1$$

Behelyettesítve az első egyenletbe x_3 és x_2 értékeit kapjuk, hogy:

$$x_1 = 2$$

Tehát a megoldás:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -2$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert Gauss-Jordan eliminációval is!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & -28 & 56 \end{array}\right)$$

Folytassuk az eliminálást a főátló felett is! A megengedett műveletekkel érjük el, hogy az egyenletrendszer mátrixának helyén egységmátrix jelenjen meg. Ügyeljünk arra, hogy a főátló alatti 0-k ne változzanak.

Ezért a 3. oszlopban az utolsó sorral fogunk eliminálni. A könnyebb számolás miatt először egyszerűsítsünk a 3. sorban!

Lépéssorozat:

(a) lépés: A 3. sorban osztunk (-28)-cal.

(b) lépés: A 3. sor (-7)-szeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz.

(c) lépés: A 3. sor 3-szorosát hozzáadjuk az 1. sorhoz. Kész a 3. oszlop.

(d) lépés: A 2. sor 2-szeresét hozzáadjuk az 1. sorhoz. Kész a 2. oszlop is.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Kialakult az egységmátrix az egyenletrendszer mátrixának helyén, tehát készen vagyunk az eliminálással. Le kell még olvasni a megoldásokat:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -2$$

A kapott értékeket visszahelyettesítve az eredeti egyenletrendszerbe, számolásunkat ellenőrizhetjük.

2. **Feladat:**

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 9 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát!

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Gauss módszert alkalmazva:

Alakítsuk ki a felsőháromszög mátrixot.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$

Kész a felsőháromszög mátrix.

Írjuk fel az egyenletrendszer új alakját!

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Mivel $x_3 = -1$, a második egyenletbe helyettesítve:

$$x_2 = 2$$

Az első egyenletbe helyettesítve a kapott értékeket:

$$x_1 = 3$$

Tehát:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = -1$$

Gauss- Jordan módszerrel:

Nullázzuk ki a főátló feletti elemeket!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Az eliminálást elvégeztük, leolvasható a megoldás:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = -1$$

Az eredeti egyenletrendszerbe behelyettesítve kapjuk, hogy jól számoltunk.

3. **Feladat:**

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \end{array}$$

Megoldás: A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

Gauss- Jordan módszerrel megoldva:

Alakítsuk ki a felsőháromszög mátrixot!

A könnyebb számolás miatt a 2. sor (-1) -szeresét adjuk hozzá az 1. sorhoz, majd elimináljunk az első oszlopban.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -5 & 1 & -7 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \\ 0 & -17 & 7 & -10 \end{array}\right) \to$$

Vegyük észre, hogy a számolás egyszerűbb, ha az eliminálást a 3. oszlopban folytatjuk, azaz a 2. sor (-7)-szeresét hozzáadva a 3. sorhoz és utána cseréljük fel a 2. és 3. sort.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \\ 0 & 60 & 0 & 60 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \end{array}\right) \to$$

Elimináljunk a második oszlopban:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A megoldás:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 1$$

4. **Feladat:**

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Megoldás: A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Gauss módszerrel megoldva:

Felső háromszögmátrix kialakítása:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

Mivel a 3. sor a 2. sor kétszerese, ezért az utolsó eliminálásnál a 3. sor csupa 0 lett.

Írjuk fel az új egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 6x_2 - 10x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Három ismeretlenünk van, de csak két egyenletünk maradt az eliminálás után, az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

Fejezzük ki az egyik ismeretlent, például x_2-t x_3- mal:

$$x_2 = \frac{2 + 10x_3}{6} = \frac{1 + 5x_3}{3}$$

Helyettesítsük be a kifejezést az első egyenletbe és rendezzük az egyenletet x_1-re!

$$x_1 = 1 + 2(\frac{1 + 5x_3}{3}) - 3x_3 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_3$$

Az egyenletrendszer végtelen sok megoldása:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5 + x_3}{3} \\ x_2 &= \frac{1 + 5x_3}{3} \end{aligned} \qquad \text{és} \quad x_3 \in R$$

Gauss- Jordan módszerrel megoldva:

Felsőháromszög mátrix kialakítása:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

Mivel a csupa nullától különböző sorok száma az egyenletrendszer mátrixában és a bővített mátrixban is kettő és ez kisebb, mint az ismeretlenek száma, végtelen sok megoldás van. Az egyik ismeretlen szabadon választható. Legyen $x_3 = t$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 0 & 1 - 3t \\ 0 & 3 & 0 & 1 + 5t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -2 & 0 & 1 - 3t \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1 + 5t}{3} \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5 + t}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1 + 5t}{3} \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{5+t}{3} \qquad x_2 = \frac{1+5t}{3} \qquad x_3 = t \quad \text{és} \quad t \in R$$

Egy megoldás a végtelen sok közül, ha:

$$t = 1 \qquad x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 1$$

5. **Feladat:**

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ -3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -18 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & -10 \end{array}$$

A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & 2 & -2 & -18 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -18 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -18 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mivel a csupa nullától különböző sorok száma az egyenletrendszer mátrixában és a bővített mátrixban is három, de ez kisebb, mint az ismeretlenek száma, végtelen sok megoldás van. A 3. sor szerint $x_4 = 0$. Így a szabadon választható ismeretlenek: x_1, x_2 vagy x_3 lehet. Legyen most x_3 a szabadon választható ismeretlen, azaz $x_3 = t$. Cseréljük fel az utolsó két sort.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

A főátlóban lévő $b_{33} = 0$ helyére írjunk be 1-t és a bővítő oszlop 3. eleme helyére pedig t-t és folytassuk az eliminálást!

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 8+t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6+t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6+t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

A megoldás:

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 6+t \qquad x_3 = t \qquad x_4 = 0 \qquad \text{és} \qquad t \in R$$

A végtelen sok megoldás közül adjuk meg azt a megoldást, ha $t = 3$:

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 9 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = 0$$

6. **Feladat:**

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 5 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

Megoldás: A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Felső háromszög kialakítása:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & 14 & -8 & -2 \\ 0 & -15 & 21 & -12 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -4 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & -15 & 21 & 3 & -3 \\ 0 & -10 & 14 & -8 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

Vegyük észre, hogy a 2. sor többszörösei a 3. és 4. sor! Folytatva az eliminálást két csupa 0 sor alakul ki.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

Most két ismeretlent fogunk szabadon választani. Legyen $x_3 = t_1$ és $x_4 = t_2$.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -4 & 0 & 2-3t_2 \\ 0 & -5 & 7 & 0 & -1+4t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 2-3t_2+4t_1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -1+4t_2-7t_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & (14+t_2-t_1)/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (-1+4t_2-7t_1)/(-5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 \end{array}\right)$$

Olvassuk le a megoldást:

$$x_1 = \frac{14+t_2-t_1}{5} \quad x_2 = \frac{1-4t_2+7t_1}{5} \quad x_3 = t_1 \quad x_4 = t_2 \quad \text{és} \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

7. **Feladat:**

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 \end{array}\right)$$

Felső háromszög kialakítása:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

Kész a felsőháromszög alak, leolvasható, hogy $x_4 = 0$. A harmadik egyenletből adódik, hogy $x_3 = 0$. Folytatva a behelyettesítéseket kapjuk, hogy $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, tehát csak a triviális megoldás létezik.

Ugyanerre a következtetésre jutunk, ha kiszámoljuk az egyenletrendszer mátrixának determinánsát.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -11$$

Mivel $\det(\mathbf{A}) = 11 \neq 0$, tehát az egyenletrendszernek csak a triviális megoldása létezik.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ugyanazokkal a műveletekkel számoltunk mindkét esetben.

8. **Feladat:**

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Felsőháromszög kialakítása:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1.\leftrightarrow 2.} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)\cdot 1.+3.]{(-2)\cdot 1.+2.}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\cdot 1.+4.} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(-3)\cdot 2.+4.]{(-2)\cdot 1.+3.}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 10 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2)\cdot 3.+4.} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

Felsőháromszög kialakult, a csupa nullától különböző sorok száma kisebb, mint az ismeretlenek száma, végtelen sok megoldás van. Az egyik ismeretlent szabadon választhatjuk. Legyen most $x_4 = t$ és folytassuk az eliminálást.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow[5\cdot 4.+2.]{(-1)4.+3.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 5t \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow{(-3)\cdot 4.+1.} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & -3t \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 5t \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow{3./(-2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & -3t \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 5t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot 3.+1.]{(-7)\cdot 3.+2.} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -2t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3t/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow{2.+1.}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -t/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3t/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Innen az egyenletrendszer megoldása leolvasható:

$$x_1 = -\frac{t}{2} \qquad x_2 = \frac{3t}{2} \qquad x_3 = \frac{t}{2} \qquad x_4 = t \qquad \text{és} \qquad t \in R$$

A megoldásban a törteket elkerülhettük volna, ha ügyesebben választunk szabadon választható ismeretlent. Legyen $x_3 = l$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & l \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2l \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -7l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & l \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 2l \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -7l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -4l \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l \end{array}\right) \to$$

Tehát a megoldás:

$$x_1 = -l \qquad x_2 = 3l \qquad x_3 = l \qquad x_4 = 2l \qquad \text{és} \qquad l \in R$$

9. **Feladat:** Vizsgáljuk meg, hogy b és c milyen értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek végtelen sok megoldása vagy egyértelmű megoldása, illetve milyen b és c esetén nincs megoldás?

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & - & 6x_4 & = & 9 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 7x_3 & + & cx_4 & = & b \end{array}$$

Megoldás: A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & c & b \end{array}\right)$$

Felső háromszög kialakítása:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & c & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & c & b \end{array}\right)$$

Elimináljuk az első oszlopot.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 7 & -5 & 13 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 7 & c+6 & b-9 \end{array}\right) \to$$

Az első oszlop kész, de a 2. oszlopban nincs 1 vagy -1. A számolást törtekkel folytatódna. Ahhoz, hogy ezt elkerüljük, 3. sor (-3)- szorosát adjuk hozzá a 2. sorhoz.

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 7 & c+6 & b-9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 7 & c-43 & b-44 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & c-43 & b-44 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 2- & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & c-15 & b-9 \end{array}\right) \to$$

A táblázatból leolvasható, ha $c = 15$ és $b \neq 9$, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek.

Ha $c = 15$ és $b = 9$, akkor végtelen sok megoldás van.

Ha $c \neq 15$ és b tetszőleges valós szám, akkor pontosan egy megoldás van.

10. **Feladat:** Írjuk fel a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektort az

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lineárisan független vektorok lineáris kombinációjaként!

Megoldás: Azt szeretnénk megtudni, hogy milyen x_1, x_2 és x_3 ismeretlenek esetén teljesül az $x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3} = \mathbf{b}$ vektoregyenlet.

A vektoregyenlet a következő inhomogén lineáris egyenletrendszernek felel meg:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval az egyenletrendszert!

A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -16 & 8 & -72 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -40 & 0 & -40 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-6)\cdot 1.+3} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -16 & 8 & -72 \end{array}\right) \xrightarrow{(-8)\cdot 2.+3.}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -40 & 0 & -40 \end{array}\right) \xrightarrow{3./(-40)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-3)\cdot 3.+2.}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2.+1.} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Olvassuk le az egyenletrendszer megoldását!

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -7$$

Tehát a $\mathbf{b} = \mathbf{2a_1} + \mathbf{a_2} - \mathbf{7a_3}$

11. **Feladat:** Írjuk fel a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektort az

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektorok lineáris kombinációjaként!

Megoldás: Nézzük meg, hogy milyen x_1, x_2 és x_3 ismeretlenek esetén teljesül az $x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + x_3\mathbf{a_3} = \mathbf{b}$ vektoregyenlet.

A vektoregyenlet a következő inhomogén lineáris egyenletrendszerrel írható fel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 7x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Oldjuk meg Gauss-Jordan eliminációval az egyenletrendszert!

A bővített mátrix:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -7 & 21 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -7 & 21 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

A középső sor szerint:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$$

ami nyilvánvaló ellentmondás, tehát $\mathbf{b}$ vektor nem állítható elő a megadott három vektorral.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1.\leftrightarrow 2.} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)\cdot 1.+3.]{(-2)\cdot 1.+2.} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -7 & 21 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -7 & 21 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(-7)\cdot 3.+2.} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

2.5. Inverzmátrix

2.5.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a következő mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Tudjuk, hogy ha $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, akkor

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Most $\det(\mathbf{A}) = 13$.

Tehát

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{4}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

2. **Feladat:** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ mátrix inverze.

Megoldás: Az állítás igaz, mivel $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ teljesül, ahol $\mathbf{I}$ egységmátrix.

3. **Feladat:** Határozzuk meg a következő mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mivel $\det(\mathbf{A}) = -35 \neq 0$ van inverz.

Készítsük el a táblázatot. Az $\mathbf{A}$ mátrix mellé írjunk egy vele azonos típusú egységmátrixot:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

A Gauss elimináció sorműveleteivel érjük el, hogy a táblázat baloldalán jelenjen meg az egységmátrix. Ha jól számoltunk, akkor a táblázat jobboldalán megkapjuk az inverz mátrixot.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{array}\right)$$

Tehát a mátrix inverze:

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg a következő mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Mivel $\det(\mathbf{A}) = -20 \neq 0$ van inverz.

Készítsük el a táblázatot.

A sorok rendezésével a főátló alatt csak nullák vannak.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

Főátló felett is csak nullák legyenek:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. **Feladat:** Határozzuk meg λ értékét úgy, hogy következő mátrixnak legyen inverze.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & \lambda \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrixnak van inverze, ha determinánsa nem nulla, azaz

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & \lambda \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 20 \end{pmatrix} \neq 0$$

A determinánst második sora szerint kifejtve:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & \lambda \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 20 \end{pmatrix} = 2(20 - 4\lambda) \neq 0$$

Tehát ha $\lambda \neq 5$ a mátrixnak van inverze.

6. **Feladat:** Határozzuk meg x értékét úgy, hogy következő mátrixnak ne legyen inverze!

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & 6 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Az osztás miatt a megoldást az $x \neq 0$ valós számok halmazán keressük. A mátrixnak nincs inverze, ha determinánsa nulla. Az első sor szerinti kifejtéssel:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{x}(6 - x^2) - 0 + 1(-1) = 0$$

Rendezzük a kapott egyenletet!

$$-x^2 - x + 6 = 0$$

Gyökképlettel megoldva:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2}$$

$$x_1 = -3 \quad \text{és} \quad x_2 = 2$$

Tehát a mátrixnak nincs inverze, ha $x_1 = -3 \quad \text{vagy} \quad x_2 = 2$.

7. **Feladat:** Milyen p paraméter esetén van inverze a következő mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & p \\ 6 & p & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & p \end{pmatrix}$$

Megoldás: Ha a mátrix determinánsa nem nulla, akkor van inverz. Az utolsó sort vonjuk ki az első sorból, majd használjunk utolsó oszlop szerinti kifejtést.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & p \\ 6 & p & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & p \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & p & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & p \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+4} \cdot p \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & p & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= p \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & p-12 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} = p(3(p-12)+12) = 0$$

Rendezve az egyenletet:

$$p(3p-24) = 0 \qquad \text{ha} \quad p_1 = 0 \quad \text{vagy} \quad p_2 = 8$$

Tehát a mátrixnak van inverze, ha $p \neq 0$ vagy $p \neq 8$.

2.5.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a következő mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Először nézzük meg, hogy van-e inverze a mátrixnak. Határozzuk meg $\det(\mathbf{A})$ értékét.

Az utolsó sort hozzáadva az 1. sorhoz, majd 1. sor szerint kifejtve:

$$\det \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1(1-2) = 1$$

Tehát $\det(\mathbf{A}) = 1 \neq 0$, van inverze a mátrixnak.

Az inverzet Gauss eliminációval fogjuk megoldani. Készítsük el a kiindulási táblázatot.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

Első lépésben cseréljük fel az 1. és 2.-t.Majd végezzük el az első oszlop eliminálását. Az 1. sor (-2)-szeresét adjuk hozzá a 2. sorhoz, majd az 1. sor 2-szeresét adjuk hozzá a 3. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

Kialakult a felső háromszögmátrix. A baloldali mátrix főátlója felett folytassuk az eliminálást.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

Szorozzuk meg (-1)-gyel az 1. sort.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

A baloldali mátrix helyén kialakult az egységmátrix, akkor a jobboldali mátrix lesz a keresett inverz mátrix,

Tehát

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az a következő mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Először nézzük meg, hogy van-e inverze a mátrixnak. Határozzuk meg a determinánsát. Vegyük észre, hogyha az 1. oszlop (-2)-szeresét hozzáadjuk a 3. oszlophoz, akkor 3. oszlop szerint kifejtve a determinánst:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = (-1)(6-5) = -1$$

tehát a determináns nem nulla, van inverze az $\mathbf{A}$ mátrixnak.

Írjuk fel a Gauss eliminációhoz tartozó táblázatot.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

Az 1. sor (-1)-szeresét adjuk hozzá a 2. és 3. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

A 2. sor (-2)-szeresét adjuk hozzá a 3. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

Kész a felső háromszögmátrix a baloldali mátrixnál, elimináljunk a főátló felett. A 3. sort adjuk hozzá az 1, és 2. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

A 2. sor 4- szeresét adjuk hozzá az 1. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

Szorozzuk meg az utolsó sort (-1)-gyel.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Tehát

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Számolásunkat ellenőrizzük le:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát jól számoltunk.

3. **Feladat:** Határozzuk meg az a következő mátrix inverzét.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Először nézzük meg, hogy van-e inverze a mátrixnak. Határozzuk meg a determinánsát. A 2. sort adjuk hozzá a 1. sorhoz.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

Az 1. oszlop (-1)-szeresét adjuk hozzá a 3. oszlophoz. Az első sor szerinti kifejtés helyett célszerű lenne a főátló felett kieliminálni. A 2. oszlop (-1)-szeresét adjuk hozzá a 4. oszlophoz.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

A utolsó sort adjuk hozzá a 3. sorhoz.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 16 \neq 0$$

Tehát van inverz. Gauss eliminációval megoldva: Elimináljunk a főátló alatt:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

Elimináljunk a főátló felett, kezdjük a 4. oszloppal :

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right) \to$$

Tehát

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg $(\mathbf{A^2})^{-\mathbf{1}}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás:

$$\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 11 & 5 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Inverz meghatározása:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 10 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 25 & -9 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 25 & -9 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 3 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$(\mathbf{A^2})^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \\ -9 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Oldjuk meg a feladatot másképp is.

Vegyük észre, hogy $(\mathbf{A^2})^{-1} = (\mathbf{A^{-1}})^{\mathbf{2}}$. Most határozzuk meg először az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

Az inverz:

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A^{-1}})^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \\ -9 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

5. **Feladat:** Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M_{n\times n}}$ felcserélhető reguláris mátrixok, akkor

   - $\mathbf{A^{-1}}$ és $\mathbf{B}$ is felcserélhetőek, azaz $\mathbf{A^{-1}B} = \mathbf{BA^{-1}}$.
   - $\mathbf{B^{-1}}$ és $\mathbf{A}$ is felcserélhetőek, azaz $\mathbf{B^{-1}A} = \mathbf{AB^{-1}}$.
   - $\mathbf{A^{-1}}$ és $\mathbf{B^{-1}}$ is felcserélhetőek, azaz $\mathbf{A^{-1}B^{-1}} = \mathbf{B^{-1}A^{-1}}$.

   Megoldás:

   - Legyen $\mathbf{C} = \mathbf{A^{-1}B}$, akkor $\mathbf{CA} = \mathbf{A^{-1}BA} = \mathbf{A^{-1}AB} = \mathbf{B}$, innen $\mathbf{C} = \mathbf{BA^{-1}}$
   - Legyen $\mathbf{C} = \mathbf{B^{-1}A}$, akkor $\mathbf{CB} = \mathbf{B^{-1}AB} = \mathbf{B^{-1}BA} = \mathbf{A}$, innen $\mathbf{C} = \mathbf{AB^{-1}}$
   - $\mathbf{A^{-1}B^{-1}} = (\mathbf{BA})^{\mathbf{-1}} = (\mathbf{AB})^{\mathbf{-1}} = \mathbf{B^{-1}A^{-1}}$.

6. **Feladat:** Bizonyítsuk, be hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{n\times n}}$ reguláris mátrix szimmetrikus, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix inverze is szimmetrikus.

   Megoldás: Tudjuk, hogy $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, azaz $\mathbf{A^T} = \mathbf{A}$ és létezik inverze, azaz van olyan $\mathbf{A^{-1}}$-gyel jelölt mátrix, amelyre $\mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{AA^{-1}} = \mathbf{I}$.

   Ekkor
   $$\mathbf{I} = \mathbf{I^T} = (\mathbf{A^{-1}A})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A^T}(\mathbf{A^{-1}})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}(\mathbf{A^{-1}})^{\mathbf{T}}$$

Így

$$(\mathbf{A^{-1}})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A^{-1}}$$

Vagyis $\mathbf{A^{-1}}$ inverzmátrix is szimmetrikus.

2.6. Sajátérték és sajátvektor

2.6.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Írja fel az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomját.

Megoldás: Egy $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, ami ebben az esetben egy harmadfokú polinom λ-ra nézve.

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$

Harmadik oszlop szerinti kifejtéssel:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4-\lambda \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (5-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2(4-\lambda) + (5-\lambda)(-\lambda(4-\lambda) - 3) =$$

Rendezve:

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda - 23$$

Tehát $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda - 23$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

1. megoldás Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei a $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ karakterisztikus polinom gyökei.

Ebben az esetben a karakterisztikus polinom λ egy másodfokú polinomja lesz:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (3-\lambda)(-2-\lambda)+4 = \lambda^2-\lambda-2$$

Ennek keressük meg a gyökeit:

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$
$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1$$

Tehát a mátrixnak két sajátértéke van:

$$\lambda_1 = 2 \qquad \text{és} \qquad \lambda_2 = -1$$

2. megoldás:

Ha λ_1 és λ_2 az $\mathbf{A} \in \mathbf{M_{2\times 2}}$ mátrix sajátértékei, akkor bebizonyítható, hogy

$$\lambda_1+\lambda_2 = \mathrm{sp}(\mathbf{A}) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\lambda_1\lambda_2} = \det(\mathbf{A}),$$

ahol sp$\mathbf{A}$ jelenti $\mathbf{A}$ mátrix főátlójában lévő elemeinek összegét.

Ebben az esetben

$$\mathrm{sp}(\mathbf{A}) = \mathbf{3}+(-\mathbf{2}) = \mathbf{1} \qquad \text{és} \qquad \det(\mathbf{A}) = -\mathbf{2}$$

Tehát

$$\lambda_1+\lambda_2 = 1 \qquad \text{és} \qquad \lambda_1\lambda_2 = -2$$

Fejezzük ki λ_1-t λ_2-vel az első egyenletből, majd helyettesítsük be a másik egyenletbe.

$$\lambda_1 = 1-\lambda_2$$
$$(1-\lambda_2)\lambda_2 = -2$$

Rendezve az egyenletet:

$$0 = \lambda_2^2-\lambda_2-2$$

A kapott egyenlet megoldva a sajátértékek:

$$\lambda_1 = 2 \qquad \text{és} \qquad \lambda_2 = -1$$

3. **Feladat:** Az alábbi vektorok közül válasszuk ki azokat, amelyek az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektorai, ha

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

Megoldás: Egy $\mathbf{a}$ vektor akkor sajátvektora az $\mathbf{A}$ mátrixnak, ha $\lambda \in \mathbf{R}$ és $\mathbf{Aa} = \lambda\mathbf{a}$ egyenlőség teljesül, azaz az $\mathbf{A}$ mátrix az $\mathbf{a}$ vektort önmagának valahányszorosába viszi át.

$$\mathbf{Aa} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\sqrt{3} \\ 20\sqrt{3} \end{pmatrix} = \mathbf{10}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Tehát $\mathbf{A}$ mátrix az $\mathbf{a}$ vektort önmagának 10-szeresébe vitte át, ezért sajátvektor és hozzátartozó sajátérték éppen 10.

Vizsgáljuk meg $\mathbf{b}$ vektort:

$$\mathbf{Ab} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Tehát $\mathbf{A}$ mátrix az $\mathbf{b}$ vektort önmagába vitte át, ezért sajátvektor és hozzátartozó sajátérték éppen 1.

Vizsgáljuk meg a $\mathbf{c}$ vektort:

$$\mathbf{Ac} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -31 \end{pmatrix}$$

Ebben az esetben $\begin{pmatrix} -9 \\ -31 \end{pmatrix}$ vektor nem írható fel a $\mathbf{c}$ vektor többszöröseként, tehát a $\mathbf{c}$ vektor nem sajátvektor.

4. **Feladat:** Keresse meg az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix $\lambda_1 = -2$ sajátértékéhez tartozó sajátvektorát.

Megoldás: Egy sajátértékhez tartozó sajátvektor meghatározásának első lépése, hogy felírjuk a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{s} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldásaként kapjuk a keresett $\mathbf{s}$ sajátvektort. Nagyon fontos, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálistól eltérő megoldásait keressük.

Ebben az esetben keressük a sajátvektort $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ alakban.

A homogén lineáris egyenletrendszer mátrixegyenlete :

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{2I})\mathbf{s} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Írjuk fel a homogén lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 5s_1 - s_2 &= 0 \\ 7s_3 &= 0 \end{aligned}$$

A triviálistól eltérő megoldások:

$$s_3 = 0 \qquad s_2 = 5s_1 \qquad s_1 \in \mathbf{R} \quad \text{és} \quad t \neq 0$$

Ha elvégezzük az $s_1 = t$ helyettesítést, a megoldás felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} s_1 &= t \\ s_2 &= 5t \qquad t \in R \quad \text{és} \quad t \neq 0 \\ s_3 &= 0 \end{aligned}$$

Végtelen sok megoldást kaptunk, tehát végtelen sok sajátvektor tartozik $\lambda_1 = -2$ sajátértékhez. De ezek csak egy konstansban térnek el egymástól.

A sajátvektor:

$$\mathbf{s}_{\lambda=\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} t \\ 5t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{t} \neq \mathbf{0}$$

2. Megoldás:

Oldjuk meg a feladatot Gauss-Jordan módszerrel is.

Ebben az esetben az egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

A mátrix felsőháromszög alakú, egy csupa nulla sorral. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok megoldás van. Az egyik ismeretlen szabadon választható, legyen $s_1 = t$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to$$

Gauss-Jordan eliminálást alkalmazva:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -5t \\ 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 5t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

Az egyenletrendszer nem triviális megoldásai:

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & t \\ s_2 & = & 5t \quad t \in R \quad \text{és} \quad t \neq 0 \\ s_3 & = & 0 \end{array}$$

A sajátvektor:

$$\mathbf{s}_{\lambda=\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} t \\ 5t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{t} \neq \mathbf{0}$$

Számolásunkat ellenőrizni tudjuk. Válasszunk ki egy vektort a végtelen sokból és ha teljesül rá a $A\mathbf{s} = -\mathbf{2s}$ egyenlőség, akkor jól számoltunk. Legyen most $t = 1$, ekkor

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tehát jól számoltunk.

5. **Feladat:** Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Megoldás A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)(-3-\lambda) = 0$$

A sajátértékek:

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 4 \qquad \lambda_3 = -3$$

A sajátvektor, ha $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcl} 2s_2 & = & 0 \\ -5s_3 & = & 0 \end{array}$$

Az egyenletrendszer nem triviális megoldásai:

$$\begin{array}{rcl} s_2 & = & 0 \\ s_3 & = & 0 \end{array} \qquad \text{és} \qquad s_1 \in \mathbf{R} \quad \text{és} \quad s_1 \neq 0$$

A sajátvektor, ha $\lambda_1 = 2$:

$$\mathbf{s}_{\lambda=\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in R \quad \text{és} \quad t \neq 0$$

Hasonlóan levezetve:

$$\mathbf{s}_{\lambda=\mathbf{4}} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{s}_{\lambda=-\mathbf{3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \neq 0$$

2.6.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Megoldás Írjuk fel a mátrix karakterisztikus polinomját és keressük meg a gyökeit:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1$$

Tehát a mátrixnak két sajátértéke van:

$$\lambda_1 = 2 \qquad \text{és} \qquad \lambda_2 = -1$$

Keressük meg a sajátértékekhez tartozó $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ sajátvektorokat:

Ha $\lambda = 2$

A keresett sajátvektor a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként adódik:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{2I})\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Gauss eliminációt alkalmazva kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Kialakult a csupa nulla sor, végtelen sok megoldás van, legyen a szabadon választható ismeretlen $s_2 = t$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer nem triviális megoldásai:

$$s_1 = t \qquad \text{és} \qquad s_2 = t \quad t \in R \quad \text{és} \quad t \neq 0$$

A sajátvektor:

$$\mathbf{s_{\lambda=-1}} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \neq 0$$

Számolásunkat ellenőrizzük:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sajátérték meghatározása, ha $\boldsymbol{\lambda_2 = -1}$.

A keresett sajátvektor most a következő egyenletrendszer megoldásaként adódik:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{1} \cdot \mathbf{I})\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer bővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 4 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Gauss eliminációt alkalmazva kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A szabadon választható ismeretlen legyen $s_2 = t$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 4 & 0 & t \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & t/4 \\ 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer nem triviális megoldásai:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{t}{4} \qquad t \in R \quad \text{és} \quad t \neq 0 \\ s_2 &= t \end{aligned}$$

A sajátvektor:

$$\mathbf{s}_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} \frac{t}{4} \\ t \end{pmatrix} = \mathbf{t} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{t} \neq \mathbf{0}$$

Számolásunkat ellenőrizzük, ha $t = 4$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. **Feladat:** Keressük meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Kezdjük a sajátérték meghatározásával, írjuk fel a karakterisztikus polinomot:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

A karakterisztikus polinom 3. sor szerinti kifejtéssel:

$$\lambda[(-\lambda-1)^2 - 1] = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda) = \lambda^2(\lambda + 2) = 0$$

Ennek a harmadfokú polinomnak a gyökei: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = -2$. Tehát $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \text{és} \qquad \lambda_3 = -2$$

A sajátértékeket ismerjük, keressük meg a hozzájuk tartozó sajátvektorokat:

Ha $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$

A sajátvektor egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként adódik, amelynek együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A} - \mathbf{0} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Sőt, ha az 1. sort hozzáadjuk a 2. sorhoz, akkor most nem csak egy, hanem két csupa nulla sor van. Ebben az esetben két ismeretlen is szabadon választható. Legyen $s_2 = u$ és $s_3 = v$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -u \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & v \end{pmatrix} \to$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} s_1 &= u \\ s_2 &= u \qquad u, v \in \mathbf{R} \\ s_3 &= v \end{aligned}$$

A $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\mathbf{s}_{\lambda=\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

feltéve, hogy u és v egyszerre nem egyenlő 0-val.

Számolásunkat ellenőrizzük le. Legyen $u = 3$ és $v = -1$, ekkor

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tehát jól számoltunk.

*Megjegyzés:*Ebben az esetben megadható két lineárisan független megoldás is.

Ha $u = 0$, akkor

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ha $v = 0$, akkor

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ha $\lambda_3 = -2$

Írjuk fel a homogén lineáris egyenletrendszer mátrixát, amelynek megoldásaként adódik a keresett sajátvektor.

$$\mathbf{A} + \mathbf{2} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ha az 1. sor (-1) -szeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz, kialakult a csupa nulla sor, végtelen sok megoldás van. Legyen $s_2 = t$. Olvassuk le a megoldásokat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

A megoldás:

$$\begin{array}{rcr} s_1 & = & -t \\ s_2 & = & t \qquad t \in R \\ s_3 & = & 0 \end{array}$$

A sajátvektor:

$$\mathbf{s}_{\lambda=-\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \quad t \neq 0$$

Számolásunkat ellenőrizzük:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Írjuk fel a karakterisztikus polinomot és keressük meg a gyökeit:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Fejtsük ki a determinánst a második sora szerint.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(8-\lambda)(3-\lambda)+6] = 0$$

Rendezzük a kapott egyenletet:

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 30) = 0$$

Ha $2 - \lambda = 0$, akkor $\lambda_1 = 2$.

Ha $\lambda^2 - 11\lambda + 30 = 0$, akkor

$$\lambda_{2,3} = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2}$$

Tehát a mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ és $\lambda_3 = 6$

Sajátértékek meghatározása:

Ha $\lambda_1 = 2$

A homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A} - \mathbf{2} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Először cseréljük fel az első és utolsó sort.

Majd adjuk a 1. sort 2. sorhoz.

Utána az 1. sor 3-szeresét adjuk hozzá a 3. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \to$$

Végül a 2. sor (-3)-szorosát adjuk a 3. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer mátrixa felsőháromszög alakú. Kialakult egy csupa nulla sor, végtelen sok megoldás van.

Az eliminálást folytatva látható,hogy $s_1 = s_3 = 0$, a szabadon választható ismeretlen most csak s_2 lehet.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_2 &= t \qquad\qquad t \in R \\ s_3 &= 0 \end{aligned}$$

A sajátvektor:

$$\mathbf{s}_{\lambda=\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \neq 0$$

Számolásunkat ellenőrizzük, legyen például $t = 1$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ha $\lambda = 5$

A megoldandó homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A} - \mathbf{5} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Először osszuk el az 1. sort hárommal.

Majd az 1. sor (-2)-szeresét adjuk hozzá a 3. sorhoz.

Majd az 1. sor 2- szeresét adjuk hozzá a 2. sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminálással elértük, hogy az egyenletrendszer mátrixa felsőháromszög alakú. Kialakult a csupa nulla sor, végtelen sok megoldás van. Egy ismeretlen szabadon választható, legyen $s_2 = t$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3t \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right)) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3t \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{array}{rcrl} s_1 & = & 3t & \\ s_2 & = & t & \qquad t \in R \\ s_3 & = & -3t & \end{array}$$

A sajátvektor:

$$\mathbf{s}_{\lambda=\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ -3t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad t \neq 0$$

Számolásunkat ellenőrizzük:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ha $\lambda_3 = 6$

A homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A} - \mathbf{6} \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Először az 1. sort vonjuk ki a 2. sorból.

Majd az 1. sort adjuk hozzá a 3. sorhoz.

Majd a 2. sort osszuk el (-2) -vel.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

Kialakult felsőháromszög alak és egy csupa nulla sor, végtelen sok megoldás van. Egy ismeretlen szabadon választható, most legyen $s_2 = t$.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2t \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 6t \\ 0 & 0 & 1 & -2t \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{array}{rcr} s_1 & = & 3t \\ s_2 & = & t \qquad t \in R \\ s_3 & = & -2t \end{array}$$

A sajátvektor:

$$\mathbf{s}_{\lambda=\mathbf{6}} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ -2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad t \neq 0$$

Számolásunkat ellenőrizzük, ha $t = 1$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. **Feladat:** Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ nilpotens mátrix, azaz létezik olyan $N \in \mathbf{N}$, amelyre $\mathbf{A}^N = \mathbf{0}$, akkor minden sajátértéke szükségképp 0.

   Megoldás: Legyen $N \in \mathbf{N}$ akkora, hogy $\mathbf{A}^N = \mathbf{0}$. Ha most λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, a hozzátartozó sajátvektor pedig $\mathbf{s}$, akkor $\mathbf{As} = \lambda\mathbf{s}$: innen $\mathbf{A}^2 s = \lambda\mathbf{As} = \lambda^2\mathbf{s}$, $\mathbf{A}^3 s = \lambda\mathbf{A}^2\mathbf{s} = \lambda^3\mathbf{s}$, és így tovább, $\mathbf{A}^N\mathbf{s} = \lambda\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{s} = \lambda^N\mathbf{s}$. Mivel pedig $\mathbf{A}^N = \mathbf{0}$, azért $\lambda^N\mathbf{s} = \mathbf{0}$, innen $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ miatt szükségképp $\lambda = 0$.

5. **Feladat:** Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot antiszimmetrikusnak nevezünk, ha $\mathbf{A}^\mathbf{T} = -\mathbf{A}$. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ reguláris és antiszimmetrikus, akkor nem lehet valós sajátértéke.

   Megoldás: Tegyük fel, hogy λ egy valós sajátértéke $\mathbf{A}$-nak. Legyen $\mathbf{As} = \lambda\mathbf{s}$ ($\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$). Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát skalárisan $\mathbf{s}$-sel: $\langle\mathbf{As}, \mathbf{s}\rangle = \lambda||\mathbf{s}||^2$. Másrészt $\langle\mathbf{As}, \mathbf{s}\rangle = \langle\mathbf{s}, \mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{s}\rangle = -\langle\mathbf{s}, \mathbf{As}\rangle = -\lambda||\mathbf{s}||^2$. Innen $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ miatt szükségképp $\lambda = 0$, azaz a mátrix nem lehet reguláris.

6. **Feladat:** Legyen $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n\times n}$ olyan mátrix, hogy minden sajátértékének abszolút értéke 1-nél kisebb. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ reguláris.

   Megoldás: Ekkor ui. $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ sajátértékei $1 - \lambda$ alakúak, ahol λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak (valóban, ha $\mathbf{As} = \lambda\mathbf{s}$, akkor $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{s} = \mathbf{s} - \lambda\mathbf{s} = (1 - \lambda)\mathbf{s}$, és megfordítva, ha $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{s} = (1 - \lambda)\mathbf{s}$, akkor ebből $\mathbf{As} = \lambda\mathbf{s}$ következik). Mivel pedig $|\lambda| < 1$, azért $1 - \lambda \neq 0$, tehát $I - A$ valóban reguláris.

7. **Feladat:**Van-e olyan 3×3-as valós elemű mátrix, melynek sajátértékei az i, $2i$ és a $3i$ imaginárius számok?

   Megoldás: Nincs. A karakterisztikus polinom ui. egy pontosan 3-fokú polinom, melynek határértéke a $-\infty$-ben $-\infty$, a $+\infty$-ben pedig $+\infty$ (ha a harmadfokú tag előjele pozitív) ill. a $-\infty$-ben $+\infty$, a $+\infty$-ben pedig $-\infty$ (ha a harmadfokú tag előjele negatív). Mindkét esetben legalább egy valós gyöke van (Bolzano tétele miatt), tehát nem lehet mindhárom sajátérték tiszta képzetes.

   Megjegyzés: Az eredmény onnan is adódik, hogy a karakterisztikus polinom *valós együtthatós*, így ismeretes, hogy gyökei valósak vagy konjugált komplex gyökpárokat alkotnak. A feladatban pedig nem ilyen gyökök vannak adva.

8. **Feladat:** Mutassuk meg, hogy a vektoriális szorzás mátrixának a 0 mindig sajátértéke. Mi a hozzátartozó sajátvektor?

   Megoldás: Jelölje $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{3\times 3}$ az $\mathbf{x} \to \mathbf{x} \times \mathbf{a}$ leképezés mátrixát, akkor $A\mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = 0\mathbf{a}$. Tehát 0 sajátérték, a hozzátartozó sajátvektor pedig épp az $\mathbf{a}$ vektor.

3. Vektorgeometria

3.1. Műveletek 3 dimenziós vektorokkal

3.1.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg $3\mathbf{a}$, $-2\mathbf{b}$, $\frac{4}{3}\mathbf{c}$ és $3\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\frac{4}{3}\mathbf{c}$ vektorokat, ha

$$\mathbf{a} = (-1;3;4)$$
$$\mathbf{b} = (1;0;7)$$
$$\mathbf{c} = (-12;9;0).$$

Megoldás:

$$3\mathbf{a} = 3(-1;3;4) = (-3;9;12)$$
$$-2\mathbf{b} = -2(1;0;7) = (-2;0;-14)$$
$$\frac{4}{3}\mathbf{c} = \frac{4}{3}(-12;9;0) = (-16;12;0)$$
$$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - \frac{4}{3}\mathbf{c} = (-21;21;-2)$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg $||-7\mathbf{a}||$, $||\frac{3}{2}(\mathbf{b}-4\mathbf{c})||$, $\langle \mathbf{2a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{2b}\rangle$ és $\langle -\mathbf{3a}, \mathbf{5b}\rangle$ kifejezések értékét, ha

$$\mathbf{a} = (-1;3;4)$$
$$\mathbf{b} = (1;0;7)$$
$$\mathbf{c} = (-12;9;0).$$

Megoldás:

$$-7\mathbf{a} = -7(-1;3;4) = (7;-21;-28)$$
$$||-7\mathbf{a}|| = \sqrt{(7)^2+(-21)^2+(-28)^2} = \sqrt{1274} = 7\sqrt{26}$$

A feladat másképp is megoldható. Használjuk fel, hogy

$$||\lambda\mathbf{a}|| = |\lambda|\cdot||\mathbf{a}|| \qquad \text{ha} \qquad \lambda\in\mathbf{R}$$
$$||-7\mathbf{a}|| = 7||\mathbf{a}|| = 7\sqrt{(-1)^2+3^2+4^2} = 7\sqrt{26}$$
$$\mathbf{b}-4\mathbf{c} = (1;0;7)-(-48;36;0) = (49;-36;7)$$
$$\frac{3}{2}(\mathbf{b}-4\mathbf{c}) = \frac{3}{2}(49;-36;7) = \left(\frac{147}{2};-54;\frac{21}{2}\right)$$
$$\left|\left|\frac{3}{2}(\mathbf{b}-4\mathbf{c})\right|\right| = \sqrt{\left(\frac{147}{2}\right)^2+(-54)^2+\left(\frac{21}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{33714}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3746}$$

A számolás kicsit egyszerűbben is elvégezhető:

$$\left|\left|\frac{3}{2}(\mathbf{b} - 4\mathbf{c})\right|\right| = \frac{3}{2}||(\mathbf{b} - \mathbf{4c})|| =$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{49^2 + (-36)^2 + 7^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3746}$$

$$\mathbf{2a} + \mathbf{b} = (\mathbf{-1}, \mathbf{6}; \mathbf{15})$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{2b} = (\mathbf{-3}; \mathbf{3}; \mathbf{-10})$$

$$\langle \mathbf{2a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{2b} \rangle = (-1) \cdot (-3) + 6 \cdot 3 + 15 \cdot (-10) = -129$$

Mivel

$$-3\mathbf{a} = -3(-1; 3; 4) = (3; -9; -12)$$

$$5\mathbf{b} = 5(1; 0; 7) = (5; 0; 35)$$

$$\langle -3\mathbf{a}, 5\mathbf{b} \rangle = 3 \cdot 5 + (-9) \cdot 0 + (-12) \cdot 35 = -405$$

Végezzük el másképp is a számolást.

$$\langle -3\mathbf{a}, 5\mathbf{b} \rangle = -15\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -15[(-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 7] =$$

$$-15 \cdot 27 = -405$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ és $||-\mathbf{b} \times 2\mathbf{a}||$ kifejezések értékét, ha

$$\mathbf{a} = (-1; 3; 4)$$

$$\mathbf{b} = (1; 0; 7).$$

Megoldás:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 21\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = (21; 11; -3)$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -21\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (-21; -11; 3)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Másképp
$$||\mathbf{a}\times\mathbf{a}|| = ||\mathbf{a}||\cdot||\mathbf{a}||\sin 0 = 0$$
Tehát bármely $\mathbf{a}$ vektor esetén $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$ vektor!

$$-\mathbf{b}\times 2\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & -7 \\ -2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} =$$
$$= 42\mathbf{i} + 22\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$
$$||-\mathbf{b}\times 2\mathbf{a}|| = \sqrt{42^2 + (22)^2 + (-6)^2} = \sqrt{2284}$$

A vektoriális szorzás műveleti tulajdonságait felhasználva a számolás egyszerűbben is elvégezhető:
$$-\mathbf{b}\times 2\mathbf{a} = -2(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = 2(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 42\mathbf{i} + 22\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$
$$||-\mathbf{b}\times 2\mathbf{a}|| = \sqrt{2284}$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg **abc**, **bac** és **aba** kifejezések értékét, ha
$$\mathbf{a} = (-1; 3; 4)$$
$$\mathbf{b} = (1; 0; 7)$$
$$\mathbf{c} = (-12; 9; 0).$$

Megoldás: Az előző feladatban már kiszámoltuk, hogy
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (21; 11; -3).$$
Ezt felhasználva
$$\mathbf{abc} = \langle\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{c}\rangle = \langle(21; 11; -3), (-12; 9; 0)\rangle = -153$$
és
$$\mathbf{bac} = \langle\mathbf{b}\times\mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle = \langle(-21; -11; 3), (-12; 9; 0)\rangle = 153.$$
Másképp is elvégezhető a számolás.
Ha
$$\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$$
$$\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$$
$$\mathbf{c} = (c_1; c_2; c_3)$$
akkor **abc** vegyesszorzat a következő determináns értékével egyenlő:
$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ebben az esetben

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ -12 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -153$$

és

$$\mathbf{bac} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \\ -12 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 153.$$

$$\mathbf{aba} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle = \langle (21; 11; -3), (-1; 3; 4) \rangle = 0$$

Az eredményt számolás nélkül is azonnal megkapható, mivel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{a}$ vektorra, így skaláris szorzatuk 0.

5. **Feladat:** A szögek tényleges meghatározása nélkül döntsük el, hogy az alábbi vektorok hegyes-, derék- vagy tompaszöget zárnak-e be egymással.

(1) $\mathbf{a} = (-1; 3; 4) \qquad \mathbf{b} = (1; 0; 7)$

(2) $\mathbf{a} = (4; -1; 2) \qquad \mathbf{b} = (1; 9; 0)$

(3) $\mathbf{a} = (-5; -3; 1) \qquad \mathbf{b} = (2; 1; 13)$

Megoldás: Ha

- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle > 0$ akkor a két vektor hegyesszöget zár be egymással
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle < 0$ akkor a két vektor tompaszöget zár be egymással
- $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ akkor a két vektor merőleges egymásra

(1) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (-1; 3; 4)(, (1; 0; 7) \rangle = 27 > 0$

tehát a két vektor hegyesszöget zár be egymással

(2) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (4; -1; 2), (1; 9; 0) \rangle = -5 < 0$

tehát a két vektor tompaszöget zár be egymással

(3) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle (-5; -3; 1), (2; 1; 13) \rangle = 0$

tehát a két vektor derékszöget zár be egymással

6. **Feladat:** Adjuk meg z értékét úgy, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra, ha

$$\mathbf{a} = (5; -2; 3)$$

$$\mathbf{b} = (7; 4; z)$$

Megoldás: Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Tehát úgy kell z értékét megválasztani, hogy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ teljesüljön.

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 35 - 8 + 3z = 0$$
$$z = -9$$

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek egymásra, ha $z = -9$.

7. **Feladat:** Határozzuk meg a következő vektorpárok szögét.

(1) $\mathbf{a} = (7, -1; 6) \qquad \mathbf{b} = (2; 20; 1)$

(2) $\mathbf{a} = (1; -1; 0) \qquad \mathbf{b} = (0; 1; 1)$

(3) $\mathbf{a} = (2; 7; -1) \qquad \mathbf{b} = (2; 0; 1)$

Megoldás: Legyen a két vektor által közbezárt szög α, ekkor

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||}$$

(1) Ha $\mathbf{a} = (7, -1; 6) \qquad \mathbf{b} = (2; 20; 1)$, akkor

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$$

Tehát derékszöget zárnak be, $\alpha = 90°$.

(2) Ha $\mathbf{a} = (1; -1; 0) \qquad \mathbf{b} = (0; 1; 1)$, akkor

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -1 \qquad ||\mathbf{a}|| = \sqrt{2} \qquad ||\mathbf{b}|| = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||} = -\frac{1}{2}$$

Tehát $\theta = \arccos{(-\frac{1}{2})} = \frac{2\pi}{3}$

(3) $\mathbf{a} = (2; 7; -1) \qquad \mathbf{b} = (2; 0; 1)$, akkor

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 3 \qquad ||\mathbf{a}|| = \sqrt{54} \qquad ||\mathbf{b}|| = \sqrt{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||} = \frac{3}{\sqrt{270}}$$

Tehát $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{270}} \approx 1,38\,\text{radián} \approx 79,48°$

8. **Feladat:** Párhuzamos-e a következő két vektor?

$$\mathbf{a} = (1; -1; 2) \qquad \mathbf{b} = (-3; 3; -6)$$

Megoldás: Két vektor párhuzamos, ha az egyik vektor előáll a másik nullától különböző számszorosaként. Másképp, ha létezik olyan $c \neq 0$ valós szám, amelyre $\mathbf{a} = c\,\mathbf{b}$.

Most jól látható, hogy $\mathbf{b} = -3\mathbf{a}$, tehát párhuzamosak.

Vegyük észre, hogy ha $\mathbf{a} = c\,\mathbf{b}$, akkor $c = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$, azaz az azonos indexű koordináták hányadosai egyenlőek.

9. **Feladat:** Párhuzamosak-e az alábbi vektorok? Ha nem, határozzuk meg a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámát.

$$\mathbf{a} = (-2; 1; 0) \qquad \mathbf{b} = (2; -1; 4)$$

Megoldás: Ha az azonos indexű koordináták hányadosai egyenlőek, akkor az egyik vektor a másik számszorosa, azaz párhuzamosak.

Ebben az esetben

$$\frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{4}$$

Tehát nem párhuzamosak, a két vektort közös kezdőpontba eltolva kifeszítenek egy paralelogrammát. Ezen terület mérőszáma a következő vektoriális szorzat abszolútértékével egyenlő.

$$T_p = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$$

Végezzük el a számolást:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (4; 8; 0)$$

$$T_p = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = \sqrt{16 + 64 + 0} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

A keresett terület mérőszáma: $4\sqrt{5}$.

10. **Feladat:** Vizsgáljuk meg, hogy egy egyenesre esnek-e az alábbi pontok.

$$A(1; 1; -2) \qquad B(-1; -3; 0) \qquad C(5; 1; -7)$$

Megoldás: A három pont akkor illeszkedik egy egyenesre, ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok párhuzamosak.(Természetesen másképp is választhattuk volna a vektorokat.)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ az A, B, C pontokba mutató helyvektorok, akkor

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2; -4; 2) \qquad \overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c} = (-6; -4; 7)$$

Mivel

$$\frac{-2}{-6} \neq \frac{-4}{-4} \neq \frac{2}{7}$$

A három pont nem illeszkedik egy egyenesre.

11. **Feladat:** Adjuk meg C pont első és második koordinátáját, ha a harmadik koordináta 6 és C illeszkedik az

$$A(1; 1; -2) \qquad B(-1; -3; 0)$$

pontok által meghatározott egyenesre.

Megoldás: Ha a három pont egy egyenesre illeszkedik, akkor a $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok párhuzamosak.

Legyen $C(x; y; 6)$.

Ekkor

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -4; 2) \qquad \overrightarrow{AC} = (x - 1; y - 1; 8)$$

A párhuzamosság feltétele, hogy a megfelelő koordináták hányadosai egyenlőek, azaz

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{8}{2} = 4$$

Az egyenleteket megoldva: $x = -7$ és $y = -15$ adódik.

Tehát $C(-7; -15; 6)$.

12. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi két pont távolságát!

$$A(5; 0; 2) \qquad B(1; 1; 1)$$

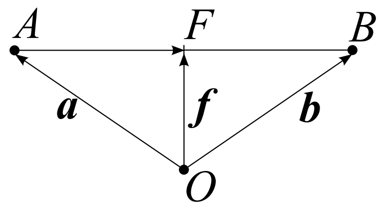
Megoldás: Az A és B pontok távolsága megegyezik a $\overrightarrow{BA}$ vagy $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszával:

$$||\overrightarrow{BA}|| = ||\mathbf{a} - \mathbf{b}|| = ||(4; -1; 1)|| = \sqrt{18}$$

13. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi két pont által meghatározott szakasz F felezéspontját, majd az A -hoz közelebb eső H harmadoló pontjának koordinátáit!

$$A(5; 0; 2) \qquad B(2; 6; -1)$$

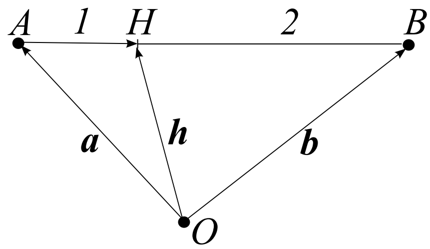
Megoldás: Használjuk fel, hogy az F pontba mutató $\mathbf{f}$ helyvektor felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével:



$$\mathbf{f} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Ha $\mathbf{a} = (5; 0; 2)$ és $\mathbf{b} = (2; 6; -1)$, akkor

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = \frac{1}{2}(5; 0; 2) + \frac{1}{2}(2; 6; -1) = (\frac{7}{2}; 3; \frac{1}{2})$$



A H pontba mutató $\mathbf{h}$ helyvektor szintén felírható a végpontokba mutató helyvektorok segítségével:

$$\mathbf{h} = \mathbf{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \frac{1}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\mathbf{a} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$$

Végezzük el a számolást.

$$\mathbf{h} = \frac{2}{3}(5; 0; 2) + \frac{1}{3}(2; 6; -1) = (4; 2; 1)$$

Tehát a harmadoló pont koordinátái: $H(4; 2; 1)$

14. **Feladat:** Állítsuk elő az $\mathbf{a} = (4; 0; 3)$ vektorral azonos irányú és irányítottságú, de egységnyi hosszúságú vektort.

Megoldás: Jelöljük $\mathbf{a_e}$-vel a keresett vektort.

Tudjuk, hogy

$$\mathbf{a} = ||\mathbf{a}||\mathbf{a_e} \qquad \text{és} \qquad ||\mathbf{a}|| = 5$$

ebből

$$\mathbf{a_e} = \frac{1}{||\mathbf{a}||}\mathbf{a} = \frac{1}{5}(4; 0; 3) = \left(\frac{4}{5}; 0; \frac{3}{5}\right)$$

15. **Feladat:** Állítsuk elő az $\mathbf{a} = (2;3;1)$ vektorral azonos irányú, ellentétes irányítottságú, és 3 egységnyi hosszúságú $\mathbf{b}$ vektort.

Megoldás: Először adjuk meg az $\mathbf{a}$ vektorral azonos irányú, irányítottságú és egységnyi hosszúságú $\mathbf{a_e}$ vektort .

$$\mathbf{a_e} = \frac{1}{||\mathbf{a}||}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2;3;1) \qquad \text{mivel} \qquad ||\mathbf{a}|| = \sqrt{14}$$

Majd nyújtsuk meg 3 egységnyire:

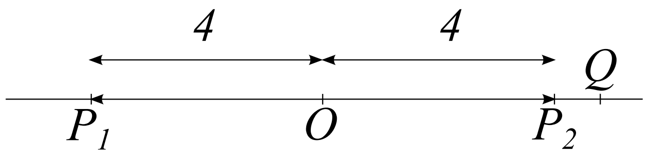
$$3\mathbf{a_e} = \frac{3}{\sqrt{14}}(2;3;1)$$

Képezzük az ellentett vektorát, azaz szorozzuk meg (-1)-gyel:

$$\mathbf{b} = -3\frac{1}{||\mathbf{a}||}\mathbf{a} = -\frac{3}{\sqrt{14}}(2;3;1) = \left(-\frac{6}{\sqrt{14}}; -\frac{9}{\sqrt{14}}; -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

16. **Feladat:** Adjuk meg a P pont koordinátáit, ha az origótól 4 egységnyire van és illeszkedik az origó és a $Q(6;8;0)$ pont által meghatározott egyenesre.

Megoldás: Az origóra, $O(0;0;0)$ és $Q(6;8;0)$ pontra illeszkedő egyenesen két olyan pont is van , amely éppen 4 egységnyire van az origótól. Jelöljük ezeket P_1 -gyel illetve P_2-vel. Először határozzuk meg azt a pontot, amelyik az origónak a Q felöli oldalára esik. Legyen ez a pont az ábra szerint P_2.



A keresett pontba mutató $\mathbf{p_2}$ helyvektor az $\overrightarrow{OQ} = (6;8;0)$ vektorral azonos irányú és irányítottságú vektor és éppen 4 egységnyi hosszúságú. Először állítsuk elő az $\overrightarrow{OQ}$ vektorral azonos irányú és irányítottságú egységvektort, felhasználva, hogy $||\overrightarrow{OQ}|| = 10$.

$$\overrightarrow{OQ_e} = \frac{1}{||\overrightarrow{OQ}||}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{10}(6;8;0)$$

Nyújtsuk meg az egységvektort 4 egységnyire:

$$\mathbf{p} = 4\overrightarrow{OQ_e} = \frac{4}{10}(6;8;0) = \left(\frac{12}{5}; \frac{16}{5}; 0\right)$$

Tehát a P_2 pont koordinátái: $P_2\left(\frac{12}{5};\frac{16}{5};0\right)$.

A másik P_1 pontba mutató $\mathbf{p_1}$ helyvektor éppen az ellentett vektora az előbb számolt $\mathbf{p_2}$ vektornak.

Így

$$\mathbf{p_1} = -\left(\frac{12}{5};\frac{16}{5};0\right) \qquad \Rightarrow \quad P_1\left(-\frac{12}{5};-\frac{16}{5};0\right)$$

17. **Feladat:** Adjuk meg az $\mathbf{a}$ vektornak $\mathbf{b}$ vektorra eső merőleges vetületvektorát, ha

$$\mathbf{a} = (1;-2;3) \quad \mathbf{b} = (4;0;1).$$

Megoldás: Tudjuk, hogy $\mathbf{a}$ vektornak $\mathbf{b}$ vektorra eső merőleges vetületvektora

$$\mathbf{a_b} = \frac{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}{||\mathbf{b}||^2}\mathbf{b}.$$

Ebben az esetben, mivel

$$\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle = 4+0+3 = 7 \qquad \text{és} \qquad ||\mathbf{b}|| = \sqrt{17},$$

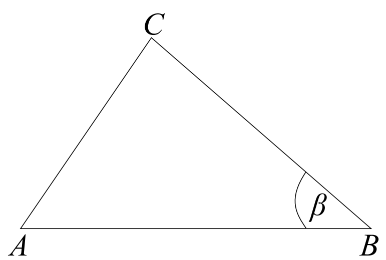
ezért

$$\mathbf{a_b} = \frac{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}{||\mathbf{b}||^2}\mathbf{b}. = \frac{7}{17}(4;0;1) = \left(\frac{28}{17};0;\frac{7}{17}\right)$$

3.1.2. Összetett feladatok:

1. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi három ponttal adott háromszög kerületét, területét és B csúcsnál lévő szögét!

$$A(1;0;-1) \qquad B(1;-1;3) \qquad C(-7;2;1)$$



Megoldás:

$$||\overrightarrow{AB}|| = ||\mathbf{b}-\mathbf{a}|| = ||(0;-1;4)|| = \sqrt{17}$$

$$||\overrightarrow{AC}|| = ||\mathbf{c} - \mathbf{a}|| = ||(-8; 2; 2)|| = \sqrt{72}$$

$$||\overrightarrow{BC}|| = ||\mathbf{c} - \mathbf{b}|| = ||(-8; 3; -2)|| = \sqrt{77}$$

A háromszög kerülete: $K = \sqrt{17} + \sqrt{72} + \sqrt{77}$

A háromszög területének meghatározásához adjunk meg két olyan vektort, amely kifeszíti a háromszöget. Legyenek ezek most az A pontból induló $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok. Ekkor a háromszög területe fele a két vektor által meghatározott paralelogramma területének.

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||$$

Végezzük el a számolást.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 4 \\ -8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -10\mathbf{i} - 32\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$$

$$T = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 1024 + 64} = \sqrt{297}$$

A háromszög területe: $T = \sqrt{297}$.

A B csúcsnál lévő β szög meghatározásához vegyük észre, hogy a B csúcsból induló $\overrightarrow{BA}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok által közbe zárt szög éppen a keresett β.

$$\overrightarrow{BA} = (0; 1; -4) \qquad \overrightarrow{BC} = (-8; 3; -2)$$

$$\cos\beta = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{||\overrightarrow{BA}|| \cdot ||\overrightarrow{BC}||} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{77}}$$

A B csúcsnál lévő szög:

$$\beta = \arccos\frac{11}{\sqrt{1309}} \approx 72.3^\circ$$

2. **Feladat:** Egy téglatest két élvektora

$$\mathbf{a} = (4; -3; 1) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = (0; 2; 6)$$

.

Határozzuk meg a harmadik $\mathbf{c}$ élvektorát, ha tudjuk, hogy $||\mathbf{c}|| = \sqrt{65}$.
Megoldás: A téglatest élei merőlegesek egymásra, ezért a keresett $\mathbf{c}$ vektor is merőleges mind az $\mathbf{a}$, mind a $\mathbf{b}$ vektorra. Ez pedig azt jelenti, hogy párhuzamos lesz az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorral, azaz létezik olyan x valós szám, amelyre

$$\mathbf{c} = x(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Határozzuk meg $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = \sqrt{-20^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{1040} = \sqrt{16 \cdot 65} = 4\sqrt{65}$$

Tudjuk $||\mathbf{c}|| = \sqrt{65}$, vagyis negyed olyan hosszú, mint $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ezért

$$\mathbf{c} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{1}{4}(-20\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) = -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Tehát a harmadik vektor: $\mathbf{c} = (-5; -6; 2)$

A feltételeknek a kapott $\mathbf{c}$ vektor ellentett vektora is megfelel, így a feladat másik megoldása a

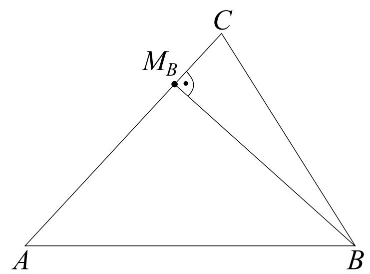
$$\mathbf{c_2} = -\mathbf{c} = (5; 6; -2)$$

vektor.

3. **Feladat:** Határozzuk meg az ABC háromszög B csúcsából induló magasságvonal M_B talppontját, ha

$$A(1;1;0) \qquad B(3;0;-3) \qquad C(-2;1;-4)$$

Megoldás: Készítsünk ábrát.



Adjuk meg az M_B pontba mutató $\mathbf{m_b}$ helyvektort.

$$\mathbf{m_B} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AM_B},$$

ahol $\mathbf{a}$ az A pontba mutató helyvektor. Az $\overrightarrow{AM_B}$ vektor pedig éppen $\overrightarrow{AB}$ vektornak $\overrightarrow{AC}$ vektorra eső merőleges vetületvektora.

Először határozzuk meg $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$ vektornak $\overrightarrow{AC} = \mathbf{y}$ vektorra eső merőleges vetületvektorát.

$$\mathbf{x} = (2; -1; -3) \qquad \mathbf{y} = (-3; 0; -4)$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 6 \qquad ||\mathbf{y}|| = 5$$

$$\overrightarrow{AM_B} = \mathbf{x_y} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{||\mathbf{y}||^2}\mathbf{y} = \frac{6}{25}(-3; 0; -4) = \left(-\frac{18}{25}; 0; -\frac{24}{25}\right)$$

$$\mathbf{m_B} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AM_B}, = (1; 1; 0) + \left(-\frac{18}{25}; 0; -\frac{24}{25}\right) =$$

$$= \left(\frac{7}{25}; 1; -\frac{24}{25}\right)$$

Tehát a B csúcsból induló magasságvonal M_B talppontjának koordinátái:

$$M_B\left(\frac{7}{25}; 1; -\frac{24}{25}\right)$$

4. **Feladat:** Bizonyítsuk be, hogy az alábbi pontok paralelogrammát határoznak meg és számítsuk ki a területét.

$$A(2; -3; 4) \quad B(4; 1; 2) \quad C(1; 4; 5) \quad D(-1; 0; 7)$$

Megoldás: Ha belátjuk, hogy két szemközti oldalvektor párhuzamos és egyenlő hosszúságú, akkor a négy pont tényleg paralelogrammát határoz meg.

Nézzük meg például, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ teljesül-e.

$$\overrightarrow{AB} = (2; 4; -2) \qquad \overrightarrow{DC} = (2; 4; -2)$$

Tehát paralelogrammát alkotnak.

A terület meghatározásához válasszuk ki az egyik pontot, például D-t, ekkor a két szomszédos pontba mutató $\overrightarrow{DC}$ és $\overrightarrow{DA}$ vektorok kifeszítik a paraleogrammát.

Ekkor a terület:

$$T_p = ||\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA}||$$

Határozzuk meg $\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA}$ vektort:

$$\overrightarrow{DC} = (2; 4; -2) \qquad \overrightarrow{DA} = (3; -3; -3)$$

$$\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -18\mathbf{i} - 0\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$$

$$T_p = ||\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DA}|| = \sqrt{(-18)^2 + 0^2 + (-18)^2} = 18\sqrt{2}$$

5. **Feladat:** Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paraleogramma területe 6 területegység, akkor határozzuk meg a $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$ és $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paraleogramma területét.

   Megoldás: Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paraleogramma területe 6 területegység, akkor
   $$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = 6$$
   És keressük a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok által kifeszített paraleogramma területét, tehát az a kérdés mivel egyenlő:
   $$T_p = ||\mathbf{c} \times \mathbf{d}||$$
   Ebben az esetben
   $$T_p = ||\mathbf{c} \times \mathbf{d}|| = ||(4\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 5\mathbf{b})||$$
   Felhasználva a vektoriális szorzás tulajdonságait, bontsuk fel a zárójeleket:
   $$||(4\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 5\mathbf{b})|| = ||(4\mathbf{a} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (4\mathbf{a} \times 5\mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times 5\mathbf{b})|| =$$
   mivel tudjuk, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, ezért
   $$= || - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (4\mathbf{a} \times 5\mathbf{b})|| =$$
   Felhasználva, hogy
   $$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$
   és
   $$4\mathbf{a} \times 5\mathbf{b} = 20(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$
   $$|| - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (4\mathbf{a} \times 5\mathbf{b})|| = ||21(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|| = 21||(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|| = 21 \cdot 6 = 126$$
   Tehát a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe 126 területegység.

6. **Feladat:** Határozzuk meg az ABC háromszög C csúcsából induló magasságvonal hosszát, ha
   $$A(0;0;0) \quad B(2;1;-2) \quad C(5;0;-1)$$
   Megoldás: Induljunk ki abból, hogy ennek a háromszögnek a területét kétféleképpen is ki tudjuk számolni. Egyrészt a középiskolában tanultak alapján tudjuk, hogy egy háromszög területe megadható az egyik oldal és a hozzátartozó magasság szorzatának felével.

   Azaz
   $$T_h = \frac{1}{2} a m_a$$

Másrészt, tudjuk, hogy a keresett terület egyenlő a háromszöget kifeszítő két vektor vektoriális szorzatának abszolútértékének felével.

Adjunk meg két vektort, ami a háromszöget kifeszíti. Ebben az esetben válasszuk az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorokat.

$$T_h = \frac{1}{2}am_a = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||$$

Most mi a C csúccsal szemközti AB oldalhoz tartozó magasságra vagyunk kiváncsiak, amit jelöljünk m_{AB}-vel . Mivel AB oldal hossza pedig megegyezik $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszával, így

$$T_h = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB}|| \cdot m_{AB} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||$$

Innen

$$m_{AB} = \frac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||}$$

Végezzük el a számolást:

$$\overrightarrow{AB} = (2; 1; -2) \qquad \overrightarrow{AC} = (5; 0; -1)$$

Először határozzuk meg a vektoriális szorzatot:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

$$||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + (-5)^2} = \sqrt{90}$$

Mivel $||\overrightarrow{AB}|| = 3$.

$$m_{AC} = \frac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{AB}||} = \frac{\sqrt{90}}{3} = \sqrt{10}$$

Tehát a C csúcshoz tartozó magasság hossza: $\sqrt{10}$ hosszegység

7. **Feladat:** Legyen adott három vektor:

$$\mathbf{a} = (3; 1; 1) \quad \mathbf{b} = (0; -1; 2) \quad \mathbf{c} = (-2; 1; 2).$$

Vizsgáljuk meg, hogy az **a**, **b** és **c** vektorok egy síkra illeszkednek-e? Ha nem , akkor határozzuk meg a három vektor által kifeszített

(a) paralelepipedon

(b) tetraéder térfogatát.

Megoldás: Három vektor akkor és csak akkor illeszkedik egysíkra, ha a vegyesszorzatuk 0.

Határozzuk meg **abc** vegyesszorzatot.

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

Először számoljuk ki $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ értékét.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle (3; -6; -3), (-2; 1; 2) \rangle = -6 - 6 - 6 = -18$$

Mivel $\mathbf{abc} = -18 \neq 0$, a három vektor nem illeszkedik egy síkra.

Tehát a vektorok kifeszítenek egy paralelepipedont.Ennek a térfogata megegyezik a három vektor vegyesszorzatának abszolútértékével.

$$V_p = |\mathbf{abc}| = |-18| = 18$$

A három pont által megadott tetraéder térfogat pedig az őt magába foglaló paralelepipedon térfogatának a hatoda, azaz

$$V_t = \frac{1}{6}|\mathbf{abc}| = \frac{1}{6} \cdot |-18| = 3$$

8. **Feladat:** Hogyan válasszuk meg C pont harmadik koordinátáját, hogy az alábbi négy pont egy síkra illeszkedjék?

$$A(0;0;0) \quad B(4;2;-1) \quad C(3;5;z) \quad D(-1;-5;3)$$

Megoldás: Válasszuk ki az egyik pontot, például az A-t és irányítsunk vektorokat a többi három ponthoz. Ha az így kapott vektorok egy síkra illeszkednek, akkor a négy pont is.

$$\overrightarrow{AB} = (4;2;-1) \quad \overrightarrow{AC} = (3;5;z) \quad \overrightarrow{AD} = (-1;-5;3)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy úgy kell z értékét megválasztanunk, hogy a három vektor vegyesszorzata 0 legyen.

Először számoljuk a vektoriális szorzatot.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & z \end{vmatrix} = (2z+5)\mathbf{i} - (4z+3)\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

A skaláris szorzat:

$$\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = -(2z+5) + 5(4z+3) + 3 \cdot 14 = 0$$

Rendezve z-re:

$$52 + 18z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = -\frac{52}{18} = -\frac{26}{9}$$

Tehát, ha $z = -\dfrac{26}{9}$, akkor négy pont egy síkra illeszkedik.

3.2. Egyenes egyenletrendszere

3.2.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres és paraméter nélküli egyenletrendszerét, amely átmegy $P_0(2;3;5)$ ponton és irányvektora $\mathbf{v} = (-12;9;7)$.

   Megoldás:

   A $P_0(x_0;y_0;z_0)$ ponton átmenő $\mathbf{v} = (v_1;v_2;v_3)$ irányú egyenes paraméteres egyenletrendszere:

   $$x = x_0 + v_1 t \qquad y = y_0 + v_2 t \qquad z = z_0 + v_3 t \qquad t \in \mathbf{R}$$

   Ha az egyenletekből kifejezzük t-t, kapjuk a $P_0(x_0;y_0;z_0)$ ponton átmenő $\mathbf{v} = (v_1;v_2;v_3)$ irányú egyenes paraméter nélküli egyenletrendszerét:

   $$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} \qquad \text{ha} \qquad v_1, v_2, v_3 \neq 0$$

   A keresett egyenes paraméteres egyenletrendszere:

   $$x = 2 - 12t \qquad y = 3 + 9t \qquad z = 5 + 7t \qquad t \in \mathbf{R}$$

   Az egyenes paraméter nélküli egyenletrendszere:

   $$\frac{x-2}{-12} = \frac{y-3}{9} = \frac{z-5}{7}$$

2. **Feladat:** Legyen

   $$e: \quad x = t \qquad y = 2 - 3t \quad z = 5 \quad t \in \mathbf{R}$$

   és

   $$f: \quad \frac{x-3}{2} = y = -3z.$$

   Adjuk meg e és f egyeneseknek egy-egy tetszőleges pontját és irányvektorát.

Megoldás: Az e egyenes egy tetszőleges pontját kapjuk, ha t-nek adunk egy valós értéket és ezt behelyettesítjük az egyenletekbe.

Például legyen $t = 1$, ekkor $x = 1$, $y = -1$ és $z = 5$.

Tehát az e egyenes egy pontja: $A(1, -1; 5)$

Legyen $t = -3$, ekkor $x = -3$, $y = 11$ és $z = 5$.

Egy másik pont az egyenesről: $B(3, 11; 5)$

Legyen $t = \sqrt{7}$, ekkor $x = \sqrt{7}$, $y = 2 - 3\sqrt{7}$ és $z = 5$.

Egy harmadik pont: $C(\sqrt{7}; 2 - 3\sqrt{7}; 5)$.

Adjuk meg e egyenes egy irányvektorát!

A paraméteres egyenletrendszernél, ha az egyenleteket úgy rendezzük, hogy baloldalon csak x, y, és z szerepel, akkor a jobboldalon lévő paraméter együtthatói adják az irányvektor koordinátáit.

Ebben az esetben $\mathbf{v_e} = (1; -3, 0)$

Adjuk meg f egyenes néhány pontját. Most az egyenletrendszer kifejezéseit egyenlővé tesszük ugyanazzal a tetszőleges valós számmal, majd az egyenleteket külön-külön megoldjuk.

Például:

$$\frac{x-3}{2} = y = -3z = 0$$

Oldjuk meg az egyenleteket:

$$\frac{x-3}{2} = 0 \qquad y = 0 \qquad -3z = 0$$

A megoldás: $x = 3$ és $y = z = 0$.

Tehát az f egyenes egy pontja a $Q(3; 0; 0)$ pont.

Egy másik példa:

$$\frac{x-3}{2} = y = -3z = 2$$

Az egyenletek:

$$\frac{x-3}{2} = 2 \qquad y = 2 \qquad -3z = 2$$

A megoldás: $x = 7$ és $y = 2 \quad z = -\frac{2}{3}$.

Tehát az f egyenes egy másik pontja a $H(7; 2; -6)$ pont.

Olvassuk le az f egyenes egy irányvektorát. Az irányvektor koordinátái akkor olvashatóak le, ha az egyenletrendszerben x, y, z együtthatója 1. Írjuk át az egyenletrendszert.

Az eredeti egyenletrendszer:

$$f: \quad \frac{x-3}{2} = y = -3z$$

Átírva:

$$f: \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{-\frac{1}{3}}$$

Most már a nevezőben leolvasható az irányvektor koordinátái:

$$\mathbf{v_f} = (2; 1; -\frac{1}{3})$$

Az irányvektor megadásánál általában lényegtelen, hogy a vektor milyen hosszúságú. Így az előbbi vektor bármely (0-tól különböző) számszorosa is irányvektor, például a

$$3\mathbf{v_f} = (6; 3; -1)$$

vektor.

3. **Feladat:** Döntsük el, hogy az

$$A(4; -10; 5) \quad B(3; 0; -1) \quad C(2; 5; 5)$$

pontok illeszkednek- e

$$e: \quad x = t \qquad y = 2 - 3t \quad z = 5 \quad t \in \mathbf{R}$$

egyenesre.

Megoldás: Helyettesítsük be az A pont koordinátáit az egyenletekbe. Ha t-re azonos értéket kapunk, akkor illeszkedik a pont az egyenesre.

$$e: \quad 4 = t \qquad -10 = 2 - 3t \quad 5 = 5$$

Mivel $t = 4$ az első két egyenletnek megoldása és a harmadik egyenlet pedig minden t esetén teljesül, így a pont illeszkedik e egyenesre.

B pont nem illeszkedik, mert e egyenesen csak olyan pont lehet, amelynek a harmadik koordinátája 5 és ez B pontra nem teljesül.

C pont szintén nem illeszkedik az e egyenesre, mivel

$$2 = t \qquad 5 = 2 - 3t \quad 5 = 5$$

Az első egyenletből $t = 2$, a másodikból $t = -1$, nem azonosak t értékei, a pont nem illeszkedik.

4. **Feladat:** Írjuk fel az alábbi két pontra illeszkedő egyenes paraméteres egyenletrendszerét!

$$A(2; -1; 3) \quad B(4; -1; 7)$$

Megoldás: Egy pontra és egy irányvektorra van szükségünk. Az egyenes egy irányvektora legyen

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (2; 0; 4)$$

vektor.

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere A pontra felírva:

$$x = 2 + 2t \qquad y = -1 \quad z = 3 + 4t \quad t \in \mathbf{R}$$

A B pontra felírva:

$$x = 4 + 2t \qquad y = -1 \quad z = 7 + 4t \quad t \in \mathbf{R}$$

Úgy tűnik, hogy egy másik egyenest kaptunk. Pedig ez ugyanaz az egyenes, csak más az alakja.

5. **Feladat:** Egy egyenesre illeszkednek-e az alábbi pontok?

$$A(1; -1; 2) \quad B(4, 0; 3) \quad C(-2; -2; 5)$$

Megoldás: Írjuk fel az A és B pontokon átmenő egyenes egyenletét, majd vizsgáljuk meg, hogy C pont illeszkedik-e a kapott egyenesre.

Az AB egyenes irányvektora: $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (3; 1; 1)$. Az egyenes egyenletrendszere A pontra felírva:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Egyszerűbben:

$$\frac{x-1}{3} = y + 1 = z - 2$$

Helyettesítsük be a kapott egyenletrendszerbe C pont koordinátáit. Ha egyenlőséget kapunk, akkor a C pont illeszkedik az egyenesre.

$$\frac{-3}{3} = -1 \neq 3$$

Nincs egyenlőség, a C pont nincs rajta az egyenesen, így a három pont nem illeszkedik egy egyenesre.

6. **Feladat:** Adjuk meg az x, y és z koordinátatengelyek paraméteres egyenletrendszereit.

Megoldás: Mindhárom egyenes illeszkedik az origóra, ezért a $P_0(0; 0; 0)$ pontra fogjuk felírni az egyeneseket.

Az x tengely irányába mutató $\mathbf{i} = (1; 0; 0)$ vektor legyen az x tengely egy v_x irányvektora.

Az x tengely paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 0 + t \qquad y = 0 + 0t \qquad z = 0 + 0t \qquad t \in \mathbf{R}$$

Egyszerűbben:

$$x = t \qquad y = z = 0 \qquad t \in \mathbf{R}$$

Az egyenletrendszer azt jelenti, hogy az egyenesre illeszkedő pontok első koordinátái bármilyen valós szám lehet, de a második és harmadik mindig 0.

Hasonlóan az y tengely irányvektora $\mathbf{v_y} = \mathbf{j} = (0; 1; 0)$ és paraméteres egyenletrendszere:

$$y = t \qquad x = z = 0 \qquad t \in \mathbf{R}$$

A z tengely irányvektora $\mathbf{v_z} = \mathbf{k} = (0; 0; 1)$ és paraméteres egyenletrendszere:

$$z = t \qquad x = y = 0 \qquad t \in \mathbf{R}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ilyen esetekben, ahol az irányvektor két koordinátája is 0, csak a paraméteres egyenletrendszer adható meg.

7. **Feladat:** Írjuk fel a $P_0(2; 3; 5)$ ponton átmenő és y tengellyel párhuzamos e egyenes paraméteres egyenletrendszerét.

Megoldás: Mivel a keresett egyenes párhuzamos az y tengellyel, ezért y tengely $\mathbf{j} = (0; 1; 0)$ irányvektora egyben az e egyenes irányvektora is.

Tehát a $P_0(2; 3; 5)$ ponton átmenő és $\mathbf{v} = \mathbf{j} = (0; 1; 0)$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenletrendszer:

$$e: \qquad x = 2 \qquad y = 3 + t \qquad z = 5 \qquad t \in \mathbf{R}$$

Az egyenletrendszerből leolvasható, hogy az egyenes minden pontjának első koordinátája 2 és a harmadik pedig mindig 5.

8. **Feladat:** Írjuk fel a $P_0(2; 3; 5)$ ponton átmenő és $\mathbf{v} = \mathbf{j} - \mathbf{i}$ irányvektorú f egyenes paraméteres és paraméter nélküli egyenletrendszerét.

Megoldás: Mivel $\mathbf{i} = (1; 0; 0)$ és $\mathbf{j} = (0; 1; 0)$, ezért

$$\mathbf{v} = \mathbf{j} - \mathbf{i} = (-1; 1; 0).$$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszer:

$$f: \qquad x = 2 - t \qquad y = 3 + t \qquad z = 5 \qquad t \in \mathbf{R}$$

A paraméter nélküli egyenletrendszerhez fejezzük ki t-t az egyenletekből.

$$t = 2 - x \qquad t = y - 3 \qquad z = 5$$

Az egyenletrendszer:

$$f: \qquad 2 - x = y - 3 \qquad z = 5 \qquad t \in \mathbf{R}$$

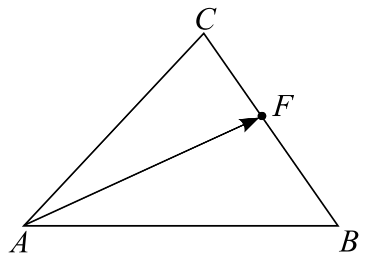
Megjegyzés: Ha az irányvektornak csak az egyik koordinátája 0, akkor még mindkét egyenletrendszer felírható. Az egyenletrendszerekből az is leolvasható, hogy az egyenesre olyan pontok illeszkednek, amelyeknek a harmadik koordinátájuk mindig 5, azaz az egyenes párhuzamos az xy síkkal.

9. **Feladat:** Írjuk fel az

$$A(3; -1; 2) \quad B(4; 1; -7) \quad C(8; -1; 5)$$

csúcspontú háromszög A csúcsából induló súlyvonalának egyenletrendszerét!

Megoldás: Az A csúcsból induló súlyvonal éppen a BC oldal F felezéspontján megy át.



A felezéspont koordinátái:

$$F(6; 0; -1)$$

Tehát ismerjük a keresett egyenes két pontját. Ekkor az irányvektor legyen éppen az AF vektor.

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AF} = (3; 1; -3)$$

A súlyvonal egyenlete az A pontra felírva (választhatnánk F-t is):

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-3}$$

10. **Feladat:** Írjuk fel az AB szakasz felezéspontján átmenő és z tengellyel párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ha

$$A(3; -3; 2) \quad B(5; 1; 2).$$

Megoldás: Először meg kell határoznunk egy pontot, amelyre illeszkedik az egyenes.

Az AB szakasz felezéspontjának koordinátái:

$$F\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2};\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Ebben az esetben

$$F(4;-1;2)$$

Mivel a keresett egyenes párhuzamos a z tengellyel, az irányvektora $\mathbf{v}=\mathbf{k}=(0;0;1)$.

Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x=4 \quad y=-1 \quad z=2+t \quad t\in\mathbf{R}$$

3.2.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Írjuk fel az $A(1;3;-2)$ ponton átmenő, e és f egyenesekre merőleges g egyenes egyenletrendszerét, ha

$$e: x=y=z \qquad f: -x=z, \quad y=3$$

. **Megoldás:** Az egyenletrendszer felírásához szükségünk van egy pontra és egy irányvektorra. Egy pontja adott a keresett egyenesnek. Nézzük meg, hogy mit tudunk mondani a keresett egyenes egy irányvektoráról.

Jelölje $\mathbf{v_e}$, $\mathbf{v_f}$ és $\mathbf{v_g}$ az e, f és g egyenesek irányvektorait.

Ha a keresett g egyenes merőleges e és f egyenesekre, akkor $\mathbf{v_g}\perp\mathbf{v_e}$ és $\mathbf{v_g}\perp\mathbf{v_f}$ is teljesül. Tehát egy olyan vektort keresünk, amelyik merőleges a két ismert irányvektorra. A $\mathbf{v_e}\times\mathbf{v_f}$ pedig éppen megfelel a feltételeknek, mivel $\mathbf{v_e}\times\mathbf{v_f}\perp\mathbf{v_e}$ és $\mathbf{v_e}\times\mathbf{v_f}\perp\mathbf{v_f}$.

Olvassuk le e és f egyenesek irányvektorait.

Mivel

$$e: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \qquad \text{és} \qquad f: \frac{x}{-1}=\frac{z}{1}, \quad y=3,$$

ezért

$$\mathbf{v_e}=(1;1;1) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{v_f}=(-1;0;1).$$

$$\mathbf{v_g}=\mathbf{v_e}\times\mathbf{v_f}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Az g egyenes egyenletrendszere:

$$g: \quad x-1=\frac{y-3}{-2}=z+2$$

2. **Feladat:** Írjuk fel az ABC csúcspontú háromszög síkjára merőleges, az A ponton átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ha

$$A(3;-1;2) \quad B(4;1;1) \quad C(7;-2;5).$$

Megoldás: Mivel $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok a három pontra illeszkedő síkon vannak, ezért vektoriális szorzatuk merőleges lesz a síkra. Ezért a keresett egyenes irányvektora legyen $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Végezzük el a számolást.

$$\overrightarrow{AB} = (1;2;-1) \qquad \overrightarrow{AC} = (4;-1;3)$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5;-7;-9)$$

A keresett egyenes paraméteres egyenletrendszere:

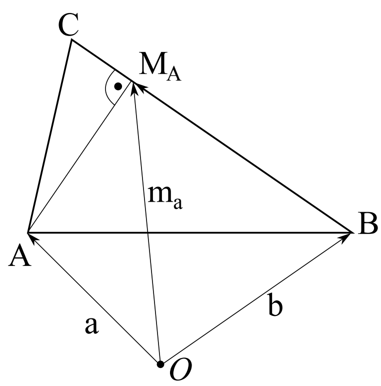
$$x = 3 + 5t \quad y = -1 - 7t \quad z = 2 - 9t \quad t \in \mathbf{R}$$

3. **Feladat:** Írjuk fel az

$$A(3;-1;2) \quad B(4;1;3) \quad C(7;-2;5)$$

csúcspontú háromszög A csúcsából induló magasságvonalának egyenletrendszerét.

Megoldás:



Ha meg tudnánk adni az A pont BC oldalra eső merőleges vetületétnek M_A-nak a koordinátáit, akkor ismernénk két pontot a keresett egyenesről, ez pedig azt jelenti, hogy tudnánk irányvektort adni.

Legyen M_A az A pont merőleges vetülete a BC egyenesre és $\overrightarrow{BA}_{BC}$ pedig $\overrightarrow{BA}$ vektornak $\overrightarrow{BC}$ vektorra eső merőleges vetületvektora.

Ekkor az M_A pontba mutató $\mathbf{m_a}$ helyvektor előállítható a következőképpen:

$$\mathbf{m_a} = \mathbf{b} + \overrightarrow{BA}_{BC}$$

Vetítsük merőlegesen $\overrightarrow{BA}$ vektort $\overrightarrow{BC}$ vektorra.

Tudjuk, hogy $\mathbf{a}$ vektornak $\mathbf{b}$ vektorra eső merőleges vetületvektora:

$$\mathbf{a_b} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{||\mathbf{b}||^2}\mathbf{b}$$

Ebben az esetben

$$\overrightarrow{BA}_{BC} = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{||\overrightarrow{BC}||^2}\overrightarrow{BC}$$

Végezzük el a számolást:

$$\overrightarrow{BA} = (-1; -2; -1) \qquad \overrightarrow{BC} = (3; -3; 2)$$

$$\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = -3 + 6 - 2 = 1 \qquad ||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{22}$$

$$\overrightarrow{BA}_{BC} = \frac{1}{\sqrt{22}^2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{22}(3; -3; 2) = \left(\frac{3}{22}; -\frac{3}{22}; \frac{2}{22}\right)$$

A magasságpontba mutató $\mathbf{m_a}$ helyvektor:

$$\mathbf{m_a} = \mathbf{b} + \overrightarrow{BA}_{BC} = (4; 1; 3) + \left(\frac{3}{22}; -\frac{3}{22}; \frac{2}{22}\right) =$$

$$= \left(\frac{91}{22}; \frac{19}{22}; \frac{34}{11}\right)$$

Egy lehetséges irányvektor:

$$\overrightarrow{AM_A} = \mathbf{m_a} - \mathbf{a} = \left(\frac{91}{22}; \frac{19}{22}; \frac{34}{11}\right) - (3; -1; 2) = \left(\frac{25}{22}; \frac{41}{22}; \frac{12}{11}\right)$$

De inkább válasszuk az előbbi 22-szeresét, azaz $\mathbf{v} = (25; 41; 24)$.

Most már felírhatjuk az A ponton átmenő magasságvonal egyenletrendszerét:

$$\frac{x-3}{25} = \frac{y+1}{41} = \frac{z-2}{24}$$

3.3. Sík egyenlete

3.3.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy $A(2;3;5)$ ponton és normálvektora: $\mathbf{n} = (4;7;6)$.

   Megoldás: Az $A(a_1;a_2;a_3)$ ponton átmenő, adott $\mathbf{n} = (n_1;n_2;n_3)$ normálvektorú sík egyenlete:

   $$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)+n_3(z-a_3)=0$$

   Ebben az esetben:

   $$4(x-2)+7(y-3)+6(z-5)=0$$

   Rendezés után a keresett sík egyenlete:

   $$S: \qquad 4x+7y+6z=59$$

2. **Feladat:** Adjuk meg a $x-y=3z+5$ egyenletű sík két pontját és egy normálvektorát.

   Megoldás: A síkra olyan pontok illeszkednek, amelyek teljesítik $x-y=3z+5$ egyenlőséget. Válasszunk a pont három koordinátája közül kettőt tetszőlegesen, majd a sík egyenletébe behelyettesítve, határozzuk meg a harmadik koordinátát.

   Legyen például $y=z=0$, ekkor az egyenlőség alapján $x=5$.

   Tehát egy pont a síkról: $A_1(5,0;0)$.

   Ha $x=-1$, $y=0$, akkor $z=-2$ adódik.

   Egy másik pont a síkról: $A_2(-1;0,-2)$.

   A sík normálvektorának meghatározásához egy oldalra rendezzük az egyenletet és ekkor x,y,z együtthatói adják a keresett vektort.

   Most:

   $$x-y-3z-5=0$$

   Tehát egy normálvektor: $\mathbf{n}=(1;-1;-3)$.

   Megjegyzés: Vegyük észre, hogy egy normálvektor tetszőleges hosszúságú lehet, így az előbbi vektor bármely (0-tól különböző) számszorosa is normálvektor.

3. **Feladat:** Adjuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely illeszkedik az origóra és merőleges az $e: x=y=3z$ egyenesre.

   Megoldás: Szükségünk van egy pontra és egy normálvektorra. A pont ebben az esetben az origó. Normálvektort kell még megadni.

Ha az e egyenes merőleges az S síkra, akkor az egyenes bármely irányvektora is merőleges a síkra. Tehát az egyenes egy irányvektora a keresett sík egy normálvektora.

Írjuk át az egyenes egyenletrendszerét úgy, hogy x, y, z együtthatója 1 legyen. Majd olvassuk le az egyenes irányvektorát!

$$e : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \quad t \in \mathbf{R}$$

Tehát egy irányvektor: $\mathbf{v} = \left(1; 1; \dfrac{1}{3}\right)$.

Most célszerű normálvektornak választani az irányvektor háromszorosát, azaz

$$\mathbf{n} = 3\mathbf{v} = (3; 3; 1)$$

Így a sík egyenlete:

$$3(x - 0) + 3(y - 0) + (z - 0) = 0$$

Rendezés után:

$$S : \quad 3x + 3y + z = 0$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a sík egyenletében a konstans tag 0. Ez nem véletlen. Bebizonyítható, hogy bármely origóra illeszkedő sík egyenletében a konstans tag mindig 0.

4. **Feladat:** Döntsük el, hogy az $A(1; 5; 1)$ és $B(2; 3; 5)$ pontok illeszkednek-e $S : 2x - y + 5z = 2$ egyenletű síkra!

   Megoldás: Ha a pontok koordinátáit behelyettesítjük a sík egyenletébe és az egyenlőség teljesül, akkor a pont illeszkedik a síkra.

   Nézzük az A pontot.

   $$2 \cdot 1 - 5 + 5 \cdot 1 = 2$$

   Tehát A pont illeszkedik.

   Most vizsgáljuk meg a B pontot.

   $$2 \cdot 2 - 3 + 5 \cdot 5 \neq 2$$

   Tehát B nem illeszkedik a síkra.

5. **Feladat:** Vizsgáljuk meg, hogy milyen a valós szám esetén lesz az $S : ax + 8y - 4z = 7$ egyenletű sík párhuzamos-e az $e : x = 4t \quad y = 2 - 3t \quad z = 3 \quad t \in \mathbf{R}$ egyenessel.

   Megoldás: Ha az S sík párhuzamos az e egyenessel, akkor a sík egy $\mathbf{n_s}$ normálvektora merőleges az e egyenesre. Ekkor a sík egy $\mathbf{n_s}$ normálvektora merőleges az e egyenes egy tetszőleges $\mathbf{v}$ irányvektorára is.

Először adjuk meg a sík egy normálvektorát és az egyenes egy irányvektorát.

$$\mathbf{n_s} = (a; 8; -4) \quad \mathbf{v} = (4; -3; 0)$$

Úgy kell választanunk a értékét, hogy $\mathbf{n_s} \perp \mathbf{v}$ teljesüljön. De a két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha $\langle \mathbf{n_s}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

$$\langle \mathbf{n_s}, \mathbf{v} \rangle = 4a - 24 + 0 = 0$$

Megoldva az egyenletet $a = 6$ adódik.

Tehát az S sík párhuzamos az e egyenessel, ha $a = 6$.

6. **Feladat:** Adjuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2; 3; 5)$ ponton és párhuzamos a koordinátarendszer xz síkjával!

   Megoldás: Meg kell adnunk a keresett sík normálvektorát. Ha a két sík párhuzamos, akkor az xy sík egy normálvektora egyben a keresett sík egy normálvektora is. Az xz sík egy normálvektora pedig az

   $$\mathbf{n_{xz}} = \mathbf{j} = (0; 1; 0)$$

   vektor.

   Az S sík egyenlete:

   $$S: \quad 0(x - 2) + 1(y - 3) + 0(z - 5) = 0$$

   Rendezés után a keresett sík egyenlete: $y = 3$.

   Ez egy olyan síknak az egyenlete, amelyre illeszkedő pontok második koordinátája mindig 3. Például a $P(4; 3; 5)$ és $Q(0; 3; 0)$ pontok rajta vannak a keresett síkon.

3.3.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Adjuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2; 3; 5)$ ponton és illeszkedik az y tengelyre.

   Megoldás: A sík megadásához szükségünk van egy pontra és egy normálvektorra. A pont adott, a normálvektort kell meghatároznunk.

   Ha a sík illeszkedik egy egyenesre, akkor a sík egy normálvektora merőleges lesz az egyenesre, és így az egyenes egy irányvektorára is.

   Tehát olyan $\mathbf{n}$ normálvektort keresünk, amely merőleges az y tengely

   $$\mathbf{v_y} = \mathbf{j} = (0; 1; 0)$$

   irányvektorára.

Másrészt, ha megadnánk egy Q pontot az y tengelyen, akkor a $\overrightarrow{QP}$ vektor illeszkedik a síkra, tehát merőleges az $\mathbf{n}$ normálvektorra.

Adjunk meg egy pontot az y tengelyről! A legegyszerűbb az origó, azaz $Q(0;0;0)$. Ekkor $\overrightarrow{QP} = \mathbf{p} = (2;3;5)$

Tehát a keresünk egy $\overrightarrow{QP}$ és $\mathbf{v_y}$ vektorokra merőleges vektort. A feltételnek megfelel a két vektor vektoriális szorzata.

Ezért legyen

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{QP} \times \mathbf{v_y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-5;0;2)$$

Az S sík egyenlete:

$$-5(x-2) + 0(y-3) + 2(z-5) = 0$$

Rendezve a keresett sík egyenlete:

$$S: \quad -5x + 2z = 0$$

2. **Feladat:** Adjuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(0;4;-7)$ ponton és merőleges

$$S_1 : 2x - y - z = 1 \quad \text{és} \quad S_2 : 4x - y + z = 12$$

síkokra.

Megoldás: Jelölje $\mathbf{n_s}, \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}$ rendre $S, S_1 S_2$ síkok normálvektorait.

Ha S merőleges S_1-re és S_2-re, akkor normálvektoraik is merőlegesek, azaz $\mathbf{n_s} \perp \mathbf{n_1}$ és $\mathbf{n_s} \perp \mathbf{n_2}$.

Tehát a keresett normálvektor két ismert vektorra merőleges, akkor legyen $\mathbf{n_s} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$.

Olvassuk le a normálvektorokat:

$$\mathbf{n_1} = (2;-1;-1) \qquad \mathbf{n_2} = (4;-1;1)$$

$$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2;-6;2)$$

Egy lehetséges normálvektor: $(-2;-6;2)$.

A számolás egyszerűbb, ha a normálvektor inkább

$$\mathbf{n_s} = -\frac{1}{2}(-2;-6;2) = (1;3;-1).$$

Az S sík egyenlete:

$$(x-0)+3(y-4)-(z+7)=0$$

Rendezve:

$$S: \quad x+3y-z=19$$

3. **Feladat:** Adjuk meg annak az S síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(5;2;-4)$ ponton, merőleges az $S_1 : x+y+z=1$ síkra és párhuzamos az $e : 2x=-y=5-z \quad t \in \mathbf{R}$ egyenessel.

   Megoldás: A sík egyenletéhez szükségünk van a pont mellett egy normálvektorra. Mivel a két sík merőleges egymásra, ezért normálvektoraik is merőlegesek.

   Másrészt, ha az S sík párhuzamos az e egyenessel, akkor az S sík egy $\mathbf{n_s}$ normálvektora merőleges az e egyenes egy $\mathbf{v_e}$ irányvektorára.

   Az S_1 sík egy normálvektora:

$$\mathbf{n_1}=(1;1;1)$$

   Az e egyenes egy irányvektorának megadásához írjuk át az egyenletrendszert:

$$e: \frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{-1}=\frac{z-5}{-1}$$

   Egy irányvektor

$$\left(\frac{1}{2};-1;-1\right)$$

   Az egyszerűbb számolás miatt legyen

$$\mathbf{v_e}=2\left(\frac{1}{2};-1;-1\right)=(1;-2;-2)$$

   A $\mathbf{n_1}$ normálvektorra és $\mathbf{v_e}$ irányvektorra merőleges vektort keresünk. A $\mathbf{n_1}\times\mathbf{v_e}$ vektor éppen megfelel a feltételnek.

$$\mathbf{n_1}\times\mathbf{v_e}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=(0;3;-3)$$

   Legyen most $\mathbf{n_s}=\frac{1}{3}(0;3;-3)=(0;1;-1)$.
   Az S sík egyenlete:

$$0(x-5)+(y-2)-(z+4)=0$$

   Rendezve:

$$S: \quad y-z-6=0$$

4. **Feladat:** Adjuk meg annak az f egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(2;3;5)$ ponton, párhuzamos az $S: x + 2y - 3z = 1$ síkkal és merőleges az $e: x = 1 \quad y = 5+3t \quad z = -t \quad t \in \mathbf{R}$ egyenesre.

   Megoldás: A keresett f egyenes merőleges e egyenesre, ezért irányvektoraik is merőlegesek, azaz $\mathbf{v_f} \perp \mathbf{v_e}$.

   Másrészt, ha f egyenes párhuzamos S síkkal, akkor $\mathbf{v_f} \perp \mathbf{n_s}$

   Mivel $\mathbf{n_s}$-re és $\mathbf{v_e}$-re is merőleges vektort keresünk, ezért legyen $\mathbf{v_f} = \mathbf{n_s} \times \mathbf{v_e}$.

   Olvassuk le az e egyenes egy irányvektort és az S sík egy normálvektort:

$$\mathbf{n_s} = (1;2;-3) \quad \mathbf{v_e} = (0;3;-1)$$

$$\mathbf{v_f} = \mathbf{n_s} \times \mathbf{v_e} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (7;1;3)$$

   Az f egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 2 + 7l \quad y = 3 + l \quad z = 5 + 3l \quad l \in \mathbf{R}$$

5. **Feladat:** Írjuk fel azon S síknak az egyenletét, amely illeszkedik az

$$e_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{2} \quad \text{és} \quad e_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{-3-z}{2}$$

   egyenesekre.

   Megoldás: Vegyük észre, hogy két párhuzamos egyenesről van szó, mivel irányvektoraik megegyeznek.

   Az egyenletrendszert írjuk át úgy, hogy z együtthatója is 1 legyen.

$$e_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2} \quad \text{és} \quad e_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$$

   Ekkor látszik, hogy $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} = (3;2;-2)$

   Mivel a megadott két egyenes illeszkedik a keresett S síkra, ezért a sík egy $\mathbf{n}$ normálvektora merőleges az egyenesekre, így azok egy közös irányvektorára is.

   Az előző feladatokhoz hasonlóan adjunk meg egy másik olyan vektort, amelyre szintén merőleges a keresett sík normálvektorra. Ha megadnunk egy-egy pontot az egyenesekről, akkor a keresett sík merőleges a két pontot összekötő egyenesre, azaz egyik pontból a másik pontba mutató vektorra.

Olvassunk le egy-egy pontot az egyenesekről.

$$e_1: \qquad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2} = 0$$

Az e_1 egyenes egy pontja: $P(2;-1,3)$.

$$e_2: \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2} = 0$$

Az e_2 egyenes egy pontja: $Q(1;2;-3)$.

Ekkor $\overrightarrow{PQ} = (-1;3;-6)$

Tudjuk, hogy $\mathbf{n} \perp \mathbf{v_1}$ és $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{PQ}$, ezért legyen

$$\mathbf{n} = \mathbf{v_1} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = (-6;20;11)$$

A két egyenesre illeszkedő sík egyenlete P pontra felírva:

$$-6(x-2) + 20(y+1) + 11(z-3) = 0$$

$$-6x + 12 + 20y + 20 + 11z - 33 = 0$$

Rendezve:

$$S: 6x - 20y - 11z + 1 = 0$$

A Q pontra felírva ugyanezt az egyenletet kapjuk.

3.4. Térelemek távolsága

3.4.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $A(3;-2;6)$ és $B(1;0;-4)$ pontok távolságát.

   Megoldás: Az $A(a_1;a_2;a_3)$ és $B(b_1;b_2;b_3)$ pontok távolsága megegyezik az $\overrightarrow{AB}$ vektor hosszával:

   $$d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}|| = ||\mathbf{b}-\mathbf{a}|| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$$

   Ebben a feladatban $A(3,-2;6)$ és $B(1;0;-4)$, ekkor

   $$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a} = (-2;2;-10)$$

   $$d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}|| = ||\mathbf{b}-\mathbf{a}|| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-10)^2} = \sqrt{108}$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg

$$A(2;-1;5) \qquad B(3;2;1) \qquad C(6;4;3)$$

csúcspontú háromszög kerületét.

Megoldás: A háromszög kerülete az oldalai hossszának összegével egyenlő, másképp, a csúcspontok egymástól mért távolságainak összegével.

$$K = d(A,B) + d(A,C) + d(B,C) = ||\overrightarrow{AB}|| + ||\overrightarrow{AC}|| + ||\overrightarrow{BC}||$$

Írjuk fel a vektorokat és számoljuk ki a hosszukat:

$$\overrightarrow{AB} = (1;3;-4) \qquad d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{AC} = (4,5;-2) \qquad d(A,C) = ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{45}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3;2;2) \qquad d(B,C) = ||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{17}$$

Tehát a háromszög kerülete: $K = \sqrt{26} + \sqrt{45} + \sqrt{17} \approx 15.93$

3. **Feladat:** Határozzuk meg az $A(4;2;-1)$ pont és a BC szakasz felezéspontjának távolságát, ha

$$B(2;-1;-5) \quad C(0;3;5)$$

Megoldás: Adjuk meg az F felezéspont koordinátáit:

$$F\left(\frac{2+0}{2}; \frac{-1+3}{2}; \frac{-5+5}{2}\right) = F(1;1;0)$$

$$\overrightarrow{AF} = (-3;-1,1)$$

$$d(A,F) = ||\overrightarrow{AF}|| = \sqrt{11}$$

3.4.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $A(4;-2;-1)$ pont és az

$e: \quad x = 3-2t \quad y = 4+t \quad z = 4 \quad t \in \mathbf{R}$ egyenes távolságát.

Megoldás: Tudjuk, hogy egy P pont távolsága egy $\mathbf{v}$ irányvektorú és P_0 pontra illeszkedő egyenestől :

$$d(P,e) = \frac{||(\mathbf{p}-\mathbf{p_0}) \times \mathbf{v}||}{||\mathbf{v}||} = \frac{||\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v}||}{||\mathbf{v}||}$$

Ebben az esetben P pontnak az A pont felel meg. Szükségünk van egy P_0 pontra az egyenesről. és egy irányvektorra.

$$\text{Ha} \quad t = 0, \quad \text{akkor} \quad P_0(3,4;4)$$

Egy irányvektor:

$$\mathbf{v} = (-2;1;0)$$

Ha $A(4;-2;-1)$, akkor

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0A} = (1;-6;-5)$$

$$\overrightarrow{P_0A} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -6 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

A kapott vektor hossza:

$$||\overrightarrow{P_0A} \times \mathbf{v}|| = \sqrt{5^2 + 10^2 + (-11)^2} = \sqrt{246}$$

Az irányvektor hossza:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

A pont és az egyenes távolsága:

$$d(A,v) = \frac{||(\mathbf{a} - \mathbf{p_0}) \times \mathbf{v}||}{||\mathbf{v}||} = \frac{||\overrightarrow{P_0A} \times \mathbf{v}||}{||\mathbf{v}||} = \frac{\sqrt{246}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{246}{5}} \approx 7.01$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az

$$e_1: \qquad x = 2 + 3t \quad y = t \quad z = 1 + 3t \qquad t \in \mathbf{R}$$

és

$$e_2: \qquad x = -2 + 3l \quad y = 1 + l \quad z = -4 + 3l \qquad l \in \mathbf{R}$$

párhuzamos egyenesek távolságát.

Megoldás: A két egyenes valóban párhuzamos, mivel irányvektoraik megegyeznek, $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} = (3;1;3)$.

Két párhuzamos egyenes távolsága megegyezik az egyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől vett távolságával. Tehát adjuk meg e_1 egyenes egy tetszőleges pontját és határozzuk meg ezen pontnak e_2 egyenestől vett távolságát.

Az e_1 egyenes egy tetszőleges pontja, ha $t = 0$

$$P(2;0;1).$$

Az e_2 egyenes egy tetszőleges pontja, ha $l = 0$ és egy irányvektorának hossza:

$$P_0(-2;1;-4) \qquad \mathbf{v_2} = \sqrt{19}$$

$$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{p} - \mathbf{p_0} = (4;-1;5)$$

$$\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -8\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

A kapott vektor hossza:

$$||\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v_2}|| = ||-8\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}|| = \sqrt{122}$$

Helyettesítsünk be a távolságot megadó képletbe.

$$d(P,v) = \frac{||(\mathbf{p} - \mathbf{p_0}) \times \mathbf{v_2}||}{||\mathbf{v}||} = \frac{||\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{v_2}||}{||\mathbf{v_2}||} = \frac{\sqrt{122}}{\sqrt{19}} = \sqrt{\frac{122}{19}}$$

Tehát a két párhuzamos egyenes távolsága:

$$d(e_1,e_2) = d(P,v) = \sqrt{\frac{122}{19}} \approx 2.53.$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg az A pont távolságát az S síktól, ha

$$A(1;-2;1) \qquad \text{és} \qquad S: \quad x - y + 3z = -5.$$

Megoldás:

1. megoldás: Legyen Q egy tetszőleges pontja egy $\mathbf{n}$ normálvektorú S síknak. Ekkor az A pont távolságát az S síktól a $\overrightarrow{QA}$ vektor $\mathbf{n}$ normálvektorra eső merőleges vetületének hossza adja, azaz

$$d(A,S) = \left| \frac{\langle \overrightarrow{QA}, \mathbf{n} \rangle}{||\mathbf{n}||} \right|$$

Tehát a feladat megoldásához szükségünk van egy pontra a síkról és egy normálvektorra.

Egy tetszőleges pont megadásához két koordinátát szabadon választhatunk, majd a harmadikat a sík egyenlete alapján meghatározzuk.

Például, ha $y = z = 0$, akkor $x = -5$.

Tehát az S sík egy pontja:

$$Q(-5;0;0)$$

Olvassuk le a sík egy normálvektorát és annak hosszát.

$$\mathbf{n} = (1; -1; 3) \quad ||\mathbf{n}|| = \sqrt{11}$$

Képezzük a $\overrightarrow{QA}$ vektort.

$$\overrightarrow{QA} = (6; -2; 1)$$

Helyettesítsünk be a távolságot megadó képletbe.

$$d(A, S) = \left| \frac{\langle \overrightarrow{QA}, \mathbf{n} \rangle}{||\mathbf{n}||} \right| = \left| \frac{6 + 2 + 3}{\sqrt{11}} \right| = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \approx 3.3$$

2. megoldás: Geometriai ismereteink alapján tudjuk, hogy egy pont és egy sík távolsága megegyezik a pontnak és síkra eső merőleges vetületének távolságával. Ez azt jelenti, ha meghatározzuk az A pontnak az S síkra eső M merőleges vetületét, akkor a feladat két pont távolságának meghatározására egyszerűsödik. Merőleges vetítéshez pedig szükségünk van egy olyan egyenesre, amely merőleges az S síkra és átmegy A ponton. Ekkor a vetítőegyenes és az S sík metszéspontja lesz az A pont vetülete a síkon.

Írjuk fel a vetítőegyenes egyenletét. Mivel az egyenes merőleges a síkra, ezért az irányvektora megegyezik az S sík egy normálvektorával.

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} = (1; -1; 3)$$

A vetítőegyenes paraméteres egyenletrendszere az $A(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \end{array})$ pontra felírva:

$$x = 1 + t \qquad y = -2 - t \qquad z = 1 + 3t \qquad t \in \mathbf{R}$$

Határozzuk meg a vetítőegyenes és az S sík metszéspontját.

$$(1 + t) - (-2 - t) + 3(1 + 3t) = -5 \qquad \Rightarrow \qquad t = -1$$

Tehát a vetületpont éppen a vetítőegyenes $t = -1$ paraméterhez tartozó pontja.

$$M(0; -1; -2)$$

Határozzuk meg A és M pontok távolságát.

$$d(A, M) = ||\overrightarrow{AM}|| = ||(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -3 \end{array})|| = \sqrt{11}$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg az S_1 és S_2 síkok távolságát, ha

$$S_1 : \quad 2x + y - 4z = 0 \qquad S_2 : \quad 2x + y - 4z = 10.$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy két párhuzamos sík távolságát kell meghatároznunk. Ekkor a távolság megegyezik az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól vett távolságával.

Ennél a feladatnál válasszunk egy pontot S_1 síkról és határozzuk meg a távolságát az S_2 síktól. Olvassunk le egy pontot az S_1-ről. Mivel a sík egyenletében a konstans tag 0, ezért az S_1 sík illeszkedik az origóra. Tehát számoljuk ki S_2 távolságát az origótól.

Szükségünk van S_2 sík egy normálvektorára és annak hosszára.

$$\mathbf{n} = (2;1;-4) \qquad ||\mathbf{n}|| = \sqrt{21}$$

Adjunk meg egy Q pontot az S_2 síkról. Legyen $x = z = 0$. Ekkor $y = 10$.

$$Q(0;10,0) \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{OQ} = \mathbf{q} = (0;10,0)$$

Helyettesítsünk be a távolságot megadó képletbe.

$$d(O, S_2) = \left| \frac{\langle \overrightarrow{OQ}, \mathbf{n} \rangle}{||\mathbf{n}||} \right| = \left| \frac{0+10+0}{\sqrt{21}} \right| = \frac{10}{\sqrt{21}} \approx 2.18$$

Tehát a két párhuzamos sík távolsága:

$$d(S_1, S_2) = d(O, S_2) = \frac{10}{\sqrt{21}} \approx 2.18$$

5. **Feladat:** Határozzuk meg az S sík és a vele párhuzamos e egyenes távolságát, ha

$$S: \quad x + 2y + 6z = 16$$

és

$$e: \qquad x = 2t \qquad y = 3 + 2t \qquad z = -t \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Megoldás: Ha egy sík és egy egyenes párhuzamos egymással, akkor az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól vett távolsága adja a sík és vele párhuzamos egyenes távolságot. Első lépésként nézzük meg, hogy valóban párhuzamos -e az S sík az e egyenessel.

Olvassunk le egy irányvektort és egy normálvektort.

$$\mathbf{v} = (2;2;-1) \qquad \mathbf{n} = (1,2;6)$$

Mivel

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 2 + 4 - 6 = 0,$$

azaz a két vektor skaláris szorzata 0, ezért a két vektor merőleges, ez pedig azt jelenti, hogy az S sík az e egyenes valóban párhuzamosak.

Adjunk meg egy tetszőleges A pontot az e egyenesen és határozzuk meg az A pont és az S sík távolságával.

Legyen $t = 0$. Ekkor

$$A(0,3,0)$$

A számolás elvégzéséhez kell egy Q pont az S síkról.

Legyen $y = z = 0$, ekkor $x = 16$.

$$Q(16;0;0) \qquad \overrightarrow{QA} = (-16,3;0)$$

Helyettesítsünk be a távolságképletbe:

$$\mathbf{n} = (1;2;6) \qquad ||\mathbf{n}|| = \sqrt{41}$$

$$d(A,S) = \left|\frac{\langle\overrightarrow{QA},\mathbf{n}\rangle}{||\mathbf{n}||}\right| = \left|\frac{-16+6+0}{\sqrt{41}}\right| = \frac{10}{\sqrt{41}} \approx 1.56$$

Tehát az S sík és a vele párhuzamos e egyenes távolsága:

$$d(e,S) = d(A,S) = \frac{10}{\sqrt{41}} \approx 1.56$$

6. **Feladat:** Határozzuk meg az $ABCD$ csúcspontú tetraéderben a B pont távolságát az ACD síktól, ha

$$A(2,0;1) \qquad B(2,-1;-5) \quad C(0;3;5) \qquad D(-3;2;0)$$

Megoldás: Tehát egy pont és sík távolságát kell meghatároznunk. Vegyük észre, hogy ebben az esetben csak ACD sík egy normálvektorát kell meghatároznunk és a számolást el tudjuk végezni.

Az ACD pontokra illeszkedő sík keresett normálvektora merőleges az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokra, ezért legyen

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$$

Határozzuk meg $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokat.

$$\overrightarrow{AC} = (-2;3;4) \qquad \overrightarrow{AD} = (-5;2;-1)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

A számolás egyszerűbb, ha

$$\mathbf{n} = \frac{1}{11}(-11;-22;11) = (-1;-2;1) \qquad ||\mathbf{n}|| = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AB} = (0;-1;-6)$$

$$d(B,ACD) = \left|\frac{\langle\overrightarrow{AB},\mathbf{n}\rangle}{||\mathbf{n}||}\right| = \left|\frac{2-6}{\sqrt{6}}\right| = \frac{4}{\sqrt{6}} \approx 1.63$$

7. **Feladat:** Határozzuk meg az e_1 és e_2 egyenesek távolságát, ha

$$e_1: \qquad x = 1 + t \qquad y = -t \qquad z = 2 \qquad t \in \mathbf{R}.$$

és

$$e_2: \qquad x = 4 - 2l \qquad y = 1 + l \qquad z = 3 - l \qquad l \in \mathbf{R}.$$

Megoldás: Nézzük meg először, hogy milyen lehet a két egyenes kölcsönös helyzete.

Mivel

$$\mathbf{v_1} = (1; -1; 0) \qquad \mathbf{v_2} = (-2, 1; -1)$$

és az azonos indexű koordináták hányadosai hányadosai nem egyenlőek, azaz

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{1},$$

a két vektor és így a két egyenes is, nem párhuzamosak.

Vajon metszik-e egymást az egyenesek? Oldjuk meg a következő 6 egyenletből álló egyenletrendszert.

$$x = 1 + t \qquad y = -t \qquad z = 2$$

és

$$x = 4 - 2p \qquad y = 1 + p \qquad z = 3 - p$$

Vegyük észre, hogy most egy olyan metszéspontot keresünk, amelynek a harmadik koordinátája 2.

Így

$$3 - p = 2 \qquad \Rightarrow \qquad p = 1$$

A $p = 1$ paraméterhez tartozó pont az e_2 egyenesen

$$(2, 2; 1)$$

De a kapott pont nem illeszkedik az e_1 egyenesre, mert nincs olyan t, amelyre teljesülne, hogy

$$1 + t = 2 \qquad \text{és} \qquad -t = 2.$$

Tehát két olyan egyenesünk van, amelyek nem párhuzamosak és nem is metszik egymást. Az ilyen egyeneseket kitérő egyeneseknek nevezzük. Ekkor létezik két olyan párhuzamos S_1 és S_2 sík, hogy S_1-re az e_1 egyenes, az S_2-re pedig az e_2 egyenes illeszkedik. A két kitérő egyenes távolsága pedig megegyezik a két párhuzamos sík távolságával, azaz $d(e_1, e_2) = d(S_1, S_2)$. A két párhuzamos sík távolsága pedig visszavezethető az egyik síkon levő pontnak a másik síktól vett távolságára.

Adjuk meg az S_2 síkon levő e_2 egyenes egy tetszőleges A_2-vel jelölt pontját.

Ha $l = 0$, akkor

$$A_2(4; 1; 3)$$

Tehát a keresett távolság megegyezik A_2 pontnak S_1 síktól vett távolságával:

$$d(e_1, e_2) = d(S_1, S_2) = d(A_1, S_2)$$

Végezzük el a számolásokat.

Szükségünk van az S_1 sík egy pontjára és egy normálvektorára.

Mivel e_1 illeszkedik S_1-re, ezért legyen $t = 0$, ekkor

$$A_1(1; 0; 2)$$

Az S_1 sík egy normálvektora merőleges e_1 és e_2 egyenesekre, így merőleges azok $\mathbf{v_1}$ és $\mathbf{v_2}$ irányvektoraikra is, így legyen

$$\mathbf{n} = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = (1; 1; -1) \qquad ||\mathbf{n}|| = \sqrt{3}$$

Számoljuk ki $\overrightarrow{A_1A_2}$ vektor koordinátáit.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (3; 1; 1)$$

A két párhuzamos sík távolsága:

$$d_{S_1,S_2} = \left| \frac{\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \mathbf{n} \rangle}{||\mathbf{n}||} \right| = \left| \frac{3 + 1 - 1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{3}{\sqrt{3}} \approx 1.73$$

Tehát a két kitérő egyenes távolsága

$$d(e_1, e_2) = d(S_1, S_2) = d(A_1, S_2) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1.73$$

3.5. Térelemek hajlásszöge és metszéspontja

3.5.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az e és f egyenesek β hajlásszögét, ha:

$$e: \quad x = 2 - 3t \quad y = 4 + t \quad z = t \quad t \in \mathbf{R}$$

$$f: \quad \frac{x - 3}{2} = \frac{2 - y}{3} = z - 5$$

Megoldás: Két metsző egyenes hajlásszöge megegyezik az egyenesek által közbezárt kisebbik szöggel. Ha a két egyenes nem metszi egymást, akkor párhuzamos eltolással metsző helyzetbe hozható. Ez azt jelenti, hogy $0° \leq \beta \leq 90°$ Ez a hajlásszög meghatározható a két egyenes irányvektorával. Jelöljük az e és f egyenesek egy-egy irányvektorát $\mathbf{v_e}$-vel és $\mathbf{v_f}$ -fel. Ekkor a két egyenes θ hajlásszögének koszinusza az irányvektorokkal kifejezve:

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f} \rangle}{||\mathbf{v_e}|| \cdot |||\mathbf{v_f}||}$$

Ha a két irányvektor θ hajlásszöge hegyeszög ($\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f} \rangle \geq 0$), akkor

$$\beta = \theta = \arccos \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f} \rangle}{||\mathbf{v_e}|| \cdot |||\mathbf{v_f}||}$$

Ha az két irányvektor által közbezárt θ hajlásszög tompaszög ($\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f} \rangle < 0$), akkor

$$\beta = \pi - \theta = \pi - \arccos \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f} \rangle}{||\mathbf{v_e}|| \cdot |||\mathbf{v_f}||}$$

Olvassuk le az e és f egyenesek egy-egy $\mathbf{v_e}$ és $\mathbf{v_f}$ irányvektorát és határozzuk meg a vektorok hosszát.

$$\mathbf{v_e} = (-3; 1; 1) \quad \text{és} \qquad ||\mathbf{v_e}|| = \sqrt{11}$$

Az f irányvektorának megadásához előbb írjuk át az egyenes egyenletrendszerét.

$$f: \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{1}$$

Innen:

$$\mathbf{v_f} = (2; -3; 1) \qquad \text{és} \qquad ||\mathbf{v_f}|| = \sqrt{14}$$

Mivel

$$\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f} \rangle = -6 - 3 + 1 = -8,$$

a két irányvektor hajlásszögének koszinusza:

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f} \rangle}{||\mathbf{v_e}|| \cdot |||\mathbf{v_f}||} = \frac{-8}{\sqrt{11 \cdot 14}} \approx -0.65$$

Mivel $\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f} \rangle < 0$, a két irányvektor tompaszöget zár be és

$$\theta = \arccos \frac{-8}{\sqrt{11 \cdot 14}} \approx \arccos(-0.65) \approx 130,14°$$

Tehát

$$\beta = \pi - \theta \approx 49.86°$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az e egyenes és y tengely β hajlásszögét, ha:

$$e: \quad x = 4 \quad y = 4t - 1 \quad z = 3 + 2t \quad t \in \mathbf{R}$$

Megoldás: Első lépésként meg kell adni a két egyenes egy-egy irányvektorát és azok hosszát:

$$\mathbf{v_e} = (0; 4; 2) \quad \text{és} \qquad ||\mathbf{v_e}|| = \sqrt{20}$$

$$\mathbf{v_y} = \mathbf{j} = (0; 1; 0) \quad \text{és} \qquad ||\mathbf{v_y}|| = 1$$

A két irányvektor skaláris szorzata:

$$\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_y} \rangle = 4 > 0,$$

tehát a két irányvektor által közbezárt θ szög hegyesszög és

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_y} \rangle}{||\mathbf{v_e}|| \cdot |||\mathbf{v_y}||} = \frac{4}{\sqrt{20}} \approx 0.89$$

Így

$$\beta = \theta \approx \arccos 0.89 \approx 27.13^\circ$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg az $A(2; 3; -1)$, $B(5; 4, 3)$, $C(2, -1; 6)$ és $D(-1, -3; 2)$ paralelogramma átlóinak hajlásszögét.

(Az A és C a szemközti csúcsok.)

Megoldás: Adjuk meg a két átló egy-egy irányvektorát és ezek hosszát.

Az AC átló egy irányvektora:

$$\mathbf{v_{AC}} = \overrightarrow{AC} = (0; -4; 7) \qquad \text{és} \qquad ||\mathbf{v_{AC}}|| = \sqrt{65}$$

Az BD átló egy irányvektora:

$$\mathbf{v_{BD}} = \overrightarrow{BD} = (-6; -7; -1) \qquad \text{és} \qquad ||\mathbf{v_{BD}}|| = \sqrt{86}$$

A két irányvektor skaláris szorzata:

$$\langle \mathbf{v_{AC}}, \mathbf{v_{BD}} \rangle = 21 > 0$$

Ekkor a két irányvektor θ hajlásszögének coszinusza:

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v_{AC}}, \mathbf{v_{BD}} \rangle}{||\mathbf{v_{AC}}|| \cdot |||\mathbf{v_{BD}}||} = \frac{21}{\sqrt{65 \cdot 86}} \approx 0.28$$

Innen a két irányvektor hajlásszöge:

$$\theta \approx \arccos(0.28) \approx 73.59^\circ$$

Tehát a két átló β hajlásszöge:

$$\beta = \theta \approx \arccos(0.28) \approx 73.59^\circ$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg S_1 és S_2 β hajlásszögét, ha:

$$S_1 \quad x - 2y + 3z = 15 \qquad S_2: \quad 3x - z = 0.$$

Megoldás: Két metsző sík hajlásszögén az általuk közbezárt kisebbik szöget értjük, tehát $0° \leq \beta \leq 90°$. A keresett szöget a síkok normálvektoraival fogjuk meghatározni. Jelöljük az S_1 és S_2 síkok egy-egy normálvektorát $\mathbf{n_1}$-gyel és $\mathbf{n_2}$ -vel.

Ha a két normálvektor θ hajlásszöge hegyesszög, akkor

$$\beta = \theta = \arccos \frac{\langle \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2} \rangle}{||\mathbf{n_1}|| \cdot |||\mathbf{n_2}||}$$

Ha a két normálvektor θ hajlásszöge tompaszög, akkor

$$\beta = \pi - \theta = \pi - \arccos \frac{\langle \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2} \rangle}{||\mathbf{n_1}|| \cdot |||\mathbf{n_2}||}$$

Olvassuk le először a normálvektorokat, majd határozzuk meg a vektorok hosszát.

$$\mathbf{n_1} = (1; -2; 3) \quad ||\mathbf{n_1}|| = \sqrt{14}$$
$$\mathbf{n_2} = (3, 0; -1) \quad ||\mathbf{n_2}|| = \sqrt{10}$$

A két normálvektor skaláris szorzata:

$$\langle \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2} \rangle = 0$$

Vagyis a két vektor és így a két sík is merőleges egymásra.

Azaz $\beta = \theta = 90°$.

5. **Feladat:** Határozzuk meg S sík és a koordinátarendszer xz síkjának β hajlásszögét, ha:

$$S: \quad z = 5x + 4y$$

Megoldás: Írjuk fel a síkok normálvektorait!

$$S: \quad 5x + 4y - z = 0 \qquad \mathbf{n} = (5; 4; -1) \qquad ||\mathbf{n}|| = \sqrt{42}$$

Az xz sík egy normálvektora pedig:

$$\mathbf{n_{xz}} = \mathbf{j} = (0; 1; 0) \qquad ||\mathbf{n_{xz}}|| = 1$$

A két normálvektor skaláris szorzata:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{n_{xz}} \rangle = 4 > 0,$$

a két normálvektor hegyesszöget zár be és

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n_{xz}} \rangle}{||\mathbf{n}|| \cdot |||\mathbf{n_{xz}}||} = \frac{4}{\sqrt{42}} \approx 0.6172$$

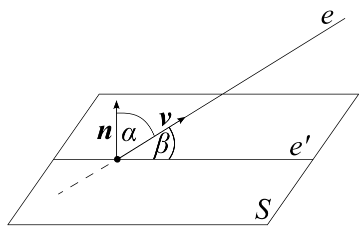
Tehát

$$\beta = \theta \approx \arccos(0.6172) \approx 51,89°$$

6. **Feladat:** Határozzuk meg S sík és az e egyenes β hajlásszögét, ha:

$$S: \quad x+y+z=1 \qquad e: \quad x=-y=\frac{z}{2}$$

Megoldás: Egy sík és egy egyenes hajlásszögén az egyenes és síkra eső merőleges vetületének hajlásszögét értjük. Az ábrán ezt a szöget β-val jelöltük. A definíció alapján $0° \leq \beta \leq 90°$.



Ha ismerjük a sík egy $\mathbf{n}$ normálvektorát és az egyenes egy $\mathbf{v}$ irányvektorát, akkor ismerjük ezen két vektor α hajlásszögének koszinuszát is.

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{n}|| \cdot ||\mathbf{v}||}$$

Ha $\alpha = \frac{\pi}{2}$, akkor a sík és az egyenes párhuzamosak, vagyis a hajlásszögük $\beta = 0°$.

Ha $\alpha < \frac{\pi}{2}$, akkor:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Ha $\alpha > \frac{\pi}{2}$, akkor:

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

Az S sík egy normálvektora:

$$\mathbf{n} = (1;1;1) \qquad ||\mathbf{n}|| = \sqrt{3}$$

Az e egyenes egy irányvektora:

$$e: \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$$

$$\mathbf{v} = (1,-1;2) \qquad ||\mathbf{v}|| = \sqrt{6}$$

A két vektor skaláris szorzata:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 2 > 0$$

Tehát $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, ezért:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{n}|| \cdot ||\mathbf{v}||} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{2}{\sqrt{18}}$$

Tehát

$$\alpha \approx 61.87^\circ \qquad \text{és} \qquad \beta \approx 28.12^\circ$$

7. **Feladat:** Határozzuk meg S sík és a z tengely β hajlásszögét, ha:

$$S: \quad 2x - 3y - 4z = 5$$

Megoldás: Az S sík normálvektora:

$$\mathbf{n} = (2, -3; -4) \qquad ||\mathbf{n}|| = \sqrt{29}$$

A z tengely irányvektora:

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} = (0, 0; 1) \qquad ||\mathbf{v}|| = 1$$

A két vektor skaláris szorzata:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = -4 < 0$$

A két vektor által bezárt $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$, ezért:

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} = \arccos \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{n}|| \cdot ||\mathbf{v}||} - \frac{\pi}{2} = \arccos \frac{-4}{\sqrt{29}} - \frac{\pi}{2}$$

Tehát

$$\alpha \approx 138^\circ \qquad \text{és} \qquad \beta \approx 138^\circ - 90^\circ \approx 48^\circ$$

8. **Feladat:** Határozzuk meg az S sík és az e egyenes metszéspontját, ha:

$$S: \quad x - 2y + 5z = 20 \qquad e: \quad x = t + 2 \quad y = t - 2 \quad z = 3t \quad t \in \mathbf{R}$$

Megoldás: Keressük azt az $M(x; y; z)$ pontot, amely illeszkedik az síkra és az egyenesre is. Ha létezik közös pontjuk, akkor lennie kell egy olyan t paraméternek, amellyel meghatározva az egyenes egy pontját, az rajta van a síkon is.

Helyettesítsük be a keresett pont koordinátáinak, azaz x, y, z-nek a paraméteres alakját a sík egyenletébe, majd oldjuk meg az egyenletet t-re.

$$(t + 2) - 2(t - 2) + 5(3t) = 20$$

Rendezve:

$$14t = 14 \qquad \Rightarrow \quad t = 1$$

Az egyenes $t = 1$ paraméteréhez tartozó pontja: $M(3, -1; 3)$ és ha jól számoltunk ez egyben a sík egy pontja is.

Ellenőrizzük számításunkat. M koordinátáit helyettesítsük be a sík egyenletébe.

$$3 - 2(-1) + 5 \cdot 3 = 20$$

Az egyenlőség teljesül, az $M(3, -1; 3)$ pont illeszkedik az S síkra és e egyenesre is.

9. **Feladat:** Határozzuk meg az S sík és koordinátatengelyek metszéspontjait, ha:

$$S: \quad 3x - y + 4z = 24$$

Megoldás:

Határozzuk meg először az x tengellyel való metszéspontot.

Az x tengelyre olyan pontok illeszkednek, amelyeknek az első koordinátája bármilyen valós szám lehet, de a második és harmadik koordinátája mindig 0.

Tehát keressük a sík azon pontját, amelyre $y = z = 0$.

Behelyettesítve a sík egyenletébe $3x = 24$, azaz $x = 8$.

A sík és x tengely metszéspontja: $M_x(8; 0; 0)$.

Hasonló megfontolással az y tengellyel alkotott metszéspont első és harmadik koordinátája 0, azaz $x = z = 0$. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $y = -24$.

Tehát a síkot az y tengely az $M_y(0, -24; 0)$ pontban metszi.

A z tengellyel vett metszéspontot megkapjuk, ha keressük a sík azon pontját, amelyre $x = y = 0$. Ekkor $z = 6$.

Tehát a sík és a z tengely metszéspontja: $M_z(0; 0; 6)$

10. **Feladat:** Határozzuk meg a két egyenes metszéspontját, ha:

$$f: \quad x = 3 + 2t \quad y = 1 + t \quad z = 2 - t \quad t \in \mathbf{R}$$

$$e: \quad x = p - 1 \quad y = 2 + 2p \quad z = 1 - 2p \quad p \in \mathbf{R}$$

Megoldás: Keressük azt az $M(x, y; z)$ pontot, amely illeszkedik mindkét egyenesre. Ha a két egyenesnek létezik közös pontja, akkor lennie kell olyan t és p paraméterértékeknek, amelyekre az e és f egyenes egy pontjának mindhárom koordinátája megegyezik. Így a következő egyenlőségeket írhatjuk fel.

$$p - 1 = 3 + 2t \qquad 2 + 2p = 1 + t \qquad 1 - 2p = 2 - t$$

Válasszuk ki az első két egyenlet és határozzuk meg t és p paramétereket.

$$p - 1 = 3 + 2t \quad 2 + 2p = 1 + t$$

A második egyenlet (-2)- szeresét hozzáadjuk az első egyenlethez, ekkor t kiesik, és p értéke meghatározható.

$$p - 1 = 3 + 2t \quad -4 - 4p = -2 - 2t$$

$$-3p - 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad p = -2$$

Behelyettesítve p értékét az első egyenletbe : $t = -3$.

Kaptunk t-re és p-re is egy -egy értéket, de meg kell nézni, hogy ezek teljesítik -e a harmadik egyenletet is!

$$1 - 2 \cdot (-2) = 2 - (-3) = 5$$

Az egyenlőség teljesül, ez pedig azt jelenti, hogy létezik metszéspont.

Még a közös metszéspont koordinátáit kell megadni. Ez a közös pont meghatározható a t paraméterrel az f egyenesről vagy p paraméterrel az e egyenesről is.

Ha $t = -3$, ekkor a metszéspont: $M(-3; -2; 5)$.

Megjegyzés: Számolásunkat fejben ellenőrizzük le $p = -2$ behelyettesítésével.

11. **Feladat:** Határozzuk meg az e és f egyenesek metszéspontját, ha:

$$e: \quad x = 6 + 2t \quad y = -3 + t \quad z = 9 + 5t \quad t \in \mathbf{R}$$

$$f: \quad \frac{x-3}{5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{6}$$

Megoldás: Az előzőhöz hasonló a feladat, ha f egyenes egyenletrendszerét átírnánk paraméteres alakra, akkor ugyanúgy megoldhatjuk a feladatot.

De ebben az esetben van egy egyszerűbb megoldás is.

Helyettesítsük be az e egyenesnél szereplő x, y, z kifejezések paraméteres alakját az f egyenes egyenletrendszerébe.

$$f: \quad \frac{6 + 2t - 3}{5} = \frac{-3 + t + 4}{2} = \frac{9 + 5t - 3}{6}$$

Rendezve:

$$f: \quad \frac{3 + 2t}{5} = \frac{t + 1}{2} = \frac{6 + 5t}{6}$$

Ez három egyenletet jelent és csak egy ismeretlent.

$$\frac{3 + 2t}{5} = \frac{t + 1}{2}$$

$$\frac{3+2t}{5} = \frac{6+5t}{6}$$
$$\frac{t+1}{2} = \frac{6+5t}{6}$$

Vegyük az egyik egyenletet, oldjuk meg t-re és nézzük meg, hogy a kapott érték megoldása-e a másik két egyenletnek is.

$$\frac{3+2t}{5} = \frac{t+1}{2}$$

Megoldva: $t = 1$.

Meg kell nézni, hogy a kapott értékre teljesül- e harmadik egyenlet!

$$\frac{t+1}{2} = \frac{6+5t}{6}$$

Mivel

$$\frac{1+1}{2} \neq \frac{6+5}{6}$$

Ez azt jelenti, hogy a második egyenlete már nincs értelme vizsgálni, ugyanis nincs olyan pont, amelyik illeszkedne mindkét egyenesre.

12. **Feladat:** Határozzuk meg az e egyenes és a koordinátarendszer xz síkjának a döféspontját, ha:

$$e: \quad x = 4 - t \quad y = -2 + 2t \quad z = 5t \quad t \in \mathbf{R}.$$

Megoldás: Adjuk meg az xz sík egyenletét: a sík illeszkedik az origóra és normálvektora a $\mathbf{j} = (0,1;0)$ vektor.

Tehát

$$0(x-0) + 1(y-0) + 0(z-0) = 0$$

Ebből az xz sík egyenlete: $y = 0$ és $x, z \in \mathbf{R}$.

Ez egy olyan speciális sík egyenlete, amelyre illeszkedő pontok második koordinátája mindig 0, a másik kettő bármilyen valós szám lehet.

Ezzel a feladat arra egyszerűsödik, hogy adjuk meg az e egyenes azon pontját, amelynek a második koordinátája éppen 0.

Mivel az egyenes egyenletrendszeréből $y = -2 + 2t$, ha $y = 0$, akkor $t = 1$.

Tehát a metszéspont az e egyenes $t = -1$ paraméteréhez tartozó pontja:

$$M(3, 0; 5)$$

3.5.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéderben az AB oldalegyenes felezőmerőleges síkjának és a CD oldalakegyenes hajlásszögét, ha:

$$A(4;7;6) \quad B(0;1;-2) \quad C(-1;5;3) \quad D(4;-5;2).$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a hajlásszög meghatározásához nekünk nincs szükségünk a felezőmerőleges sík egyenletére és a CD egyenes egyenletrendszerére. Elég ismerni a sík egy normálvektorát és az egyenes egy irányvektorát.

Az AB szakasz felezőmerőleges síkja pedig merőleges az AB szakaszra, így a sík egy normálvektora legyen éppen

$$\overrightarrow{AB} = (-4;-6;-8)$$

vektor.

Az egyszerűbb számolás miatt válasszuk inkább az

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2;3;4)$$

vektort.

A CD oldalegyenes egy irányvektor:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{CD} = (5;-10;-1)$$

A két vektor skaláris szorzata:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = -24 < 0$$

A két vektor hossza:

$$||\mathbf{n}|| = \sqrt{29} \qquad ||\mathbf{v}|| = \sqrt{126}$$

A két vektor α hajlásszög:

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{n}||} = \frac{-24}{\sqrt{29}\sqrt{126}}$$

Mivel $\alpha > \frac{\pi}{2}$, ezért a felezőmerőleges sík és az oldalél β hajlásszöge:

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} = \arccos\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{n}|| \cdot ||\mathbf{v}||} - \frac{\pi}{2} = \arccos\frac{-24}{\sqrt{29}\sqrt{126}} - \frac{\pi}{2}$$

Tehát

$$\alpha \approx 107.65^\circ \qquad \text{és} \qquad \beta \approx 17.65^\circ$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéderben az ABC és BCD oldallapok által bezárt szöget, ha:

$$A(4;7;6) \quad B(0;1;-2) \quad C(-1;5;3) \quad D(4;-5;2).$$

Megoldás: Két sík hajlásszöge megadható, ha ismerjük a síkok normálvektororainak a hajlásszögét. Tehát állítsuk elő a feladatban szereplő síkok egy-egy normálvektorát.

Az ABC oldallap normálvektora egy olyan vektor lehet, amely merőleges $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorokra, ezért válasszuk normálvektornak az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektort.

Hasonló megfontolások alapján a BCD oldallap egy normálvektora pedig legyen $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}$ vektor.

Képezzük a vektoriális szorzatokat.

$$\overrightarrow{AB} = (-4;-6;-8) \qquad \overrightarrow{AC} = (-5;-2;-3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -6 & -8 \\ -5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 28\mathbf{j} - 22\mathbf{k}$$

Az ABC oldallap normálvektora az egyszerűbb számolás miatt legyen:

$$\mathbf{n_1} = \frac{1}{2}(2\mathbf{i} + 28\mathbf{j} - 22\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

$$||\mathbf{n_1}|| = \sqrt{1^2 + 14^2 + (-11)^2} = \sqrt{318}$$

$$\overrightarrow{BD} = (4;-6;4) \quad \overrightarrow{BC} = (-1;4;5)$$

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -46\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

Az BCD oldallap normálvektora legyen:

$$\mathbf{n_2} = -\frac{1}{2}(-46\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) = 23\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

$$||\mathbf{n_2}|| = \sqrt{23^2 + 12^2 + (-5)^2} = \sqrt{698}$$

$$\langle \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2} \rangle = 246$$

A két normálvektor hajlásszöge:

$$\theta = \arccos \frac{246}{\sqrt{318}\sqrt{698}}$$

$$\theta \approx 58.52^\circ$$

A két oldallap hajlásszöge:

$$\beta = \theta = \arccos \frac{246}{\sqrt{318}\sqrt{698}}$$

$$\beta \approx 58.52^\circ$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg az $ABCD$ tetraéderben az ABC oldallap és az AD oldalegyenes által bezárt szöget, ha:

$$A(4;7;6) \quad B(0;1;-2) \quad C(-1;5;3) \quad D(4;-5;2).$$

Megoldás: A hajlásszög meghatározásához elegendő ismerni az ABC oldallap egy normálvektorát és az AD oldalegyenes egy irányvektorát.

Használjuk fel, hogy az előző feladatban már meghatároztuk az ABC oldallap egy normálvektorát.

$$\mathbf{n_1} = \mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

$$||\mathbf{n_1}|| = \sqrt{318}$$

Az AD oldalegyenes egy irányvektora lehetne az:

$$\overrightarrow{AD} = (0;-12;-4)$$

vektor, de az egyszerűbb számolás miatt legyen inkább

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = (0;3;1) \qquad ||\mathbf{v}|| = \sqrt{10}.$$

Mivel

$$\langle \mathbf{n_1}, \mathbf{v} \rangle = 31$$

az irányvektor és normálvektor α hajlásszöge:

$$\alpha = \arccos \frac{31}{\sqrt{318} \cdot \sqrt{10}}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \approx \frac{\pi}{2} - 0.989 \approx 90^\circ - 56.65^\circ \approx 33.35^\circ$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg az e egyenes és S sík közös pontját, ha:

$$S: \quad x + 2y - z = 7 \qquad e: \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$$

Megoldás:

1. megoldás: A közös M pont koordinátái legyenek: $(x_0; y_0; z_0)$.

Az egyenes egyenletrendszeréből tudjuk, hogy

$$\frac{x_0 - 2}{3} = \frac{y_0}{3},$$

azaz

$$x_0 = y_0 + 2.$$

Másrészt

$$\frac{y_0}{3} = \frac{z_0 - 5}{4},$$

tehát

$$z_0 = \frac{4}{3}y_0 + 5.$$

A három ismeretlen koordinátából sikerült kettőt, az x_0-t és z_0-t az y_0-val kifejezni. Ha a kapott kifejezéseket behelyettesítjük az S sík egyenletébe, akkor y_0-ra kapunk egy egyenletet.

$$(y_0 + 2) + 2y_0 - \left(\frac{4}{3}y_0 + 5\right) = 7$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $y_0 = 6$.

Ekkor $x_0 = 8$ és $z_0 = 13$.

Tehát a közös pont koordinátái: $M(8; 6; 13)$.

2. megoldás: Adjuk meg az egyenes egyenletrendszerét paraméteres alakban.

Ha az egyenes egyenletrendszere:

$$e: \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} = t \quad t \in \mathbf{R},$$

akkor paraméteres alakban:

$$e: \quad x = 2 + 3t \quad y = 3t \quad z = 5 + 4t \quad t \in \mathbf{R}.$$

Keressük meg a metszésponthoz tartozó t paraméter értékét. Ezért helyettesítsük be az x, y és z paraméteres kifejezéseit a sík egyenletébe és oldjuk meg t-re az egyenletet:

$$(2 + 3t) + 2(3t) - (5 + 4t) = 7$$

Az egyenletet megoldva: $t = 2$.

Az egyenes $t = 2$ paraméteréhez tartozó pontja: $M(8; 6; 13)$.

5. **Feladat:** Határozzuk meg az e egyenes és S sík közös pontját, ha:

$$S \quad 2x - 3y + 3z = 5 \qquad e: \quad \frac{x-1}{-3} = y - 5 = \frac{z-3}{3}$$

Megoldás: Adjuk meg az e egyenes egyenletrendszerét paraméteres alakban.

$$\frac{x-1}{-3} = y - 5 = \frac{z-3}{3} = t$$

$$x = 1 - 3t \quad y = 5 + t \quad z = 3 + 3t$$

Helyettesítsük be a kapott kifejezéseket a sík egyenletébe!

$$2(1-3t) - 3(5+t) + 3(3+3t) = 5$$

Rendezve:

$$0 \cdot t - 4 = 5$$

Az egyenlet rendezése után leolvasható, hogy nincs olyan t paraméterérték, amelyre az egyenlőség teljesül. Ez azt jelenti, hogy nincs az S síknak és az e egyenesnek közös pontja.

Vajon hogyan lehetséges ez? Egy síknak és egy egyenesnek akkor nincs metszéspontja, ha a sík párhuzamos az egyenessel. Nézzük meg tényleg ez az eset áll-e fenn.

A párhuzamosság csak akkor állhat fenn, ha a sík normálvektora merőleges az egyenes irányvektorára:

$$\mathbf{n} = (2; -3; 3) \quad \mathbf{v} = (-3; 1; 3)$$

Írjuk fel a két vektor skaláris szorzatát:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = -6 - 3 + 9 = 0$$

Mivel a skaláris szorzat 0, a sík normálvektora merőleges az egyenes irányvektorára, tehát a feladatban szereplő sík és egyenes valóban párhuzamos.

6. **Feladat:** Határozzuk meg az e egyenes és S sík közös pontját, ha:

$$S: \quad 2x - 3y + 3z = 5 \qquad e: \quad x = 1 \quad y + 1 = z.$$

Megoldás: Keressük meg a sík azon pontját, amelyre $x = 1$ és $z = y + 1$. Végezzük el a behelyettesítést.

$$2 - 3y + 3(y+1) = 5$$

Rendezve az egyenletet:

$$0 \cdot y + 5 = 5$$

Mivel a rendezés után kapott egyenlet tetszőleges y érték mellett teljesül, ezért az egyenes bármely pontja illeszkedik a síkra, azaz az e egyenes rajta van a síkon.

Megjegyzés: Mivel egy sík normálvektora merőleges minden egyenesre, amelyik a síkra illeszkedik, ezért ha megnézzük az egyenes irányvektora és sík normálvektora most is merőleges egymásra (skaláris szorzatuk 0).

7. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi két sík közös f metszésvonalának egyenletrendszerét, ha:

$$S_1: \quad 2x - 3y + z = -10 \qquad S_2: \quad 4x + y - z = 0$$

Megoldás: A metszésvonal csak akkor létezik, ha a két sík nem párhuzamos.. Olvassuk le a síkok normálvektorait és írjuk fel az azonos indexű koordináták hányadosait.

$$\mathbf{n_1} = (2; -3; 1) \qquad \mathbf{n_2} = (4; 1; -1)$$

$$\frac{2}{4} \neq \frac{-3}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

tehát a két normálvektor nem párhuzamos, így a síkok sem. A két síknak létezik metszésvonala.

1. megoldás: Egy egyenes egyenletrendszerének megadásához szükségünk van egy pontra és egy irányvektorra.

A két sík metszésvonalára olyan pontok illeszkednek, amelyek megoldásai a következő egyenletrendszernek.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -10 \\ 4x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Ez egy két egyenletből álló három ismeretlenes egyenletrendszer, aminek tudjuk, hogy létezik végtelen sok megoldása (a két sík metszi egymást). Ebből egyet megkapunk, ha az egyik ismeretlent szabadon választjuk.

Ha például $x = 0$, akkor az az egyenletrendszerünk:

$$\begin{aligned} -3y + z &= -10 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy $y = 5$ és $z = 5$.

Tehát a metszésvonal egy pontja: $A(0; 5; 5)$.

Kell még egy irányvektor!

Vegyük figyelembe, hogy a keresett f egyenes illeszkedik mindkét síkra, így merőleges lesz mindkét sík normálvektorára. Az $\mathbf{n_1}$ és $\mathbf{n_2}$ normálvektorok leolvashatóak, ekkor a mindkét vektorra merőleges vektor legyen éppen a két vektor vektoriális szorzata, azaz $\mathbf{v_f} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$.

$$\mathbf{n_1} = (2; -3; 1) \qquad \mathbf{n_2} = (4; 1; -1)$$

$$\mathbf{v_f} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

Tehát a két sík metszésvonalának egyenletrendszere:

$$f: \quad \frac{x}{2} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-5}{14}$$

2. megoldás: A feladat úgy is megoldható, ha a metszésvonalról nem egy, hanem két pontot olvasunk le, és ezen pontok segítségével megadhatunk egy irányvektort.

A metszésvonal : $A(0; 5; 5)$ pontját már ismerjük. Olvassunk le még egy pontot a metszésvonalról, azaz adjunk meg egy másik megoldását az egyenletrendszernek.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -10 \\ 4x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Adjunk az egyik koordinátának egy tetszőleges értéket. Legyen például $y = 2$. (Bármilyen valós számot behelyettesíthetünk, de arra ügyeljünk, hogy a számolás gyorsan elvégezhető legyen.)

Ekkor az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 2x - 6 + z &= -10 \\ 4x + 2 - z &= 0 \end{aligned}$$

Adjuk össze az egyenleteket:

$$6x = -6, \qquad \text{azaz} \quad x = -1$$

Ha $x = -1$ és $y = 2$, akkor $z = -2$.

Tehát egy másik pont a metszésvonalról: $B(-1; 2; -2)$.

Az $A(0; 5; 5)$ és $B(-1; 2; -2)$ pontokra illeszkedő egyenes egy irányvektora:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (-1; -3; -7)$$

Az f metszésvonal egyenletrendszere B pontra felírva:

$$f: \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{-7} \quad t \in \mathbf{R}$$

Megjegyzés: Úgy tűnik, hogy egy teljesen más egyenletet kaptunk. Pedig ez ugyanaz az egyenes, csak az egyenletrendszer alakja más. Hasonlítsuk össze az irányvektorokat.

$$(-1; -3; -7) \qquad \text{és} \qquad (2; 6; 14)$$

Mivel

$$-2(-1; -3; -7) = (2; 6; 14)$$

a két egyenes párhuzamos. Vizsgáljuk meg, hogy az előző megoldásnál kapott

$$f: \quad \frac{x}{2} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-5}{14}$$

egyenes átmegy- e a B ponton.

Helyettesítsük be az egyenletrendszerbe B pont koordinátáit.

$$\frac{-1}{2} = \frac{2-5}{6} = \frac{-2-5}{14} = \frac{1}{2}$$

Az egyenlőség teljesül, tehát valóban ugyanazon egyenes két különböző alakját sikerült felírni.

3.6. Vegyes összetett feladatok

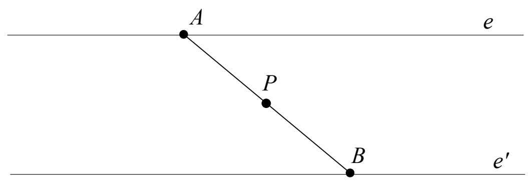
1. **Feladat:**

Tükrözzük az e egyenest a $P(1; 2; 3)$ pontra, ha

$$e: \quad x = 3 - t \quad y = -2 + t \quad z = -1 + 2t \quad t \in R.$$

Írjuk fel a tükörkép paraméteres alakját.

Megoldás: A tükörkép az e egyenessel párhuzamos egyenes. Ezért az e egyenes egy irányvektora egyben a tükörkép egy irányvektora is.



Olvassuk le az e egyenes egy irányvektorát:

$$\mathbf{v} = (-1; 1; 2)$$

Szükségünk van még a keresett egyenes egy pontjára. Vegyük észre, hogy az e egyenes egy tetszőleges A pontját a tükrözés egy olyan B pontba viszi át, amelyre az AB szakasz felezéspontja éppen a P pont.

Adjuk meg e egyenes egy pontját. Legyen $t = 0$, ekkor

$$A(3; -2; -1)$$

Mivel P felezéspont, a koordinátákra a következő egyenlöségeket írhatjuk fel:

$$\frac{a_1 + b_1}{2} = p_1 \quad \text{azaz} \quad \frac{3 + b_1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -1$$

$$\frac{a_2 + b_2}{2} = p_2 \quad \text{azaz} \quad \frac{-2 + b_2}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 6$$

$$\frac{a_3 + b_3}{2} = p_3 \quad \text{azaz} \quad \frac{-1 + b_3}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad b_3 = 7$$

A B pont koordinátákkal megadva:

$$B(-1; 6; 7)$$

A tükörkép paraméteres alakja:

$$e': \qquad x = -1 - t \quad y = 6 + t \quad z = 7 + 2t \quad t \in R$$

2. **Feladat:** Tükrözzük az S síkot az $P(2; 3; 4)$ pontra, ha

$$S: \quad 2x - 3y + 4z = 15.$$

Írjuk fel a tükörkép egyenletét.

Megoldás: A tükörkép ebben az esetben egy sík lesz, amely párhuzamos az eredeti síkkal. Ezért az S sík egy normálvektora a tükörkép egy normálvektora is.

Olvassuk le az S sík egy normálvektorát:

$$\mathbf{n} = (2; -3; 4)$$

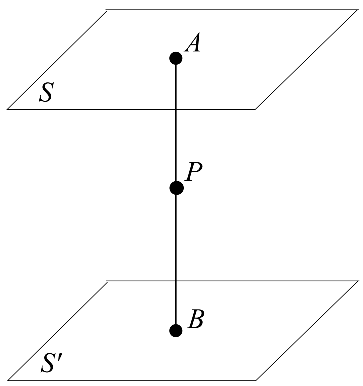
Szükségünk van a keresett S' sík egy pontjára. Használjuk fel, hogy az S sík egy tetszőleges A pontjának a tükörképe egy olyan B pont, amelyre AB szakasz felezéspontja éppen a P pont lesz.

Olvassunk le egy pontot az S síkról.

Két koordinátát szabadon választhatunk. Legyen $x = z = 0$. Behelyettesítve a sík egyenletébe: $y = -5$.

Az S sík egy tetszőleges pontja koordinátákkal megadva:

$$A(0; -5; 0)$$



A B pont koordinátáinak meghatározásához a következő egyenlöségeket írhatjuk fel:

$$\frac{a_1+b_1}{2}=p_1 \quad \text{azaz} \quad \frac{0+b_1}{2}=2 \quad \Rightarrow \quad b_1=4$$

$$\frac{a_2+b_2}{2}=p_2 \quad \text{azaz} \quad \frac{-5+b_2}{2}=3 \quad \Rightarrow \quad b_2=11$$

$$\frac{a_3+b_3}{2}=p_3 \quad \text{azaz} \quad \frac{0+b_3}{2}=4 \quad \Rightarrow \quad b_3=8$$

A B pont koordinátákkal megadva:

$$B(4;11;8)$$

A S tükörképének egyenlete:

$$S': \qquad 2(x-4)-3(y-11)+4(z-8)=0$$

Rendezve:

$$S': \qquad 2x-3y+4z=7$$

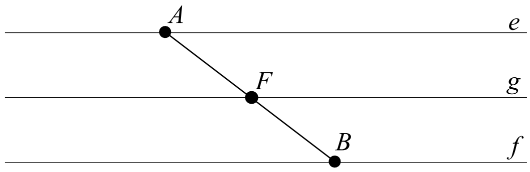
3. **Feladat:** Írjuk fel az e és f párhuzamos egyenesek síkjában levő,velük párhuzamos és tőlük egyenlő távolságra fekvő g egyenes egyenletrendszerét, ha

$$e: \quad x=2+t \quad y=3+2t \quad z=-2t \quad t\in\ R$$

$$f: \quad x=-l \quad y=5-2l \quad z=4+2l \quad l\in\ R$$

Megoldás: Készítsünk ábrát.

Nézzük meg, tényleg párhuzamosak az egyenesek?



A két egyenes egy-egy irányvektora:

$$\mathbf{v_e} = (1; 2; -2) \qquad \mathbf{v_f} = (-1; -2; 2)$$

Mivel $\mathbf{v_e} = -\mathbf{v_f}$, a két egyenes valóban párhuzamos.

Ha a keresett g egyenes párhuzamos e-vel és f- fel, akkor g irányvektora legyen

$$\mathbf{v_g} = \mathbf{v_e} = (1; 2; -2)$$

Meg kell adnunk g egyenes egy pontját. Ha veszünk az e és f egyenesekről egy-egy tetszőleges pontot, akkor az általuk meghatározott szakasz felezéspontja éppen a g egy pontja lesz.

Olvassunk le egy-egy pontot az egyenesekről. Legyen mindkét paraméter nullával egyenlő, azaz $t = l = 0$.

$$A(2; 3; 0) \qquad B(0; 5; 4),$$

ahol A az e egyenes, B pedig az f egyenes egy pontja. Az A és B pontok F felezéspontjának koordinátái:

$$F(1; 4; 2)$$

A keresett g egyenes egyenletrendszere:

$$g: \qquad x - 1 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg az e egyenesnek az S síkra eső merőleges vetületének egyenletrendszerét, ha

$$e: \quad x = 8 + 5t \quad y = 7 + 6t \quad z = -3 - 8t \quad t \in R$$

és

$$S: \quad 2x + 4y - z = 5.$$

Majd határozzuk meg az e egyenes és vetületének α hajlásszögét.

Megoldás: Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor az egyenes vetülete egy pont lesz. Minden más esetben egy egyenest kapunk. Nézzük meg, hogy merőleges-e az e egyenes az S síkra.

Olvassuk le egy irányvektort és egy normálvektort.

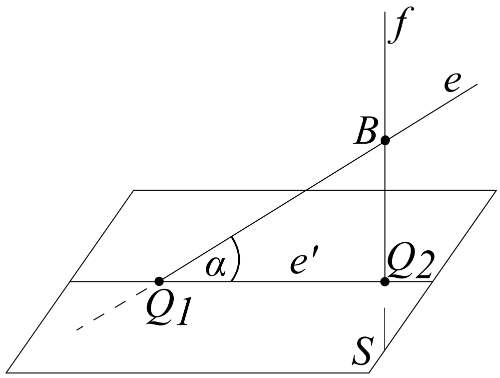
$$\mathbf{v_e} = (5; 6; -8) \qquad \mathbf{n} = (2; 4; -1)$$

Ha a két vektor párhuzamos, azaz egyik a másik számszorosa, akkor e és S merőlegesek egymásra.

Mivel az azonos indexű koordináták hányadosai nem egyenlőek, e és S nem merőlegesek.

$$\frac{5}{2} \neq \frac{6}{4} \neq \frac{-8}{-1}$$

Tehát a vetület képe egy egyenes lesz. Ennek az egyenesnek a meghatározásához kell két pont az egyenesről. Az egyik pont legyen a Q_1 metszéspont, ha létezik.



Ha az S síknak és az e egyenesnek létezik közös pontja,akkor kell hogy legyen egy olyan t paraméterérték, amellyel x, y, z-t meghatározva az egyenesen, a kapott pont illeszkedik az S síkra is. Így először határozzuk meg t paraméter értékét.

Az e egyenes egyenletében szereplő x, y, z paraméteres alakját helyettesítsük be a sík egyenletébe.

$$2(8 + 5t) + 4(7 + 6t) - (-3 - 8t) = 5$$

Rendezve

$$42t + 47 = 5 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

A Q_1 metszéspont koordinátái:

$$Q_1(3; 1; 5)$$

Kell egy másik pont is a keresett egyenesről. Olvassuk le e egyenes egy pontját, például a $B(8; 7; -3)$ pontot, ha $t = 0$.

Határozzuk meg a B pont merőleges vetületét! Írjuk fel annak az f vetítőegyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges az S síkra és átmegy B ponton. Az S sík és az f vetítőegyenes metszéspontja éppen a vetületpontot adja, amit jelöljünk Q_2-vel. Mivel f merőleges az S síkra, így f vetítőegyenes egy irányvektora megegyezik az S sík egy normáklvektorával.

$$\mathbf{v_f} = \mathbf{n} = (2; 4; -1)$$

$$f: \quad x = 8 + 2t \quad y = 7 + 4t \quad z = -3 - t \quad t \in \mathbf{R}$$

Határozzuk meg f egyenes és S sík metszéspontját!

$$2(8 + 2t) + 4(7 + 4t) - (-3 - t) = 5$$

Az egyenletet megoldva:

$$t = -2 \quad \Rightarrow \quad Q_2(4; -1; -1)$$

Most már ismerjuk az e' vetületegyenes két pontját, Q_1-t és Q_2-t. Ekkor

$$Q_1(3; 1; 5) \quad Q_2(4; -1, -1)$$

$$\mathbf{v_{e'}} = \overrightarrow{Q_1Q_2} = (1; -2; -6)$$

A vetület e' egyenletrendszere Q_1 pontra felírva:

$$e': \quad x = 3 + t \quad y = 1 - 2t \quad z = 5 - 6t \quad t \in \mathbf{R}$$

A szög meghatározásához szükségünk van a két egyenes irányvektorára.

$$\mathbf{v_e} = (5; 6; -8) \qquad \mathbf{v_{e'}} = (1; -2 - 6)$$

Határozzuk meg a két irányvektor által bezárt α hegyesszögét:

$$\cos\alpha = \frac{|\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_{e'}} \rangle|}{||\mathbf{v_e}|| \cdot ||\mathbf{v_{e'}}||} = \frac{41}{\sqrt{125}\sqrt{41}} \approx 0.5727$$

$$\alpha = 55.06^\circ$$

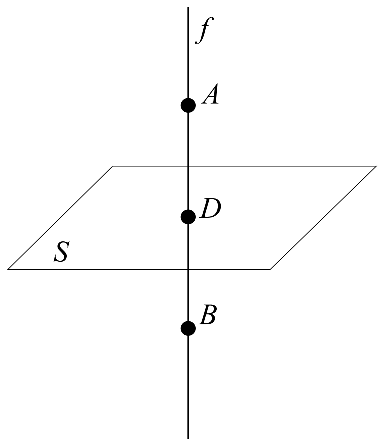
Tehát az e egyenes és e' merőleges vetületének hajlásszöge

$$\alpha = 55.06^\circ$$

5. **Feladat:** Határozzuk meg annak a B pontnak a koordinátáit, amelyet az A pontnak az S síkra való tükrözésével kapunk, ha

$$A(4; -3; 7) \qquad S: \quad 3x + 5y - 2z = 59.$$

Megoldás: Adjuk meg az A pontnak a síkra eső merőleges vetületét, a D pontot, majd erre a pontra tükrözzük az A pontot.



Írjuk fel először az A ponton átmenő és S síkra merőleges f vetítőegyenes paraméteres egyenletrendszerét. Ennek irányvektora ugyanaz, mint az S sík normálvektora.

$$\mathbf{v_f} = \mathbf{n} = (3; 5; -2)$$

$$f: \quad x = 4 + 3t \quad y = -3 + 5t \quad z = 7 - 2t \quad t \in \mathbf{R}$$

Határozzuk meg az f egyenes és S sík D metszéspontjának koordinátáit.

$$3(4 + 3t) + 5(-3 + 5t) - 2(7 - 2t) = 59$$

Az egyenletet megoldva:

$$t = 2 \qquad \Rightarrow \qquad D(10; 7; 3)$$

Mivel D pont felezi az AB szakaszt, a keresett koordinátákra a következő egyenlőségeket írhatjuk fel:

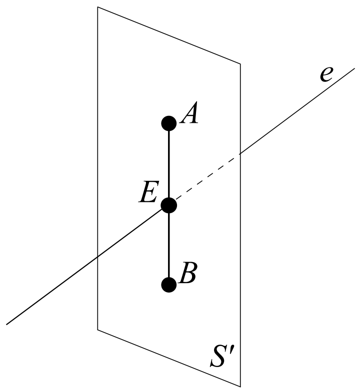
$$\frac{a_1 + b_1}{2} = d_1 \quad \text{azaz} \quad \frac{4 + b_1}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 16$$

$$\frac{a_2 + b_2}{2} = p_2 \quad \text{azaz} \quad \frac{-3 + b_2}{2} = 7 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 17$$

$$\frac{a_3 + b_3}{2} = p_3 \quad \text{azaz} \quad \frac{7 + b_3}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad b_3 = -1$$

Tehát a tükörkép koordinátákkal megadva:

$$B(16; 17; -1)$$



6. **Feladat:** Határozzuk meg annak a B pontnak a koordinátáit, amelyet az A pontnak az e egyenesre való tükrözésével kapunk, ha

$$A(\ 4 \quad -3 \quad 7\ ) \qquad e: \quad x = 7 + 3t \quad y = 4 + t \quad z = 1 - 2t \quad t \in \mathbf{R}$$

Megoldás:

Az előző feladathoz hasonlóan határozzuk meg az A pont E merőleges vetületét az e egyenesen, majd tükrözzünk erre a pontra. Most adjuk meg annak az S' síknak az egyenletét, amely átmegy A ponton és merőleges e egyenesre. Vegyük észre, hogy S' sík egy normálvektora egyben az e egyenes egy irányvektora is.

Ezért olvassuk le egy irányvektorát!

$$\mathbf{v_e} = (3; 1; -2)$$

Az S' sík egy normálvektora:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v_e} = (3; 1; -2)$$

Az S' sík egyenlete A pontra felírva:

$$3(x - 4) + (y + 3) - 2(z - 7) = 0$$

Rendezve.

$$S': \quad 3x + y - 2z = -5$$

Az E merőleges vetületpont éppen S' és e metszéspontja lesz.

$$3(7 + 3t) + (4 + t) - 2(1 - 2t) = -5$$

Az egyenletet megoldva:

$$t = -2 \quad \Rightarrow \quad E(1; 2; 5)$$

Mivel E éppen az AB szakasz felezéspontja, ezért a koordinátákra a következő egyenlőségek igazak:

$$\frac{4+b_1}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad b_1=-2$$

$$\frac{-3+b_2}{2}=2 \quad \Rightarrow \quad b_2=7$$

$$\frac{7+b_3}{2}=5 \quad \Rightarrow \quad b_3=3$$

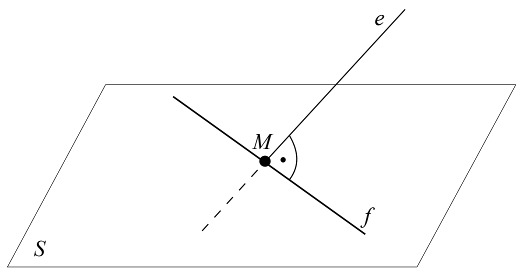
Tehát a tükörkép koordinátái:

$$B(-2;7;3)$$

7. **Feladat:** Írjuk fel annak az f egyenesnek az egyenletrendszerét, amely illeszkedik S síkra és merőlegesen metszi e egyenest, ha

$$S: \quad 4x+5y+z=7$$

$$e: \quad x=5+2t \quad y=4+6t \quad z=4-t \quad t\in\mathbf{R}.$$



Megoldás: Ha f illeszkedik a síkra és metszi e egyenest, akkor f rajta van az S síkon és átmegy az S sík és az e egyenes M metszéspontján.

Kezdjük a metszéspont meghatározásával.

Ha

$$S: \quad 4x+5y+z=7$$

$$e: \quad x=5+2t \quad y=4+6t \quad z=4-t \quad t\in\mathbf{R}$$

akkor helyettesítsük be x, y, z paraméteres alakját a sík egyenletébe.

$$4(5+2t)+5(4+6t)+(4-t)=7$$

Az egyenletet megoldva, majd t kapott értékét behelyettesítve e egyenletrendszerébe:

$$t=-1 \qquad \Rightarrow \qquad M(3;-2;5)$$

Nézzük meg mit tudunk f irányvektoráról.

Mivel f illeszkedik S síkra, igy f egy irányvektora merőleges az S sík egy normálvektora. Másrészt e és f merőlegesek egymásra, akkor irányvektoraik is merőlegesek.

A feltételeket figyelembe véve, legyen $\mathbf{v_f} = \mathbf{n} \times \mathbf{v_e}$.

$$\mathbf{n} = (4; 5; 1) \qquad \mathbf{v_e} = (2; 6; -1)$$

$$\mathbf{v_f} = \mathbf{n} \times \mathbf{v_e} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

Tehát f egyenes egyenletrendszere az M metszéspontra felírva:

$$f: \quad \frac{x-3}{-11} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{14}$$

8. **Feladat:** Létezik-e olyan $\mathbf{v}$ vektor ($\mathbf{v} \neq 0$), amely az x, y, z tengelyek pozitív irányával rendre $\alpha = 45°$,$\beta = 60°$ és $\gamma = 120°$ szöget zár be? Ha létezik, adjunk meg egy vele azonos irányú egységvektor koordinátáit! Milyen feltételnek kell teljesülnie az α, β, γ szögekre, hogy létezzen ilyen vektor?

   Megoldás: Először nézzük meg milyen α, β, γ szögek esetén létezik ilyen vektor. A vektort keressük $\mathbf{v} = (\ v_1 \quad v_2 \quad v_3\ )$ alakban. Képezzük $\mathbf{v}$ vektornak $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ egységvektorokkal alkotott skaláris szorzatát koordinátákkal megadva, majd a definíció alapján.

   $$\langle \mathbf{v}, \mathbf{i} \rangle = v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0 = v_1 \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{i} \rangle = ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{i}|| \cos\alpha = ||\mathbf{v}|| \cos\alpha$$

   Azaz:
   $$v_1 = ||\mathbf{v}|| \cos\alpha$$

   $$\langle \mathbf{v}, \mathbf{j} \rangle = v_1 \cdot 0 + v_2 \cdot 1 + v_3 \cdot 0 = v_2 \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{i} \rangle = ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{j}|| \cos\alpha = ||\mathbf{v}|| \cos\beta$$

   Azaz:
   $$v_2 = ||\mathbf{v}|| \cos\beta$$

   Hasonlóan

   $$\langle \mathbf{v}, \mathbf{k} \rangle = v_1 \cdot 0 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 1 = v_3 \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{i} \rangle = ||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{k}|| \cos\alpha = ||\mathbf{v}|| \cos\beta$$

   $$v_3 = ||\mathbf{v}|| \cos\gamma$$

   A kapott egyenleteket emeljük négyzetre:

   $$v_1^2 = ||\mathbf{v}||^2 \cos^2\alpha$$

$$v_2^2 = ||\mathbf{v}||^2 \cos^2 \beta$$
$$v_3^2 = ||\mathbf{v}||^2 \cos^2 \gamma$$

A három egyenletet összeadva:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = ||\mathbf{v}||^2 \cos^2 \alpha + ||\mathbf{v}||^2 \cos^2 \beta + ||\mathbf{v}||^2 \cos^2 \gamma$$

Kiemelve $||\mathbf{v}||^2$-et:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = ||\mathbf{v}||^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Mivel $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = ||\mathbf{v}||^2$ és $||\mathbf{v}|| \neq 0$, az egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

feltétel teljesülése esetén létezik olyan $\mathbf{v}$ vektor, amely az x, y, z tengelyek pozitív irányával rendre α ,β és γ szöget zár be.

Nézzük meg, hogy a feladatban szereplő szögek teljesítik-e a feltételt!

Mivel

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 120^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

A feltétel teljesül, létezik olyan vektor, amely az x, y, z tengelyek pozitív irányával rendre $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ és $\gamma = 120^\circ$ szöget zár be.

A vektor koordinátáinak megadásához vegyük figyelembe, hogy egy egységvektort keresünk, azaz $||\mathbf{v}|| = 1$.

Így

$$v_1 = ||\mathbf{v}|| \cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_2 = ||\mathbf{v}|| \cos \beta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$v_3 = ||\mathbf{v}|| \cos \gamma = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

Tehát a keresett egységvektor koordinátáival megadva:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

9. **Feladat:** Hogyan kell A és B paraméterek értékét megválasztanunk az S_1 és S_2 síkok egyenletében, hogy a S_1, S_2 és S_3 síkoknak
   - egy közös pontja legyen,
   - egy egyenesre illeszkedjenek,

- ne legyen közös pontja a három síknak, ha

$$\begin{aligned} S_1: \quad & 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ S_2: \quad & x + 2y - z + B = 0 \\ S_3: \quad & x + Ay - 6z + 10 = 0. \end{aligned}$$

Megoldás: A három síknak akkor van egyetlen egy közös pontja, ha egyetlen egy $(\; x_0 \quad y_0 \quad z_0 \;)$ rendezett számhármas létezik, amely mindhárom sík egyenletét teljesíti. Azaz a három sík egyenletéből alkotott egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

A síkok egy egyenesre illeszkednek, ha végtelen sok olyan pontot, rendezett számhármast találunk, amelyek a síkok egyenleteit kielégítik. Tehát egyenletrendszernek végtelen sok megoldás.

Ha nincs közös pontja a három síknak, akkor nincs olyan rendezett számhármas, amely mindhárom sík egyenletét kielégítené, azaz az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Tehát a feladatot átfogalmazhatjuk úgy, hogy hogyan kell A és B paraméterek értékét választanunk, hogy az

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & - & 1 & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & B & = & 0 \\ x & + & Ay & - & 6z & + & 10 & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszernek

- egy megoldása legyen,
- végtelen sok megoldása,
- ne legyen megoldása.

Próbáljuk csökkenteni az ismeretleneket. Például a második egyenletet vonjuk ki a harmadik egyenletből. Az új egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & - & 1 & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & B & = & 0 \\ & & (A-2)y & - & 5z & + & 10-B & = & 0 \end{array}$$

Majd a második egyenlet kétszeresét vonjuk ki az első egyenletből.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & - & 5y & + & 5z & - & 1-2B & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & B & = & 0 \\ & & (A-2)y & - & 5z & + & 10-B & = & 0 \end{array}$$

Ha az első egyenletet hozzáadjuk a harmadikhoz , akkor lesz egy olyan egyenletünk, amiben már csak egy ismeretlen lesz.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & - & 5y & + & 5z & - & 1-2B & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & B & = & 0 \\ & & (A-7)y & & & + & 9-3B & = & 0 \end{array}$$

A harmadik egyenlet alapján $y = \dfrac{9-3B}{A-7}$. Tehát egy megoldás akkor létezik, ha az osztást el tudjuk végezni, azaz $A \neq 7$. Ekkor B értéke tetszőleges valós szám lehet.

Ha $A = 7$ és $B = 3$, akkor csak két egyenletünk maradt és három ismeretlen.

$$\begin{array}{ccccccccc} & - & 5y & + & 5z & - & 5 & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & 3 & = & 0 \end{array}$$

Az első egyenletből fejezzük ki z-t.

$$z = 1 + y$$

Helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$x + 2y - (1+y) + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y - 2$$

Tehát az egyenletrendszer végtelen sok megoldása van és

$$x = -y - 2 \qquad z = 1 + y \quad \text{és} \quad y \in \mathbf{R}$$

A kapott egyenleteket átalakítva egy egyenes egyenletrendszerét kapjuk:

$$y = z - 1 \qquad y = -x - 2 \qquad \Rightarrow \quad -x - 2 = y = z - 1$$

Ha $A = 7$ és $B \neq 3$, akkor az utolsó egyenlet :

$$9 - 3B = 0$$

De ez egy ellentmondás, mivel tudjuk, hogy $B \neq 3$. Ez pedig azt jelenti, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Foglaljuk össze a kapott eredményeket.

Ha $A \neq 7$ és $B \in \mathbf{R}$, akkor egy közös pontja van a három síknak.

Ha $A = 7$ és $B = 3$, akkor egy egyenesre illeszkednek.

Ha $A = 7$ és $B \neq 3$, akkor nincs közös pontja a három síknak.

10. **Feladat:** Az e egyenes mely C pontja van egyenlő távolságra az A és B pontoktól, ha

$$A(2;-4;7) \qquad B(0;-6;5)$$

$$e : x = -5 + 3t \quad y = 2t \quad z = 1 - 2t \quad t \in \mathbf{R}$$

Megoldás:

1. megoldás: Mivel két ponttól egyenlő távolságra levő pontok a térben illeszkednek a két sík szakaszfelező merőleges síkjára, a keresett pontot

ezen a síkon kell keresnünk. Másrészt a pont rajta van az e egyenesen is. Tehát keressük meg azt a $(x_0; y_0; z_0)$ pontot, rendezett számhármast, amely kielégíti a a felezőmerőleges sík egyenletét és az egyenes egyenletrendszerét is.

Írjuk fel a szakasz felezőmerőleges síkját!

Kell egy vektor, ami merőleges a keresett síkra.

$\overrightarrow{AB} = (-2; -2; -2)$ éppen megfelel a feltételnek.

Ekkor legyen a sík normálvektora:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, 1; 1)$$

Az AB szakasz F felezéspontja:

$$F(1; -5; 6)$$

A szakasz felezőmerőleges síkjának egyenlete F pontra felírva:

$$x + y + z = 2$$

Az e egyenes egyenletrendszerében szereplő x, y, z paraméteres alakját helyettesítsük be a sík egyenletébe.

$$(-5 + 3t) + (2t) + (1 - 2t) = 2 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

Tehát az egyenes $t = 2$ paraméterértékhez tartozó C pontja van az A és B pontoktól egyenlő távolságra:

$$C(1; 4; -3)$$

2. megoldás: A feladat úgy is megoldható, ha keressük azt a $C(x; y; z)$ pontot, amelyre $||\overrightarrow{CA}|| = ||\overrightarrow{CB}||$.

Írjuk fel a távolságok négyzetét:

$$||\overrightarrow{CA}||^2 = (2-x)^2+(-4-y)^2+(7-z)^2 = (2+5-3t)^2+(-4-2t)^2+(7-1+2t)^2$$

$$||\overrightarrow{CA}||^2 = (7 - 3t)^2 + (-4 - 2t)^2 + (6 + 2t)^2$$

$$||\overrightarrow{CB}||^2 = (0-x)^2+(-6-y)^2+(5-z)^2 = (0+5-3t)^2+(-6-2t)^2+(5-1+2t)^2$$

$$||\overrightarrow{CB}||^2 = (5 - 3t)^2 + (-6 - 2t)^2 + (4 + 2t)^2$$

$$(7 - 3t)^2 + (-4 - 2t)^2 + (6 + 2t)^2 = (5 - 3t)^2 + (-6 - 2t)^2 + (4 + 2t)^2$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $t = 2$ és a keresett pont

$$C(1; 4; -3)$$

11. **Feladat:** Legyen

$$e_1 \quad x = -2 + 4t \quad y = 2t \quad z = -2 + t \quad t \in \mathbf{R}$$

$$e_2 \quad x = 2 - l \quad y = 1 + l \quad z = -1 + 2l \quad l \in \mathbf{R}$$

Írjuk fel annak az S síknak az egyenletét, amely tartalmazza az e_1 egyenest és párhuzamos az e_2 egyenessel. Határozzuk meg az origó távolságát a kapott síktól.

Megoldás: A sík egyenletének megadásához kell egy pont a síkról és egy normálvektor.

Mivel az e_1 egyenes illeszkedik a S síkra, így az egyenes egy tetszőleges A pontja megfelel a sík felírására.

Legyen például $t = 0$, ekkor

$$A(-2; 0; -2)$$

.

Szükségünk van a sík egy $\mathbf{n}$ normálvektorára.

Mivel e_1 illeszkedik S síkra, így $\mathbf{v_{e_1}} \perp \mathbf{n}$ és mivel e_2 párhuzamos S síkkal, akkor $\mathbf{v_{e_2}} \perp \mathbf{n}$. Tehát két ismert vektorra merőleges vektort keresünk.

Legyen

$$\mathbf{n} = \mathbf{v_{e_1}} \times \mathbf{v_{e_2}}$$

Végezzük el a számolást!

$$\mathbf{v_{e_1}} = (4; 2; 1) \qquad \mathbf{v_{e_2}} = (-1, 1; 2)$$

$$\mathbf{v_{e_1}} \times \mathbf{v_{e_2}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3; -9; 6)$$

Az egyszerűbb számolás miatt legyen :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{3}(\mathbf{v_{e_1}} \times \mathbf{v_{e_2}}) = (1; -3; 2)$$

Az S sík egyenlete $A(-2; 0; -2)$ pontra felírva:

$$S: \quad x - 3y + 2z = -6$$

Határozzuk meg S távolságát az origótól!

Tudjuk, hogy egy P pont távolsága egy Q pontra illeszkeő, $\mathbf{n}$ normálvektorú síktól :

$$d_{PS} = \frac{|\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle|}{||\mathbf{n}||} = \frac{|\langle \overrightarrow{QP}, \mathbf{n} \rangle|}{||\mathbf{n}||}$$

Most a P pontnak az origó, a síkra illeszkedő Q pontnak pedig A felel meg.

$$d_{PS} = \frac{|\langle -\mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle|}{||\mathbf{n}||} = \frac{|\langle \overrightarrow{AO}, \mathbf{n}\rangle|}{||\mathbf{n}||}$$

Végezzük el a számolást!

$$\mathbf{n} = (1; -3; 2) \qquad ||\mathbf{n}|| = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AO} = -\mathbf{a} = (2; 0; 2)$$

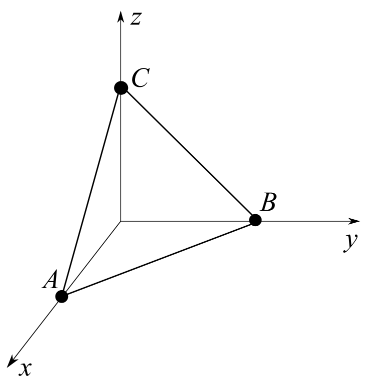
$$\langle -\mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle = \langle \overrightarrow{AO}, \mathbf{n}\rangle = 6$$

$$|\langle -\mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle| = |\langle \overrightarrow{AO}, \mathbf{n}\rangle| = 6$$

$$d_{PS} = \frac{|\langle -\mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle|}{||\mathbf{n}||} = \frac{|\langle \overrightarrow{AO}, \mathbf{n}\rangle|}{||\mathbf{n}||} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

12. **Feladat:** Mekkora területű háromszöget metszenek ki a koordinátasíkok a $2x - y + 3z = 6$ egyenletű síkból?

Megoldás: Határozzuk meg először a kimetszett háromszög csúcspontjainak koordinátáit!



Az x tengelyre eső A csúcspontról tudjuk, hogy a második és harmadik koordinátája 0, azaz $y = z = 0$. A sík egyenlete alapján, akkor $x = 3$.

Az y tengelyen lévő B csúcspontnál $x = z = 0$, behelyettesítve a sík egyenletébe: $y = -6$.

A z tengelyen lévő C csúcspont koordinátái, ha $x = y = 0$ akkor $z = 2$. Tehát a csúcspontok koordinátákkal megadva:

$$A(3, 0; 0) \quad B(0; -6; 0) \quad C(0; 0; 2)$$

Válasszuk ki az egyik pontot, például A-t. Indítsunk vektorokat a másik kettőbe. A megadott két vektor kifeszíti a háromszöget és területe pedig

$$t = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||$$

Végezzük el a számolást!

$$\overrightarrow{AB} = (-3; -6; 0) \quad \overrightarrow{AC} = (-3; 0; 2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-12; 6; -18)$$

$$t = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = \frac{\sqrt{144 + 36 + 324}}{2} = \sqrt{\frac{504}{4}} = \sqrt{126}$$

4. Többváltozós függvények

4.1. Helyettesítési érték számolása

4.1.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Tekintsük a következő $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, kétváltozós függvényt:

$$f(x, y) = x^2 y - x + 2y\,.$$

Számoljuk ki az $f(1, 2)$, $f(2, 1)$ és $f(3, 3)$ helyettesítési értékeket.

Megoldás: Kezdjük $f(1, 2)$ kiszámolásával. Ez a jelölés azt jelenti röviden, hogy $f(x = 1, y = 2)$, vagyis $x = 1$ és $y = 2$ értékeket kell behelyettesíteni a megfelelő változók helyére:

$$f(1, 2) = 1^2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 = 2 - 1 + 4 = 5\,.$$

$f(2, 1)$ esetén nagyon hasonló a helyzet, de a fordított sorrend miatt ez most azt jelenti, hogy az $x = 2$ és $y = 1$ behelyettesítéseket kell elvégezni:

$$f(2, 1) = 2^2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 = 4 - 2 + 2 = 4\,.$$

$f(3, 3)$ esetén pedig mindkét változó helyére 3-at kell írni:

$$f(3, 3) = 3^2 \cdot 3 - 3 + 2 \cdot 3 = 27 - 3 + 6 = 30\,.$$

2. **Feladat:** Legyen $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, a következő formulával értelmezett kétváltozós függvény:

$$f(x, y) = x \cdot \ln y\,.$$

Számoljuk ki az $f(-1, 1)$ és $f(1, -1)$ helyettesítési értékeket.

Megoldás: Az első esetben:

$$f(-1, 1) = -1 \cdot \ln 1 = -1 \cdot 0 = 0\,.$$

Míg fordított sorrendnél:

$$f(1, -1) = 1 \cdot \ln(-1) \text{ nem létezik,}$$

hiszen az ln függvény értelmezési tartománya a $]0, +\infty[$ intervallum . Tehát általános esetben a helyettesítési értékek felcserélése nem hogy nem ad azonos eredményt, hanem elképzelhető, hogy a behelyettesítés csak egyféleképpen végezhető el.

4.1.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Tekintsük a következő $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ *n-változós* függvényt:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \,.$$

Számoljuk ki ennek a függvénynek a helyettesítési értékét a $x_i = i$ helyen, vagyis az $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n = n$ behelyettesítéssel.

Megoldás: Ebben a feladatban a változók száma nem fix, mint az előző példában, ahol csak 2 darab változóval dolgoztunk. Adva van azonban egy behelyettesítési szabály tetszőleges számú változóra. Vagyis adott számú változóra egyértelműen el tudjuk végezni a függvényérték számolást. Például:

- n = 1
  $f(x_1 = 1) = 1$
- n = 2
  $f(x_1 = 1, x_2 = 2) = 1 \cdot 2$
- Így általános n-re
  $f(x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n = n) = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = n!$

Tehát meghatároztuk a változószám függvényében a helyettesítési értéket.

4.2. Értelmezési tartomány vizsgálata

4.2.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sqrt{2x - y + 1}$ formulával értelmezett kétváltozós függvény értelmezési tartományát.

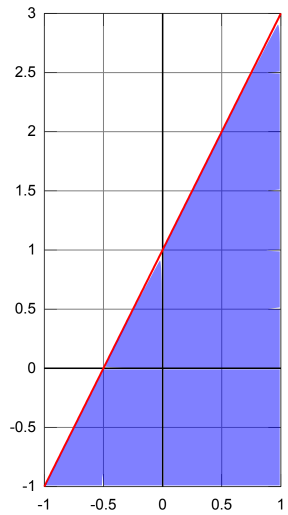
Megoldás: Egy kétváltozós függvény értelmezési tartománya a teljes XY sík vagy annak valamely részhalmaza lehet. Tehát azt kell vizsgálnunk, hogy milyen (x, y) pontok esetén van értelmezve $f(x, y)$ függvény. Mivel négyzetgyököt csak nemnegatív számból vonhatunk, így az értelmezési tartomány minden pontjára teljesülnie kell, hogy:

$$2x - y + 1 \geq 0 \,.$$

Ezt az egyenlőtlenséget rendezzük y-ra:

$$y \leq 2x + 1 \,.$$

Az $y = 2x + 1$ egy olyan egyenes egyenletét jelenti, ami az y-tengelyt az 1 pontban metszi, és a meredeksége 2. Az egyenes a teljes XY síkot két félsíkra osztja. Az egyik félsíkban olyan pontok találhatóak, amelyekre $y > 2x + 1$, míg a másikban $y < 2x + 1$. Egy tetszőleges érték behelyettesítésével kiválaszthatjuk a megfelelő félsíkot. Az értelmezési tartomány pontjait az alábbi ábra szemlélteti.



2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \ln(xy + x)$ formulával értelmezett kétváltozós függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Az ln függvény csak pozitív számokra értelmezett, tehát az értelmezési tartomány minden (x, y) pontjára

$$xy + x > 0$$

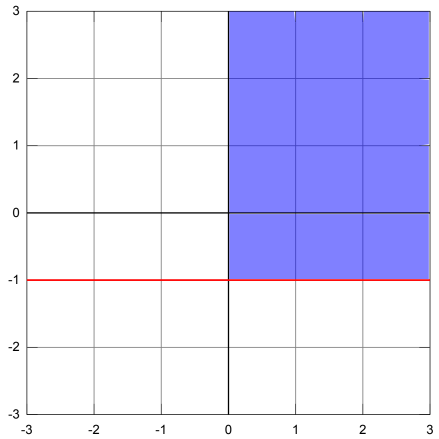
egyenlőtlenség kell, hogy teljesüljön. Alakítsuk szorzattá a baloldali kifejezést.

$$xy + x = x(y + 1) > 0\,.$$

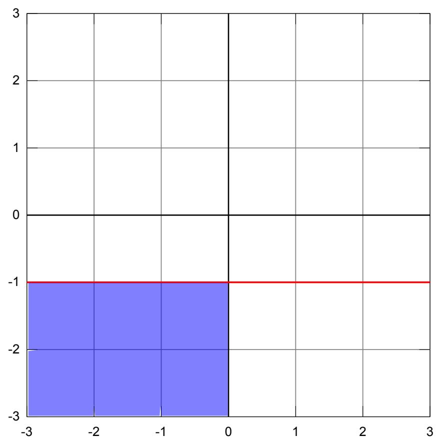
Egy két tényezős szorzat akkor pozitív, ha mindkét szorzótényező pozitív, vagy mindkettő negatív. Tehát két lehetséges eset van:

- Ha $x > 0$ és $y + 1 > 0$

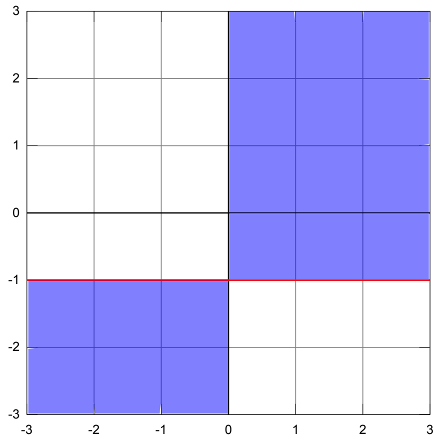
  Ekkor tehát annak kell teljesülnie, hogy x > 0, és y > -1. Ezt a tartományt szemlélteti az alábbi ábra.



- Ha $x < 0$ és $y + 1 < 0$
  Ekkor pedig az x $<$ 0, y $<$ -1 feltételeknek eleget tevő pontokra van értelmezve a függvény. Ezt a tartomány az alábbi ábra szemlélteti.



Az $f(x, y)$ függvény teljes értelmezési tartományát pedig a két tartomány uniója adja, azaz :



3. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \ln(1 - xy)$ formulával értelmezett kétváltozós függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Mivel a logaritmus függvény a pozitív számok halmazán van értelmezve, így f függvény csak olyan (x, y) pontokban lehet értelmezve, amelyekre a

$$1 - xy > 0\,.$$

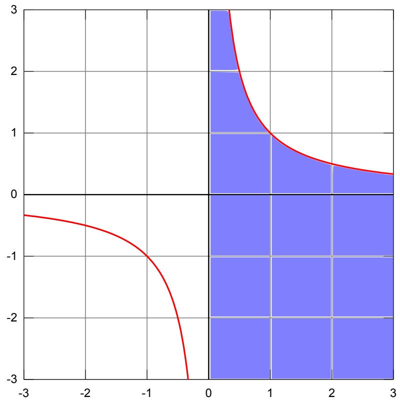
egyenlőtlenség teljesül. Rendezzük az egyenlőtlenséget y-ra. Először vigyük át xy-t a jobboldalra:

$$1 > xy\,.$$

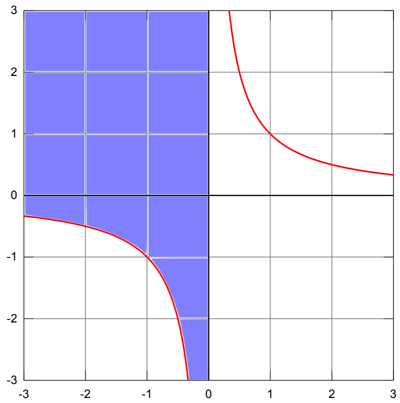
Az utolsó lépésként osszunk le x-el, itt azonban figyelni kell. Ha x < 0, akkor a relációjel megfordul. Így két esetet különböztetünk meg:

- Ha $x > 0$

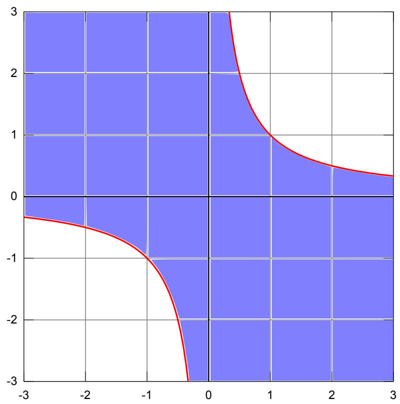
  Ekkor keressük azon rendezett számpárok halmazát, amelyre teljesül, hogy $\frac{1}{x} > y$ és $x > 0$. Ezen pontok határoló görbéi az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbola és az y tengely.



- Ha $x < 0$
  Ekkor keressük azon pontok halmazát, amelyre $\frac{1}{x} < y$ és $x < 0$. A feltételeknek eleget tevő pontok az y tengelytől balra, az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbola felett helyezkednek el:



Mivel az f függvény értelmezési tartományába azok a pontok tartoznak, amelyek legalább az egyik halmazba esnek, így a két halmaz unióját kell venni. A teljes értelmezési tartomány az alábbi ábrán látható.



4.2.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sqrt{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}$ formulával értelmezett kétváltozós függvény értelmezési tartományát.

   Megoldás: Ebben a feladatban egy többszörösen összetettebb függvényt kell megvizsgálnunk. Haladjuk kívülről befelé, vagyis kezdjük a gyökfüggvény vizsgálatával. Négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám állhat, így keressük azon (x, y) pontok halmazát, amelyekre teljesül, hogy

   $$\ln\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0 \,.$$

   Mivel a logaritmus függvény szigorúan monoton nő, és a 0 függvényértéket az 1 pontban veszi fel, így teljesülni kell, hogy:

   $$\frac{x}{y} \geq 1 \,.$$

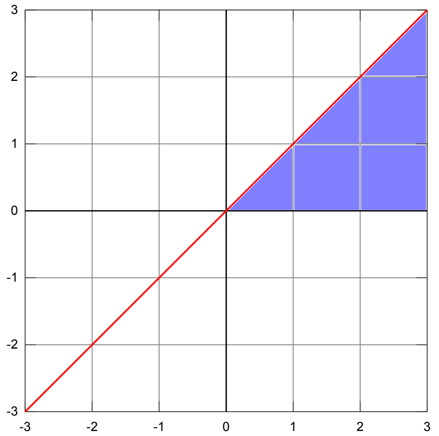
   Mivel 0-val nem lehet osztani, így az értelmezési tartományban nem esnek bele azok az (x, y) pontok, amelyekre $y = 0$, vagyis az x tengely nem része az értelmezési tartománynak. Ezután ismét próbáljuk meg y-re rendezni az egyenlőtlenséget. Vegyük először minkét oldal reciprokát. Ne felejtsük el, hogy ekkor a relációjel megfordul.

   $$\frac{y}{x} \leq 1$$

   Innentől a feladat két esetre válik szét:

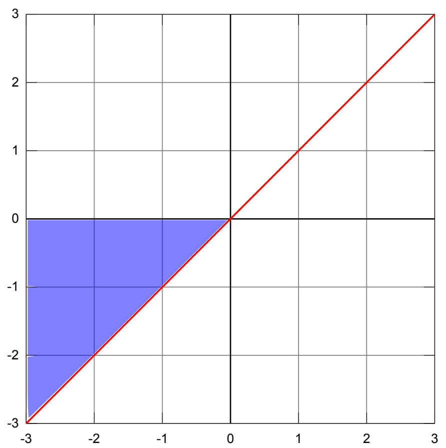
   - $x > 0$

Ekkor a beszorzás után azt a feltételt kapjuk, hogy $y \leq x$, vagyis az $y = x$ egyenes és az x tengely pozitív része közötti tartomány felel meg a kritériumoknak. Ebbe beletartozik az $y = x$ egyenes, de az x tengely pozitív része már nem!

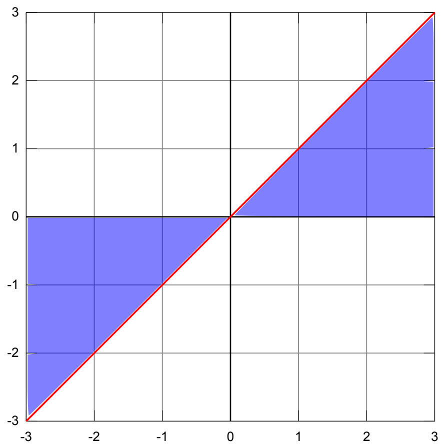


- x < 0

  Ekkor a feltétel $y \geq x$ lesz, vagyis az $y = x$ egyenes és az x tengely negatív része közötti tartomány lesz az értelmezési tartomány része. Ebben az esetben is igaz, hogy az $y = x$ egyenes pontja részei az értelmezési tartománynak, azonban az x tengely pontjai nem.

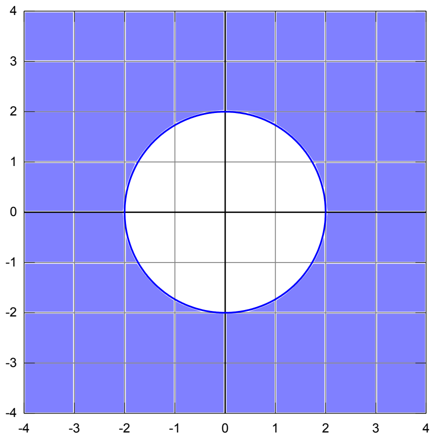


A végső értelmezési tartomány ismét a két halmaz uniója:



2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \ln(y - x^2 + 1)$ formulával értelmezett kétváltozós függvény értelmezési tartományát.

   Megoldás: Vizsgáljuk meg először a gyökös kifejezést. Mivel négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám szerepelhet, így a keresett (x, y) pontokra
   $$x^2 + y^2 - 4 > 0$$
   kell, hogy teljesüljön. Vegyük észre, hogy az
   $$x^2 + y^2 = 2^2$$
   egyenlőség egy origó középpontú, 2 sugarú körvonal pontjaira teljesül. Az
   $$x^2 + y^2 > 2^2,$$
   egyenlőtlenséget pedig azon pontok teljesítik az xy síkban, amelyek 2-nél nagyobb távolságra vannak az origótól, azaz az origó középpontú, 2 sugarú körön kívül helyezkednek el.



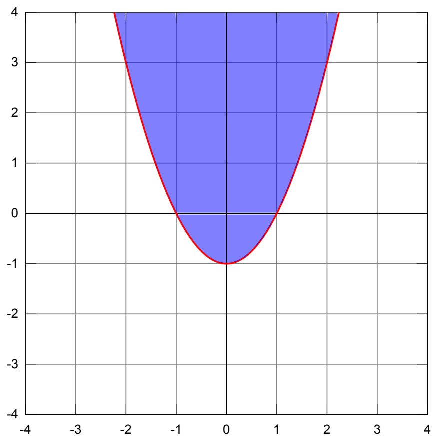
Mivel ln argumentumában csak pozitív szám állhat, így a második kifejezés olyan (x, y) pontokban van értelmezve, amelyekre

$$y - x^2 + 1 > 0\,,$$

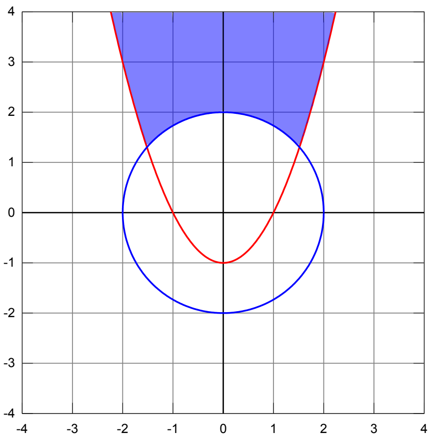
y-ra rendezve:

$$y > x^2 - 1\,.$$

Először ábrázoljuk az $y = x^2 - 1$ egyenletű parabolát. Ekkor a parabola két félsíkra osztja az XY síkot. Az egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza az alábbi ábrán látható.



Ahhoz, hogy $f(x, y)$ értelmezve legyen, az előbbi 2 feltételnek egyszerre kell teljesülnie, tehát csak azok a pontok tartoznak bele $f(x, y)$ értelmezési tartományába, amelyekre mindkét feltétel egyszerre teljesül. A halmazok nyelvén megfogalmazva, $f(x, y)$ értelmezési tartományát a két feltételhez tartozó halmaz metszete adja. Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



3. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 - y)}$ formulával értelmezett kétváltozós függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Haladjunk kívülről befelé. Négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám lehet, vagyis keressük azokat az (x, y) pontokat, amelyekre teljesül, hogy:

$$\sin(x^2 - y) \geq 0\,.$$

Mivel a szinusz függvény 2π szerint periodikus, először elég a $[0{,}2\pi]$ tartományt vizsgálni. Mivel ezen a tartományon $\sin(x) \geq 0$, ha $0 \leq x \leq \pi$, így a periodikusság miatt, ha ezt a tartomány 2π egész számú többszörösével eltoljuk, ott sin(x) ismét pozitív lesz:

$$\sin(x) \geq 0 \qquad \text{ha} \qquad 2\pi k \leq x \leq \pi + 2\pi k, \quad k \in Z\,.$$

Tehát keressük azon (x, y) pontok halmazát, ahol:

$$2\pi k \leq x^2 - y \leq \pi + 2\pi k, \quad k \in Z\,.$$

Szorozzuk be az egyenlőtlenségeket -1-el. Ekkor a relációs jelek megfordulnak:

$$2\pi k \geq y - x^2 \geq -\pi + 2\pi k, \quad k \in Z\,.$$

Vegyük figyelembe, hogy (-1)-el való beszorzás után természetesen -2πk-t kellene írnunk az egyenletben. Azonban k végigfut az összes egész számon, így nem számít, hogy az egyenletben $-k$-t vagy k-t írunk, hiszen mindkettő elő fog fordulni.

Rendezzük az egyenlőtlenségeket y

$$2\pi k + x^2 \geq y \geq x^2 - \pi + 2\pi k \ \ , k \in Z \, .$$

Számszerűsítve az első pár k értékre:

- k = 0

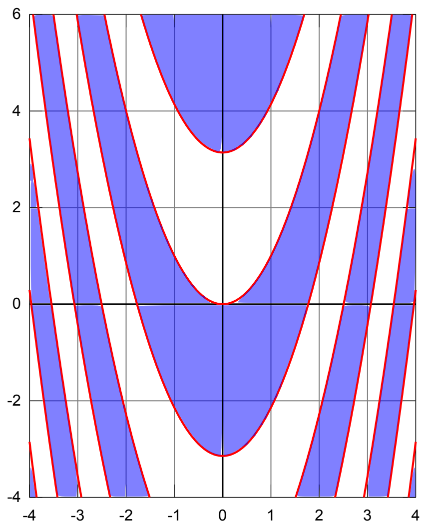
$$x^2 \geq y \geq x^2 - \pi$$

- k = 1

$$x^2 + 2\pi \geq y \geq x^2 + \pi$$

$\vdots$

Vagyis az értelmezési tartomány az egymástól π-vel eltolt parabolák által közrefogott terület lesz, 2π periódussal ismétlődve az y tengely mentén:



4. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{z}$ formulával értelmezett háromváltozós függvény értelmezési tartományát.

Megoldás: Háromváltozós függvény értelmezési tartománya a 3 dimenziós tér, vagy annak valamely részhalmaza. Ebben az esetben a keresett pontok koordinátáira teljesülni kell, hogy $z \neq 0$ (az osztás miatt) és x, y pedig tetszőleges valós számok lehetnek. Ezen feltételeknek eleget tevő pontok halmaza a teljes 3 dimenziós tér, kivéve a koordináta rendszer XY síkja.

5. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 + y^2 + z^2}$ háromváltozós függvény értelmezési tartományát.

   Megoldás: Négyzetgyök alatt most is csak nemnegatív szám állhat, így:
$$9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 9 \geq x^2 + y^2 + z^2 \,.$$
   Mivel $9 = x^2 + y^2 + z^2$, azon pontok halmaza a térben, amelyeknek az origótól vett távolságuk éppen 3, így f függvény értelmezési tartománya egy origó középpontú, 3 sugarú gömb teljes felülete a belső pontokkal együtt.

4.3. Szintvonalak

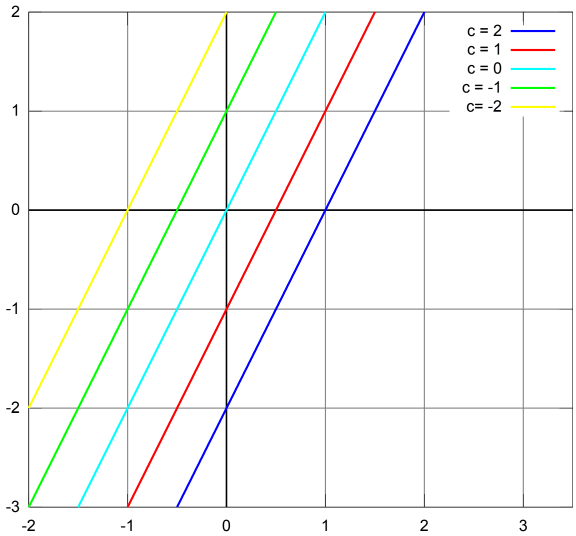
4.3.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = 2x - y$ kétváltozós függvény $c = -2, -1, 0, 1, 2$ magasságokhoz tartozó szintvonalait és ábrázoljuk azokat egy koordináta rendszerben.

   Megoldás: Tekintsük először a $c = -2$ esetet. Ehhez a magassághoz tartozó szintvonal az lesz, ami kielégíti az $f(x, y) = -2$ egyenletet:
$$-2 = 2x - y \,.$$
   Rendezzük ezt szokás szerint y-ra:
$$y = 2x + 2 \,.$$
   Hasonlóan, ha $c = -1$
$$y = 2x + 1 \,.$$
   Ha $c = 0$
$$y = 2x \,.$$
   Ha $c = 1$
$$y = 2x - 1 \,.$$
   Minden esetben egy egyenes egyenletét kaptuk, 2 meredekséggel.

   Számoljuk paraméteresen:
$$c = 2x - y \,.$$
   Ha ezt y-ra rendezzük:
$$y = 2x - c \,.$$
   Tehát az összes szintvonal 2 meredekségű egyenes lesz. A tengelymetszet helyét befolyásolja, hogy milyen magassághoz tartozó szintvonalat vizsgálunk.

A szintvonalakat az alábbi ábra szemlélteti:



2. **Feladat:** Határozzuk meg az $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = (x-2)^2 + (y+1)^2$ kétváltozós függvény $c = -1, 0, 1$ magasságokhoz tartozó szintvonalait és ábrázoljuk azokat egy koordináta rendszerben.

Megoldás: Tekintsük először a $c = -1$ esetet. Ekkor a következő egyenletet kapjuk, hogy:

$$-1 = (x-2)^2 + (y+1)^2 .$$

Azonban $(x-2)^2 \geq 0$ és $(y+1)^2 \geq 0$ bármely x, y valós szám esetén, így az összegük nem lehet negatív. Ez azt jelenti, hogy nincs $c = -1$-hez tartozó szintvonala ennek a függvénynek.

Nézzük meg, mi a helyzet $c = 0$ esetén. Ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$$0 = (x-2)^2 + (y+1)^2 .$$

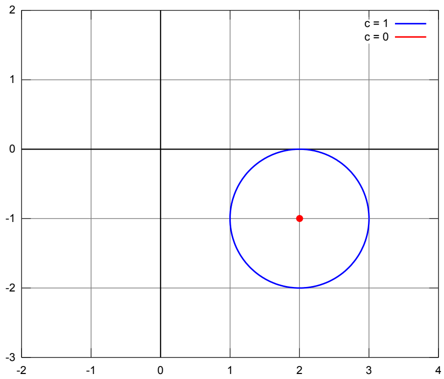
Két nemnegatív szám összege csak akkor lehet 0, ha az összeg mindkét tagja egyszerre 0. Ez csak az $x = 2, y = -1$ pontban teljesül, tehát ebben az esetben a szintvonal egyetlen pontból áll.

Vizsgáljuk meg végül $c = 1$-et. Ekkor az

$$1 = (x-2)^2 + (y+1)^2$$

egyenletet határozza meg a szintvonalakat. Ez az egyenlet egy olyan 1 sugarú kör egyenlete, amelynek a középpontja az $x = 2, y = -1$ pontban van.

A szintvonalak tehát:



Általában, ha $c > 0$-ra a szintvonalak $\sqrt{c}$ sugarú, $(2, -1)$ középpontú körök lesznek. Ha $c < 0$ esetén nincsenek szintvonalak. Ha $c = 0$, egyetlen pontot kapunk.

4.3.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \sqrt{1 + xy}$ kétváltozós függvény $c = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}$ magasságokhoz tartozó szintvonalait és ábrázoljuk azokat egy koordináta rendszerben.

Megoldás: Vizsgáljuk meg először is a függvény értelmezési tartományát. Négyzetgyök alatt csak nemnegatív szám állhat, így a feltétel:

$$1 + xy \geq 0\,.$$

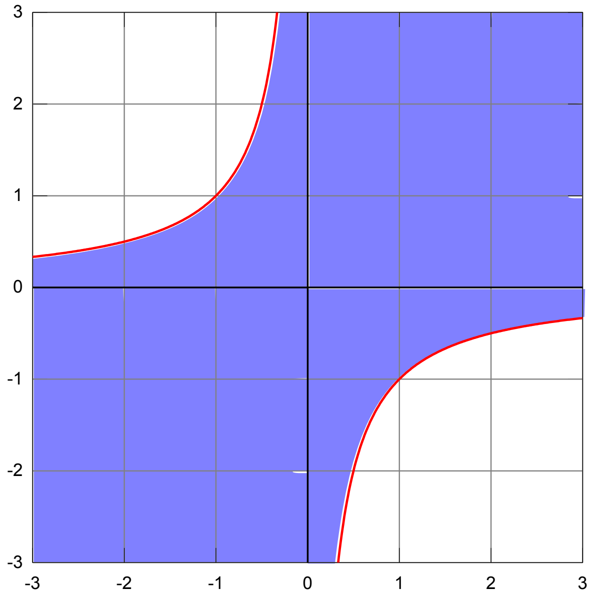
Átrendezve:

$$xy \geq -1\,.$$

Innentől ismét két esetet kell megkülönböztetnünk:

- x > 0
  Ekkor átrendezve azt kapjuk, hogy: $y \geq -\dfrac{1}{x}\,.$
- x < 0
  Átrendezve kapjuk, hogy $y \leq -\dfrac{1}{x}\,.$

Ezeket összesítve a következő értelmezési tartományt kapjuk:



Ha adott c-re létezik a függvénynek szintvonala, az biztos, hogy az értelmezési tartományon belül halad.

Tekintsük először a $c = \frac{1}{2}$ értéket. Ekkor a

$$\sqrt{1 + xy} = \frac{1}{2}$$

egyenletet kapjuk. Ebből kifejezve y-t kapjuk, hogy

$$y = -\frac{3}{4}\frac{1}{x}\,.$$

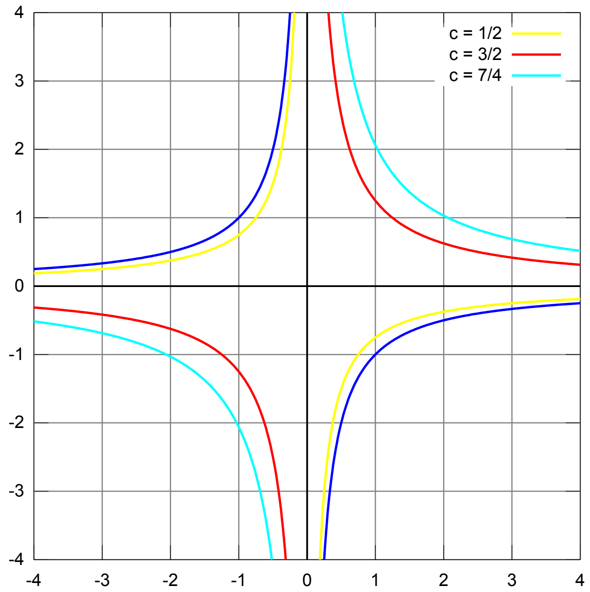
Ha $c = \frac{3}{2}$ esetét vizsgáljuk, ugyan ezekkel a lépésekkel az

$$y = \frac{5}{4}\frac{1}{x}$$

egyenletre jutunk. Míg $c = \frac{7}{4}$-ből kiindulva azt kapjuk, hogy:

$$y = \frac{33}{16}\frac{1}{x}\,.$$

Ezeket a szintvonalakat a következő grafikonon ábrázoltuk (kékkel szedve az értelmezési tartomány határa látható):



Megjegyzés Ha $c < 0$-ra nincsenek szintvonalai a függvénynek, míg $0 \leq c < 1$ esetén olyan hiperbolákat kapunk, amik a 2. és 4. síknegyedbe találhatóak. Ha $c > 1$, akkor 1. és 3. síknegyedbe eső hiperbolákat kapunk.

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ függvény $c = -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}$ magasságokhoz tartozó szintvonalait.

Megoldás: Először is ki kell kötnünk, hogy az $(0,0)$ pont nem része az értelmezési tartománynak, hiszen 0-val nem tudunk osztani.

Kezdjük a $c = -\dfrac{1}{2}$ esettel.

$$-\frac{1}{2} = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Szorozzunk keresztbe.

$$x^2 + y^2 = -2xy\,.$$

Mindent egy oldalra rendezve kapjuk, hogy:

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 = 0\,.$$

Vagyis a szintvonalra olyan (x,y) pontok illeszkednek, amelyekre $x + y = 0$, azaz $y = -x$. Tehát a szintvonal ebben az esetben az $y = -x$ egyenletű egyenes.

Hasonlóan járhatunk el $c = \frac{1}{2}$ esetén. Keresztbe szorzással kapjuk, hogy:

$$x^2 + y^2 = 2xy\,.$$

Ebből következik, hogy:

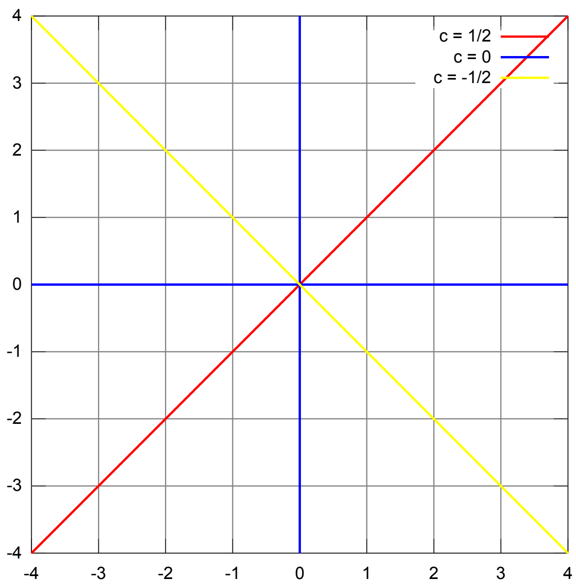
$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 = 0\,,$$

vagyis az ehhez tartozó szintvonal is egyenes, méghozzá az $x = y$ egyenes, ami merőleges a $c = -\frac{1}{2}$ -hez tartozó szintvonalra.

Ha $c = 0$, akkor a következőképpen járhatunk el. Mivel egy tört csak akkor lehet 0, ha a számlálója 0, így a következő feltételt kapjuk:

$$xy = 0\,.$$

Egy szorzat akkor lehet 0, ha valamely tényezője 0, tehát a szintvonal ebben az esetben az x és az y tengely, kivéve az origót, hiszen az nem része az értelmezési tartománynak. A 3 különböző magassághoz tartozó szintvonalakat jelöli az alábbi ábra.



4.4. Határértékszámítás

4.4.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} (3xy^2 + xy - 2)$$

Megoldás: Definíció szerint, ha $(x_0, y_0) \in D_f$ vagy egy olyan pont, amelynek bármely környezeében van olyan pont, ami f értelmezési tartományába esik, akkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A,$$

ha bármely $x_n \to x_0$ és $y_n \to y_0$ esetén

$$f(x_n, y_n) \to A.$$

Szemléletesen ez azt jelenti, $f(x,y)$ kétváltozós függvénynek (x_0, y_0) pontban a határértéke A valós szám, ha bármilyen irányból is közelítjük meg az (x_0, y_0) pontot, a helyettesítési értékekek konvergálnak A valós számhoz.

Tegyük fel hogy, $x_n \to 2$ és $y_n \to 1$ (tehát bármilyen irányból is közelítünk), ekkor

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(2,1)} (3x_n y_n^2 + x_n y_n - 2) =$$

Most már konvergens sorozatokra vonatkozó ismereteink alapján folytathatjuk a megoldást.

$$= \lim_{(x_n,y_n)\to(2,1)} 3x_n y_n^2 + \lim_{(x_n,y_n)\to(2,1)} x_n y_n - \lim_{(x_n,y_n)\to(2,1)} 2 =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = 6$$

Tehát a definíció szerint

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} (3xy^2 + xy - 2) = 6$$

2. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-y}{xy+x}$$

Megoldás: Az elöző feladathoz hasonlóan, tegyük fel hogy, $x_n \to 1$ és $y_n \to 0$

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(1,0)} \frac{x_n - y_n}{x_n y_n + x_n} = \frac{1-0}{1 \cdot 0 + 1} = 1$$

ezért

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-y}{xy+x} = 1$$

3. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(2,-2)} x\sqrt{y^3+2x-3}$$

Megoldás: Tegyük fel hogy, $x_n \to 2$ és $y_n \to -2$, akkor

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(2,-2)} x_n\sqrt{y_n^3+2x_n-3} = 2\sqrt{2^3+2(-2)-3} = 2\cdot 1 = 2$$

Ezért

$$\lim_{(x,y)\to(2,-2)} x\sqrt{y^3+2x-3} = 2$$

4. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+1}{x^2+2y^2}$$

Megoldás: Mivel

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)} \frac{x_x+1}{x_n^2+2y_n^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty$$

Azaz a számláló határértéke értelemszerűen 1, míg a nevező határértéke pozitív számokon keresztül 0-hoz tart. Emiatt ennek a kifejezésnek az értéke minden határon túl nő, ahogy tartunk a (0,0) pontba, így

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+1}{x^2+2y^2} = \infty$$

4.4.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{y^2-x^2}$$

Megoldás: Most $(1,1)$ pontban a függvényünk nincs értelmezve. Tegyük fel újra hogy, $x_n \to 1$ és $y_n \to 1$. Ekkor egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték kapunk, a feladat megoldásához még kell más ötlet is. Vegyük észre, hogy a nevezőt szorzattá bonthatjuk:

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(1,1)} \frac{x_n-y_n}{y_n^2-x_n^2} = \lim_{(x_n,y_n)\to(1,1)} \frac{x_n-y_n}{(y_n-x_n)(y_n+x_n)} =$$

Egyszerűsítés után már tudunk határértéket számolni.

$$= \lim_{(x_n,y_n)\to(1,1)} \frac{-1}{y_n + x_n} = -\frac{1}{2}$$

A definíció szerint a keresett határérték:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{y^2-x^2} = -\frac{1}{2}$$

2. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+3y}{x-4y}$$

Megoldás: Megint egy olyan pontban keresünk határértéket, ahol a függvény nincs értelmezve. Az előző módszerrel újra egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték kapunk. Más utat kell keresnünk a megoldáshoz.

Közelítsünk most egy speciális sorozattal.

$$x_n \to 0 \text{ tetszőleges módon, de } y_n = 2 \cdot x_n,$$

$$\lim_{x_n\to 0} \frac{2x_n + 6x_n}{x_n - 8x_n} = \lim_{x_n\to 0} \frac{8x_n}{-7x_n} = -\frac{8}{7}$$

Próbáljunk ki egy másik közelítést:

$$x_n \to 0 \text{ tetszőleges módon, de } y_n = 5 \cdot x_n,$$

$$\lim_{x_n\to 0} \frac{2x_n + 15x_n}{x_n - 20x_n} = \lim_{x_n\to 0} \frac{17}{-20} = -\frac{17}{20}$$

A határérték létezésének feltétele, hogy tetszőleges sorozattal (tetszőleges irányból) tartva az adott pontba mindig ugyan azt a határértéket kell kapnunk. Ez nem teljesül erre a függvényre, mert két különböző irányból közelítve két különböző eredményt kaptunk. Tehát a vizsgált határérték nem létezik.

3. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Megoldás: Megint egy olyan pontban keresünk határértéket, ahol a függvény nincs értelmezve. Az előző feladat alapján az a sejtésünk, hogy ebben az esetben sem létezik határérték. Próbálkozzunk most is speciális sorozatokkal.

Közelítsünk most egy speciális sorozattal.

$$x_n \to 0 \text{ tetszőleges módon, de } y_n = m \cdot x_n,$$

ahol m egy tetszőleges valós konstans. Ezzel a megszorítással ugyanúgy a (0,0) pontba tartunk, csak speciális módon. Ha elképzeljük az xy síkot, akkor ezzel a feltétellel épp azt mondtuk, hogy *egy m meredekségű egyenes mentén tartunk az origóba.* Ha a határérték létezik, akkor az nem függhet attól, hogy milyen irányból tartunk az origóba, tehát azt jelenti, hogy a határértékre kapott kifejezés nem függhet m-től.

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{x_n \cdot m x_n}{x_n^2 + (m x_n)^2} = \lim_{x_n \to 0} \frac{x_n^2}{x_n^2} \cdot \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

A határérték tehát nem létezik, mert különböző irányokból közelítve különböző eredményeket kaptunk.

Megjegyzés: Ugyanerre a következtetésre jutunk, ha kicsit másképp oldjuk meg a feladatot. Kétváltozós függvények esetén sokszor jól használható módszer az, ha áttérünk polárkoordinátákra, és ott próbáljuk meg kiszámolni a határértéket:

Transzformációs képletek	Inverz transzformációs képletek
$x = r \cdot \cos(\varphi)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \cdot \sin(\varphi)$	$\varphi = \text{ arctg } (\frac{y}{x})$

Mivel $(x, y) \to 0$ polárkoodinátákban ($r \to 0, \varphi$ tetszőleges)-nek felel meg, így

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r \to 0} \frac{r^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2} = \sin(\varphi)\cos(\varphi)$$

Ezzel a megközelítéssel is azt kaptuk, hogy a határérték függ a közelítés irányától, azaz ennek a függvénynek nincs határértéke a (0,0)-ban.

4. **Feladat:** Bizonyítsuk be, hogy $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 + 3y - y^3$ függvény folytonos a $(2, 3)$ pontban.

Megoldás: Egy f kétváltozós függvény akkor folytonos az értelmezési tartomány (x_0, y_0) pontjában, ha bármely $x_n \to x_0$ és $y_n \to y_0$ sorozat esetén a helyettesítési értékek sorozata tart $f(x_0, y_0)$-hoz, azaz

$$f(x_n.y_n) \to f(x_0, y_0) \quad \text{másképp} \quad |f(x_n.y_n) - f(x_0, y_0)| \to 0$$

Ebben az esetben a függvény helyettesítési értéke:

$$f(2, 3) = 2^2 + 3 \cdot 3 - 3^3 = 14$$

Tehát azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)}(x^2+3y-y^3)=14$$

Ha $x_n \to 2$ és $y_n \to 3$, akkor

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(2,3)}(x_n^2+3y_n-y_n^3)=14$$

Tehát azt kaptuk, hogy f függvénynek létezik határértéke $(2,3)$ pontban és ez éppen megegyezik a határértékkel, így f folytonos a vizsgált pontban.

Megjegyzés: Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan most is igaz, hogy ha f egy (x_0, y_0) pontban folytonos kétváltozós függvény, akkor f határértéke (x_0, y_0) pontban épp a helyettesítési értékével egyenlő. Ez azt jelenti, hogy minden eddig megoldott feladatnál, ahol f folytonos volt a vizsgált helyen, a határérték a folytonosságra való hivatkozással egyszerűen megadható lett volna a helyettesítési értékkel.

5. **Feladat:** Igazoljuk, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{y}+y\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{ha } xy\neq 0 \\ 0, & \text{ha } xy=0 \end{cases}$$

formulával értelmezett függvény folytonos az origóban.

Megoldás: Ennél a feladatnál $x\cdot\sin\frac{1}{y}+y\cdot\sin\frac{1}{x}$ kifejezés nincs értelmezve $(0,0)$ pontban. Tehát az a kérdés vajon f -t folytonossá tudjuk-e tenni az origóban.

Legyen $x_n \to 0$ és $y_n \to 0$ két tetszőleges zérussorozat, akkor:

$$|f(x_n,y_n)-f(0,0)| = |x\cdot\sin\frac{1}{y}+y\cdot\sin\frac{1}{x}-0| \leq$$

$$\leq |x_n|\cdot|\sin\frac{1}{y_n}|+|y_n|\cdot|\sin\frac{1}{x_n}| \leq |x_n|+|y_n| \to 0$$

tehát f valóban folytonos az origóban.

6. **Feladat:** Igazoljuk, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & \text{ha } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

formulával értelmezett függvény nem folytonos az origóban.

Megoldás:

Legyen $x_n \to 0$ és $y_n \to 0$ két tetszőleges zérussorozat, akkor:

$$|f(x_n, y_n) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} - 0 \right| =$$

$$= \left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \right| =$$

$$= \frac{(x_n^2 + y_n^2) \cdot (\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + 1} + 1)}{x_n^2 + y_n^2 + 1 - 1} \to 2 \neq 0$$

tehát a határérték nem egyenlő a helyettesítési értékkel, így f nem folytonos az origóban.

4.5. Parciális deriváltak

4.5.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Tekintsük az alábbi kétváltozós függvényt:

$$f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R},\ f(x, y) = x^2y - xy^3$$

Számítsuk ki $f'_x(1, 2)$ és $f'_y(1, 2)$ értékeit!

Majd képezzük az összes másodrendű parciális deriváltat.

Megoldás: A feladat megoldásához először el kell végeznünk a parciális deriválást az adott változók szerint, majd következik a behelyettesítés. Parciális deriválásnál csak azt a változót tekintjük változónak, ami szerint éppen deriválunk. A másik változó pedig rögzítetett konstansként viselkedik.

Így

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2y - xy^3\right) = 2xy - y^3$$

hiszen x^2 deriváltja $2x$, x deriváltja pedig 1. Majd elvégezve a behelyettesítést:

$$f'_x(1, 2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2^3 = -4$$

f'_y kiszámítása nagyon hasonlóan történik: most y szerint deriválunk, és x-et tekintjük konstansnak:

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2y - xy^3\right) = x^2 - 3xy^2$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$f'_y(1, 2) = 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = -11$$

Ha az elsőrendű parciális deriváltakat újra deriválva, kapjuk a másodrendű parciális deriváltakat Ezeket úgy jelöljük, hogy sorban leírjuk azokat a változókat, amik szerint deriválunk. Például

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

azt jelenti, hogy $f(x,y)$-t először x szerint, majd y szerint deriváljuk parciálisan.

A jelen esetben:

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy - y^3\right) = 2x - 3y^2$$

A Young-tétel kimondja, hogy kétszer folytonosan deriválható függvényekre a magasabbrendű parciális deriváltak függetlenek a deriválás sorrendjétől, vagyis például $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ A konkrét példánkban:

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 3xy^2\right) = 2x - 3y^2$$

Megjegyezés: A tétel megfordítása azonban nem feltétlenül igaz, tehát például abból, hogy $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$, még nem következik, hogy $f(x,y)$ kétszer folytonosan deriválható.

Következzenek a tiszta másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy - y^3\right) = 2y$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 3xy^2\right) = -6xy$$

2. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit:

$$f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R},\ f(x,y) = x^2 e^{2y}$$

Megoldás: Kezdjük az x szerinti deriválással. Ekkor y, és így e^{2y} is konstansnak tekintendő.

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{2y}\frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2xe^{2y}$$

Most y szerinti deriválva x^2 lesz konstans:

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2\frac{\partial}{\partial y}e^{2y} = x^2 2e^{2y}$$

3. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi háromváltozós függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit:

$$f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R},\ f(x,y,z) = (x^2 + xy)(\ln z + \sqrt{x})$$

Megoldás: Az f függvénynek három változója van, így három elsőrendű parciális deriváltat tudunk megadni.

Kezdjük az x szerinti deriválással. Ekkor y-t és z-t konstansnak kell tekinteni. Mivel mindkét tényezőben szerepel x, ezért most a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabályt fogjuk használni.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \\ &= (\ln z + \sqrt{x})\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy) + (x^2 + xy)\frac{\partial}{\partial x}(\ln z + \sqrt{x}) = \\ &= (\ln z + \sqrt{x})(2x + y) + (x^2 + xy)\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Mivel y csak a szorzat első tényezőjében van, ezért y szerinti deriválásnál x-t, z-t és $\ln z + \sqrt{x}$ tényezőt is konstansként kezeljük.

$$\begin{aligned} f'_y(x,y,z) &= \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = (\ln z + \sqrt{x})\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy) = \\ &= (\ln z + \sqrt{x})x \end{aligned}$$

Következik a z szerinti deriválás. Most $(x^2 + xy)$ tényezőt kezeljük konstansként.

$$\begin{aligned} f'_z(x,y,z) &= \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = (x^2 + xy)\frac{\partial}{\partial z}(\ln z + \sqrt{x}) = \\ &= (x^2 + xy)\frac{1}{z} \end{aligned}$$

4. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi háromváltozós függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit:

$$f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R},\ f(x,y,z) = \frac{x + 3y}{z^2 + 1}$$

Megoldás: Ebben az esetben alkalmazzuk a törtfüggvényre vonatkozó derivárási szabályt.

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+3y}{z^2+1}\right) = \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+3y)\cdot(z^2+1)-(x+3y)\frac{\partial}{\partial x}(z^2+1)}{(z^2+1)^2} = \\
&= \frac{1\cdot(z^2+1)-(x+3y)\cdot 0}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{z^2+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'_y(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+3y}{z^2+1}\right) = \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x+3y)\cdot(z^2+1)-(x+3y)\frac{\partial}{\partial y}(z^2+1)}{(z^2+1)^2} = \\
&= \frac{3\cdot(z^2+1)-(x+3y)\cdot 0}{(z^2+1)^2} = \frac{3}{z^2+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'_z(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x+3y}{z^2+1}\right) = \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial z}(x+3y)\cdot(z^2+1)-(x+3y)\frac{\partial}{\partial z}(z^2+1)}{(z^2+1)^2} = \\
&= \frac{0\cdot(z^2+1)-(x+3y)\cdot 2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{2z(x+3y)}{z^2+1}
\end{aligned}
$$

Ha észrevesszük, hogy a törtfüggvényünk felírható szorzatként is, azaz

$$f(x,y,z) = \frac{1}{z^2+1}(x+3y)$$

alakban, akkor az x és y szerinti deriválások sokkal egyszerűbben is elvégezhetőek. Hiszen ezekben az esetekben $\frac{1}{z^2+1}$-t konstansnak kell tekinteni, így

$$f'_x(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{1}{z^2+1}\frac{\partial}{\partial x}(x+3y) = \frac{1}{z^2+1}$$

Az y szerinti derivált:

$$f'_y(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{z^2+1}\frac{\partial}{\partial y}(x+3y) = \frac{3}{z^2+1}$$

5. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvény parciális elsőrendű derivált függvényeit:

$$f:\mathbf{R^2}\to\mathbf{R},\ f(x,y) = \left(2xy - y^3\right)^3$$

Megoldás: Kezdjük az x szerinti deriválással. Ez a függvény egy külső és egy belső függvényből van felépítve:

A külső függvény: $f(z) = z^3$

A belső függvény: $z(x, y) = 2xy - y^3$

Ezzel a felírással az eredeti függvény: $f(x, y) = f(z(x, y))$, vagyis f a z függvényen *keresztül* függ x, y-tól. Az ilyen típusú függvényeket összetett függvényeknek hívjuk. Összetett függvények esetén a láncszabályt kell alkalmazni, vagyis:

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(z(x, y))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(z(x, y))}{\partial z}\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$$

Ez azt jelenti, hogy először deriválni kell a külső függvényt a belső függvény szerint, majd a belső függvényt a megfelelő változó szerint. Kezdjük a külső függvény deriváltjával :

$$\frac{\partial f(z(x, y))}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} z^3(x, y) = 3z^2(x, y) = 3\left(2xy - y^3\right)^2$$

A belső függvény deriváltja x változó szerint:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy - y^3\right) = 2y$$

Így az eredeti derivált:

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(z(x, y))}{\partial z}\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \underbrace{3\left(2xy - y^3\right)^2}_{\text{külső der.}} \cdot \underbrace{2y}_{\text{belső der.}}$$

$f'_y(x, y)$ kiszámítása ismét a láncszabály felhasználásával történik:

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f(z(x, y))}{\partial z}\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$$

Itt annyival könnyebb dolgunk van, hogy az első tényezőt már kiszámítottuk, így elég csak a második tényezőt kiszámolnunk:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy - y^3\right) = 2x - 3y^2$$

Tehát végeredményben:

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f(z(x, y))}{\partial z}\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \underbrace{3\left(2xy - y^3\right)^2}_{\text{külső der.}} \cdot \underbrace{\left(2x - 3y^2\right)}_{\text{belső der.}}$$

6. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvény parciális elsőrendű derivált függvényeit:

$$f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R},\ f(x,y) = \sqrt{x^2y^2 - y^4}$$

Megoldás: Ez ismét csak egy összetett függvény, így a megoldás menete úgy zajlik, mint az előző feladatban: először deriválni kell a külső függvényt a belső függvény szerint (jelen esetben a négyzetgyök függvényt), majd utána a belső függvényt kell deriválni a megfelelő változó szerint. A négyzetgyök függvényt érdemes hatvány alakban felírni, ha nem jut eszünkbe a deriváltja:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2y^2 - y^4} = \left(x^2y^2 - y^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ezután a külső függvényt már mint hatványfüggvényt lehet deriválni:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^2 - y^4\right)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^2y^2 - y^4\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{külső der.}} \cdot \underbrace{(2xy^2)}_{\text{belső der.}} =$$
$$= \frac{2xy^2}{2\sqrt{x^2y^2 - y^4}}$$

$f'_y(x,y)$ kiszámításához használjuk fel, hogy $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, ekkor ugyanis nem kell átírnunk hatvány alakba a kifejezést, és ezzel megspórolunk egy lépést:

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2y^2 - y^4} = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2y^2 - y^4}}}_{\text{külső der.}} \cdot \underbrace{(2x^2y - 4y^3)}_{\text{belső der.}} =$$
$$= \frac{(x^2y - 2y^3)}{\sqrt{x^2y^2 - y^4}}$$

7. **Feladat:** Ha $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = 3x^3 \sin y$, határozzuk meg függvény f''_{xx} és f'''_{yxx} parciális derivált függvényeit.

Megoldás:

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \sin y \cdot 9x^2$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin y \cdot 9x^2\right) = \sin y \cdot 18x$$

Young tételt felhasználva

$$f'''_{yxx} = f'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(18x \sin y) = 18x \cos y$$

4.5.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit:

$$f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R},\ f(x,y) = \frac{\sqrt{2x-3y^2}}{x^2y^4+2}$$

Megoldás: Ebben a feladatban egy törtfüggvényt kell parciálisan deriválnunk, ami ráadásul egy összetett függvényt is tartalmaz. Így

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2x-3y^2}}{x^2y^4+2}\right) = \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{2x-3y^2}\right)\cdot(x^2y^4+2) - \sqrt{2x-3y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^4+2)}{(x^2y^4+2)^2} = \\ &= \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-3y^2}}\cdot(x^2y^4+2) - \sqrt{2x-3y^2}(2xy^4)}{(x^2y^4+2)^2} \end{aligned}$$

Hasonlóan, az y szerinti parciális derivált:

$$\begin{aligned} f'_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{2x-3y^2}}{x^2y^4+2}\right) = \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{2x-3y^2}\right)\cdot(x^2y^4+2) - \sqrt{2x-3y^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^4+2)}{(x^2y^4+2)^2} = \\ &= \frac{\frac{-6y}{2\sqrt{2x-3y^2}}\cdot(x^2y^4+2) - \sqrt{2x-3y^2}(4x^2y^3)}{(x^2y^4+2)^2} \end{aligned}$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvény összes másodrendű parciális derivált függvényeit és adjuk meg a függvény második derivált mátrixát, azaz a Hesse mátrixot:

$$f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R},\ f(x,y) = xy + x^2y^3$$

Megoldás: Először képezzük az elsőrendű parciális deriváltakat.

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = y + 2xy^3$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x + 3x^2y^2$$

Következnek a másodrendű parciális deriváltak.

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y + 2xy^3\right) = 2y^3$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x + 3x^2y^2\right) = 6x^2y$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + 2xy^3\right) = 1 + 6xy^2$$

Young tétel alapján pedig:

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = \frac{\partial^2}{\partial xy} f(x, y) = 1 + 6xy^2$$

Ha az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ kétváltozós függvény az $(x, y) \in D_f$ belső pontban kétszer differenciálható, akkor az f függvény második derivált mátrixa, azaz a Hesse mátrixa a következő másodrendű deriváltakból képzett 2×2 mátrix:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Tehát ebben az esetben

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 1 + 6xy^2 \\ 1 + 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvény $(0, 1)$ pontjához tartozó Hesse mátrixát:

$$f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R},\ f(x, y) = xye^x$$

Definitség szempontjából vizsgáljuk meg a kapott mátrixot.

Megoldás: Először képezzük az összes másodrendű parciális deriváltat.

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + xye^x$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = xe^x$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^x + xye^x\right) = ye^x + ye^x + xye^x = 2ye^x + xye^x$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xe^x\right) = 0$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(ye^x + xye^x\right) = e^x + xe^x$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^x + xe^x$$

Képezzük a másodrendű parciális deriváltaknak $(0,1)$ ponthoz tartozó helyettesítési értékeit.

$$f''_{xx}(0,1) = 2e^0 + 0 = 2$$

$$f''_{yy}(0,1) = 0$$

$$f''_{xy}(0,1) = f''_{yx}(0,1) = e^0 + 0 = 1$$

Az f függvény $(0,1)$ pontjához tartozó Hesse mátrixa a következő önadjungált (szimmetrikus) mátrix:

$$D^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0,1) & f''_{xy}(0,1) \\ f''_{yx}(0,1) & f''_{yy}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 1 = -1 < 0$$

ezért a f függvény $(0,1)$ pontjához tartozó Hesse mátrixa indefinit.

4. **Feladat:** Határozzuk meg az alábbi háromváltozós függvény $(1,1,1)$ pontjához tartozó Hesse mátrixát:

$$f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R},\ f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$$

Definitség szempontjából vizsgáljuk meg a kapott mátrixot.

Megoldás: Első lépésben meg kell határozni az összes első és másodrendű parciális deriváltakat és képezni kell a helyettesítési értékeiket. Majd felírjuk a Hesse mátrixot.

$$f'_x(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} = yz + 2x$$

$$f'_y(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y} = xz + 2y$$

$$f'_x(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} = xy + 2z$$

$$f''_{xx}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(yz+2x) = 2$$
$$f''_{yy}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(xz+2y) = 2$$
$$f''_{zz}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(xy+2z) = 2$$

A vegyes másodrendűeknél Yuong tételt felhasználva, csak három deriváltat fogunk számolni.

$$f''_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(yz+2x) = z = f''_{yx}(x,y,z)$$
$$f''_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(yz+2x) = y = f''_{zx}(x,y,z)$$
$$f''_{yz}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(xz+2y) = x = f''_{zy}(x,y,z)$$

Most az f második derivált mátrixa az (x,y,z) pontban egy 3×3 mátrix lesz.

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y,z) & f''_{xy}(x,y,z) & f''_{x,z}(x,y,z) \\ f''_{yx}(x,y,z) & f''_{yy}(x,y,z) & f''_{y,z}(x,y,z) \\ f''_{zx}(x,y,z) & f''_{zy}(x,y,z) & f''_{z,z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

azaz

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & z & 2 \end{pmatrix}$$

Tehát f második derivált mátrixa az $(1,1,1)$ pontban:

$$D^2 f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Még azt kell eldönteni, hogy milyen definit a kapott önadjungált (szimmetrikus) mátrix. Ehhez nézzük meg a minormátrixok determinánsait.

$$\det(2) = 2$$
$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$
$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(4-1) - (2-1) + (1-2) = 6$$

Mivel az összes minormátrix determinánsa pozitív, igy a $(1,1,1)$ pontban a Hesse mátrix pozitív definit.

5. **Feladat:** Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,t) = \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

függvény csak akkor kielégíti a következő másodrendű parciális differenciálegyenletet, ha fennáll a $|\omega| = |k| \cdot |c|$ összefüggés:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$$

Ezt a differenciálegyenletet *hullámegyenletnek* hívják, hiszen a megoldásai végtelen kiterjedésű szinusz-hullámok, amik c sebességgel terjednek az x tengely mentén.

Megoldás: A feladat leírása szerint $f = f(x,t)$, vagyis a függvények két változója van. A φ mennyiség - mint majd később látni fogjuk - egy paraméter, ami egy differenciálegyenlet általános megoldásában mindig megjelenik. Emiatt φ-t mint konstanst kell kezelni a deriválások során.

Számoljuk ki először az x szerinti második parciális deriváltat:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\sin(kx - \omega t + \varphi) = \cos(kx - \omega t + \varphi) \cdot k$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(kx - \omega t + \varphi) \cdot k\right) = -\sin(kx - \omega t + \varphi) \cdot k^2$$

Majd számoljuk ki a t szerinti második deriváltat:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\sin(kx - \omega t + \varphi) = \cos(kx - \omega t + \varphi) \cdot (-\omega)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\cos(kx - \omega t + \varphi) \cdot \omega\right) = -\sin(kx - \omega t + \varphi) \cdot \omega^2$$

Ezeket behelyettesítve:

$$-\sin(kx - \omega t + \varphi) \cdot k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Ha egy oldalra rendezzük a kifejezést, a következőt kapjuk:

$$\sin(kx - \omega t + \varphi)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0$$

Mivel ennek minden x, t értékre fenn kell állnia, ezért ebből következik, hogy:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0 \Rightarrow \omega^2 = k^2 c^2 \Rightarrow |\omega| = |k| \cdot |c|$$

6. **Feladat:** Mutassuk meg, hogy az $f(x,y) = e^{2x+1}\sin(2y-4)$ kétváltozós függvény ún. *homogén* függvény, vagyis

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Az elnevezés onnan ered, hogy egy $\mathbf{D}$ differenciáloperátor $\mathbf{D}f = 0$ alakban felírt egyenletét *homogén* differenciálegyenletnek nevezzük. Így f(x,y) akkor homogén függvény, ha megoldása a *Laplace-operátor* ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) homogén differenciálegyenletének.

Megoldás: Végezzük el először az x szerinti kétszeri parciális deriválást:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2x+1}\sin(2y-4)\right) = 2e^{2x+1}\sin(2y-4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2e^{2x+1}\sin(2y-4)\right) = 4e^{2x+1}\sin(2y-4)$$

Meg kell még határozni az y szerinti második deriváltat:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2x+1}\sin(2y-4)\right) = e^{2x+1}2\cos(2y-4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2e^{2x+1}\cos(2y-4)\right) = e^{2x+1}(-4)\sin(2y-4)$$

Mivel a két másodrendű parciális derivált csak egy negatív előjelben különbözik, így az összegük természetesen nullát ad.

Megjegyzés A fenti egyenlet gyakorlati felhasználás szempontjából is nagyon fontos. A

$$\Delta\Phi(x,y,z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

ún. *Laplace-egyenletet* kell megoldani az elektromos potenciál meghatározásához, ha tetszőleges alakú, de töltést nem tartalmazó térrészben vizsgálódunk.

7. **Feladat:** Mutassuk meg, hogy

   (*a*) az

   $$u(x,y) := \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   formulával értelmezett (kétváltozós) függvényre $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$ teljesül ($(x,y) \neq (0,0)$);

(*b*) az
$$u(x,y,z) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
formulával értelmezett (háromváltozós) függvényre $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv 0$ teljesül ($(x,y,z) \neq (0,0,0)$).

Megoldás:

(*a*) Nyilván $u(x,y) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, innen
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
Hasonlóan:
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2},$$
így kettőjük összege valóban azonosan zérus (ahol értelmezett).

(*b*) Nyilván $u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, innen
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + x \cdot 3x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} =$$
$$= \frac{-x^2-y^2-z^2+3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$
Hasonlóan:
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + y \cdot 3y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} =$$
$$= \frac{-x^2-y^2-z^2+3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$
és
$$\frac{\partial u}{\partial z} = -z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + z \cdot 3z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-5/2} =$$

$$= \frac{-x^2 - y^2 - z^2 + 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

A három kifejezés összege tehát valóban azonosan zérus (ahol értelmezett).

4.6. Érintősík

4.6.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}\, f(x, y)$ függvény érintősíkjának egy normálvektorát és érintési pontját az értelmezési tartomány $(2, -4)$ pontjában, ha

$$f(x, y) = \frac{1}{xy} \qquad x, y \neq 0$$

Megoldás: Legyen $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ kétváltozós függvény az (x_0, y_0) pontban differenciálható. Ekkor az f függvény $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ felületi pontjához tartozó érintősíkjának normálvektora:

$$\mathbf{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$$

Tehát szükségünk van $f(x, y)$ függvény parciális deriváltjainak $(2, -4)$ ponthoz tartozó helyettesítési értékeire.

Végezzük el a parciális deriválásokat.

$$\text{Ha} \qquad f(x, y) = \frac{1}{y} x^{-1} \qquad \text{akkor} \qquad f'_x(x, y) = \frac{1}{y}(-x^{-2}) = -\frac{1}{yx^2}$$

$$\text{Ha} \qquad f(x, y) = \frac{1}{x} y^{-1} \qquad \text{akkor} \qquad f'_y(x, y) = \frac{1}{x}(-y^{-2}) = -\frac{1}{xy^2}$$

Számoljuk ki a helyettesítési értékeket.

$$f'_x(2, -4) = -\frac{1}{(-4)2^2} = \frac{1}{16}$$

$$f'_y(2, -4) = -\frac{1}{2(-4)^2} = -\frac{1}{32}$$

Tehát az érintősík egy normálvektora:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{16}, -\frac{1}{32} - 1 \right)$$

Mivel az érintősík megadásánál lényegtelen a normálvektor hossza, egy másik normálvektor legyen például:

$$\mathbf{n_2} = 32 \left(\frac{1}{16}, -\frac{1}{32} - 1 \right) = (2, -1, -32)$$

Az (x_0, y_0) ponthoz tartozó érintősík érintési pontja éppen az a pont, ahol a sík érinti az $f(x, y)$ függvény által leírt felületet, azaz a

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

felületi pontja.

Mivel

$$f(2, -4) == \frac{1}{2 \cdot (-4)} = -\frac{1}{8}$$

az érintősík a felületet a $(2, -4, -\frac{1}{8})$ pontban érinti.

2. **Feladat:** Az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \ln(xy)$ felület mely Q pontjában párhuzamos az érintősík az $x + y + z = 0$ síkkal?

Megoldás: Két sík akkor párhuzamos, ha az egyik sík normálvektora a másik sík normálvektorának számszorosa.

Az $x + y + z = 0$ sík egy normálvektora $\mathbf{n_1} = (1, 1, 1)$.

Tudjuk, hogy az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontjához tartozó érintősíkjának normálvektora:

$$\mathbf{n_2} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$$

Mivel a két normálvektor harmadik koordinátái csak egy előjelben térnek el, ezért keressük az értelmezési tartomány azon (x_0, y_0) pontját, amelyre

$$-f'_x(x_0, y_0) = 1 \qquad \text{és} \qquad -f'_y(x_0, y_0) = 1$$

Képezzük a parciális deriváltakat.

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{xy} y = \frac{1}{x} \qquad f'_y(x, y) = \frac{1}{xy} x = \frac{1}{y}$$

Azaz

$$-\frac{1}{x_0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = -1$$

és

$$-\frac{1}{y_0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y_0 = -1$$

Tehát az értelmezési tartomány $(-1, -1)$ pontjához tartozó Q felületi pont:

$$f(-1, -1) = \ln 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(-1, -1, 0)$$

3. **Feladat:** Az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 12x + 4y + 7$ felület mely Q pontjában vízszintes az érintősík?

Megoldás: Egy sík akkor vízszintes, ha párhuzamos a koordinátarendszer XY síkjával. Ekkor a sík normálvektora

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} = (0,0,1)$$

Tehát keressük azokat a pontokat, amelyekben az $f(x,y)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjai eltünnek, azaz nullával egyenlőek.

$$f'_x(x,y) = 2x - 2y - 12 \qquad f'_y(x,y) = -2x + 6y + 4$$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert.

$$2x - 2y - 12 = 0 \qquad \text{és} \qquad -2x + 6y + 4 = 0$$

Adjuk össze a két egyenletet.

$$4y - 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 2 \qquad x = 8$$

Mivel

$$f(8,2) = 27$$

ezért a $(8,2)$ ponthoz tartozó Q felületeti pont:

$$Q(8,2,27)$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, függvény érintősíkjának egyenletét a $(1,-1)$ pontban, ha

$$f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$$

Megoldás: Egy síkot egyértelműen definiál egy tetszőleges pontja, illetve egy normálvektora. A pont legyen éppen az érintési pont,

$$P(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$$

és a normálvektor pedig

$$\mathbf{n} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$$

Ezek felhasználásával az érintősík egyenlete:

$$0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y - y_0) - (z - f(x_0,y_0))$$

Először kezdjük az érintési pont z koordinátájának kiszámolásával:

$$f(1,-1) = 1^2 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 = 4$$

Majd számítsuk ki a deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = 2x - y$$

$$f'_y(x,y) = -x + 4y$$

Ezek alapján

$$f'_x(1,-1) = 2 \cdot 1 - (-1) = 3$$

$$f'_y(1,-1) = -1 + 4 \cdot (-1) = -5$$

Tehát az érintési pont és a normálvektor koordinátákkal megadva:

$$P(1,-1,4) \qquad \mathbf{n} = (3,-5-1)$$

Most már felírhatjuk az érintősík egyenletét:

$$0 = 3 \cdot (x-1) + (-5) \cdot (y-(-1)) - (z-4)$$

$$S: \qquad 3x - 5y - z - 4 = 0$$

5. **Feladat:** Írjuk fel az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, függvény érintősíkjának egyenletét a $(2,4)$ pontban, ha

$$f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

Megoldás: Először is meg kell győződnünk arról, hogy a kérdéses pont eleme-e az értelmezési tartománynak, vagyis próbáljuk meg elvégezni a behelyettesítést:

$$f(2,4) = \sqrt{36 - 2^2 - 4^2} = \sqrt{16} = 4$$

A művelet elvégezhető, tehát e pontra felírható az érintősík. Ismét szükségünk lesz a parciális deriváltakra:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{36 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{36 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$$

Így

$$f'_x(2,4) = -\frac{2}{\sqrt{36 - 2^2 - 4^2}} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f'_y(2,4) = -\frac{4}{\sqrt{36-2^2-4^2}} = -\frac{4}{4} = -1$$

Felhasználva, hogy az érintősík egyenlete:

$$0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y-y_0) - (z - f(x_0, y_0)),$$

behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$0 = -\frac{1}{2}\cdot(x-2) + (-1)\cdot(y-4) - (z-4)$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát (-2)-vel.

$$0 = (x-2) + 2\cdot(y-4) + 2(z-4)$$

Tehát az érintősík egyenlete:

$$S: \qquad 0 = x + 2y + 2z - 18$$

6. **Feladat:** Írjuk fel az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, függvény érintősíkjának egyenletét az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontban, ha

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

Megoldás: Határozzuk meg az érintési pont harmadik koordinátáját:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cdot(-2x)$$

$$f'_y(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cdot(-2y)$$

Ezek alapján

$$f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1}\cdot(-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\sqrt{2}}{e}$$

$$f'_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1}\cdot(-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\sqrt{2}}{e}$$

Azért, hogy ne kelljen törtekkel dolgozni, legyen a normálvektor koordinátái:

$$\mathbf{n} = -e\left(-\frac{\sqrt{2}}{e}, -\frac{\sqrt{2}}{e}, -1\right) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, e)$$

Ekkor az érintősík egyenlete:

$$\sqrt{2}\cdot(x-\frac{1}{\sqrt{2}})+\sqrt{2}\cdot(y-\frac{1}{\sqrt{2}})+e(z-\frac{1}{e})=0$$

$$\sqrt{2}\cdot x-1+\sqrt{2}\cdot y-1+ze-1=0$$

$$S:\qquad \sqrt{2}x+\sqrt{2}y+ze-3=0$$

4.6.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Írjuk fel a következő kétváltozós függvény $(1,1)$ ponthoz tartozó érintősíkjának egyenletét:

$$f(x,y)=2\ln\left(\frac{y}{x}+x^2\right)$$

Megoldás: Első lépésben határozzuk meg az érintési pont harmadik koordinátáját:

$$f(1,1)=2\ln\left(\frac{1}{1}+1^2\right)=2\ln(2)$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y)=\frac{2}{\frac{y}{x}+x^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}+2x\right)$$

$$f'_y(x,y)=\frac{2}{\frac{y}{x}+x^2}\cdot\frac{1}{x}$$

Ezek alapján

$$f'_x(1,1)=\frac{2}{\frac{1}{1}+1^2}\cdot\left(-\frac{1}{1^2}+2\cdot 1\right)=1$$

$$f'_y(1,1)=\frac{2}{\frac{1}{1}+1^2}\cdot\frac{1}{1}=1$$

Az érintési pont és egy normálvektor koordinátái:

$$P(1,1,2\ln 2)\qquad \mathbf{n}=(1,1,-1)$$

Tehát az érintősík egyenlete az $(1,1)$ pontban:

$$0=1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)-(z-2\ln(2))=x+y-z+2\ln(2)-2=$$
$$=x+y-z+2\ln(2)-2\ln(e)=x+y-z+2\ln\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$S:\qquad x+y-z+2\ln\left(\frac{2}{e}\right)=0$$

2. **Feladat:** Vizsgáljuk meg, hogy a következő kétváltozós függvény $(0,1)$-beli érintősíkja illeszkedik-e $Q(2,3,2)$ pontra, ha:

$$f(x,y) = \frac{x}{x+\sqrt{y}}$$

Megoldás: Először írjuk fel az érintősík egyenletét.

$$f(0,1) = \frac{0}{0+\sqrt{1}} = 0$$

A deriváltak hányadosfüggyvényre vonatkzó deriválási szabály szerint:

$$f'_x(x,y) = \frac{1(x+\sqrt{y}) - x \cdot 1}{(x+\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{y}}{(x+\sqrt{y})^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{0 - x\frac{1}{2\sqrt{y}}}{(x+\sqrt{y})^2} = -\frac{x}{2\sqrt{y}(x+\sqrt{y})^2}$$

A helyettesítési értékek:

$$f'_x(1,1) = \frac{1}{(0+1)^2} = 1$$

$$f'_y(1,1) = -\frac{0}{2(0+1)^2} = 0$$

Az érintési pont és a normálvektor koordinátái:

$$P(0,1,0) \qquad \mathbf{n} = (1,0,-1)$$

Az érintősík egyenlete:

$$1(x-0) + 0(y-1) - 1(z-0) = 0$$

Rendezve:

$$S: \qquad x - z = 0$$

A $Q(2,3,2)$ pont koordinátáit behelyettesítve a sík egyenletébe:

$$2 - 2 = 0$$

A Q pont teljesíti az egyenlőséget, így illeszkedik az érintősíkra.

3. **Feladat:** Írjuk fel a következő kétváltozós függvény $(2,1)$-beli linearizáltjának egyenletét:

$$f(x,y) = (x^2 - 3y)^2$$

Megoldás: Egy kétváltozós függvény linearizáltja és érintősíkja között mindössze annyi különbség van, hogy a linearizáltat z-re rendezve adjuk meg, és mint egy kétváltozós függvényt tekintjük:

$$z = g_{f(x_0,y_0)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Először kezdjük a $(2,1)$ ponthoz tartozó helyettesítési érték kiszámolásával:

$$f(2,1) = (2^2 - 3\cdot 1)^2 = 1$$

Majd számítsuk ki a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = 2(x^2-3y)\cdot 2x$$

$$f'_y(x,y) = 2(x^2-3y)\cdot(-3)$$

Ezek alapján

$$f'_x(2,1) = 2\cdot(2^2-3\cdot 1)\cdot 2\cdot 2 = 8$$

$$f'_y(2,1) = 2(2^2-3\cdot 1)\cdot(-3) = -6$$

Így a linearizált:

$$g_{f(2,1)}(x,y) = 1 + 8\cdot(x-2) + (-6)\cdot(y-1) = 8x - 6y - 9$$

4. **Feladat:** Számítsuk ki $f(1.1\,,\,2.1)$ közelítő értékét egy megfelelő linearizált segítségével, ha

$$f(x,y) = \sqrt{xy - x + 3}$$

Megoldás: Ahhoz, hogy a linearizált jól közelítse a becsült értéket, annak kell teljesülnie, hogy az a pont, ami körül a linearizálást végezzük, ne legyen „túl messze" a vizsgált ponttól. Minél kisebb a távolság a linearizáláshoz használt pont és a vizsgált pont között, annál nagyobb pontossággal kapjuk meg a keresett eredményt. A linearizáláshoz ezen kívül érdemes olyan pontot választani, ahol a helyettesítési érték, és a deriváltak pontosan számíthatóak, hogy kerekítésből adódó pontatlanság ne terhelje a becsült értéket. Ennek a két feltételnek a jelen feladatban az $(1,2)$ pont felel meg leginkább, hiszen ez egyrészt „közel van" $(1.1\,,\,1.2)$-hez, valamint a helyettesítési érték számítása is egyszerű:

$$f(1,2) = \sqrt{1\cdot 2 - 1 + 3} = 2$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy-x+3}}\cdot(y-1)$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{xy-x+3}} \cdot x$$

Ezek alapján

$$f'_x(1,2) = \frac{1}{2\sqrt{1\cdot 2-1+3}} \cdot (2-1) = \frac{1}{4}$$

$$f'_y(1,2) = \frac{1}{2\sqrt{1\cdot 2-1+3}} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Tehát a linearizált egyenlete:

$$g_{f(1,2)}(x,y) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-2) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{5}{4}$$

Ekkor$f(1.1, 2.1)$ közelítő értéke:

$$f(1.1, 2.1) \approx g_{f(1,2)}(1.1, 2.2) = \frac{1.1}{4} + \frac{2.1}{4} + \frac{5}{4} = 2.05$$

Ha számológéppel kiszámoljuk a kifejezés értékét, arra 2.05182...-ot kapunk. Ezzel az egyszerű közelítéssel tehát két tizedesjegy pontossággal határoztuk meg egy gyökös kifejezés értékét úgy, hogy csak négyzetszámból kellett gyököt vonnunk hozzá.

5. **Feladat:** Számítsuk ki a következő implicit alakban megadott függvény érintősíkját az $(x=-2, y=2, z=0)$ helyen:

$$z = x^3 + x^2ye^{2z}$$

Megoldás: Ez a függvény olyan alakú, hogy belőle z explicit alakban nem fejezhető ki. Ez azt jelenti, hogy nem használhatjuk az előző feladatokból ismert képletet.

Implicit függvények érintősíkját a következő, általánosabb érvényű képletből számolhatjuk. Ha az implicit egyenletünket $F(x,y,z)=0$ alakra hozzuk, akkor az érintősík egyenlete:

$$0 = F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)$$

Könnyen belátható, hogy ez tartalmazza az eddig explicit függvényekre használt képletet. Ha ugyanis egy explicit $z=f(x,y)$ függvényt $F(x,y,z) = f(x,y)-z=0$ alakban írunk fel, akkor az előbbi képletbe behelyettesítve visszakapjuk az eddig használt érintősík-képletet.

Tehát három parciális deriváltat kell kiszámolnunk:

$$F(x,y,z) = x^3 + x^2ye^{2z} - z = 0$$

$$F'_x(x,y,z) = 3x^2 + 2xye^{2z}$$
$$F'_y(x,y,z) = x^2e^{2z}$$
$$F'_z(x,y,z) = 2x^2ye^{2z} - 1$$

Ez alapján:

$$F'_x(-2,2,0) = 3(-2)^2 + 2(-2)(2)e^{2\cdot 0} = 4$$
$$F'_y(-2,2,0) = (-2)^2e^{2\cdot 0} = 4$$
$$F'_z(-2,2,0) = 2(-2)^2 \cdot 2 \cdot e^{2\cdot 0} - 1 = 15$$

Így az érintősík egyenlete:

$$0 = 4(x-(-2)) + 4(y-2) + 15(z-0)$$
$$S: \qquad 4x + 4y + 15z = 0$$

4.7. Gradiens

4.7.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ függvény gradiensét a $(-1,2)$ pontban.

   Megoldás: Legyen $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ függvény (x,y) pontban differenciálható, ekkor (x,y) pontjához tartozó gradiense:

$$\nabla f(x,y) = \text{grad } f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)$$

   Első lépésként ki kell számolnunk a parciális deriváltakat, utána pedig be kell helyettesítenünk a megadott pont koordinátáit.

   Az x szerinti parciális derivált:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y$$

   Az y szerinti:

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + 2y$$

   így tehát f gradiense (x,y) pontban:

$$\nabla f(x,y) = \text{grad } f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) =$$
$$= (2x+y\,,\,x+2y)$$

Mivel mi a gradiens $(-1,2)$-ben felvett értékére vagyunk kíváncsiak, így határozzuk meg a parciális deriváltak helyettesítési értékeit:

$$f'_x(-1,2) = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(-1,2)} = 2\cdot(-1)+2 = 0$$

$$f'_y(-1,2) = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(-1,2)} =, -1+2\cdot 2 = 3$$

$$\nabla f(-1,2) = \text{grad } f(-1,2) = (0,3)$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}$ függvény gradiensét a $(2,5,3)$ pontban.

Megoldás: Egy $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ háromváltozós függvény gradiense egy (x,y,z) pontban:

$$\nabla f(x,y,z) = \text{grad } f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

Az x szerinti parciális deriváláshoz írjuk át a függvényt a következő alakra.

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{z} = x\frac{y}{z}$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 1\cdot\frac{y}{z}$$

Az y szerintihez pedig:

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{z} = y\frac{x}{z}$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 1\cdot\frac{x}{z}$$

És a z szerinti:

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{z} = (xy)z^{-1}$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = xy(-1\cdot z^{-2}) = -\frac{xy}{z^2}$$

így

$$\nabla f(x,y,z) = \text{grad } f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) =$$
$$= \left(\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, -\frac{xy}{z}\right)$$

Tehát

$$\nabla f(2,5,3) = \text{grad } f(2,5,3) =$$
$$= \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2\cdot 5}{3^2}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{10}{9}\right)$$

4.7.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x \cdot \ln(x+y)$ kétváltozós függvény gradiensét a $(3,-2)$ pontban.

   Megoldás: Egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény gradiense az (x,y) pontban tudjuk, hogy

   $$\nabla f(x,y) = \text{grad } f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

   Első lépésként ki kell számolnunk a parciális deriváltakat, utána pedig be kell helyettesítenünk a megadott pont koordinátáit.

   Az x szerinti parciális derivált:

   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot \ln(x+y) + x \cdot \frac{\partial \ln(x+y)}{\partial x} = \ln(x+y) + \frac{x}{x+y}$$

   És az y szerinti:

   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial \ln(x+y)}{\partial y} = \frac{x}{x+y}$$

   így tehát

   $$\nabla f(x,y) = \text{grad } f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) =$$

   $$= \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}, \frac{x}{x+y}\right)$$

   A gradiens $(3,-2)$-ben felvett értéke:

   $$\nabla f(3,-2) = \text{grad } f(3,-2) =$$

   $$= \left(\ln(3-2) + \frac{3}{3-2}, \frac{3}{3-2}\right) = (3,3)$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ függvény gradiensét a $(3,4,-1)$ pontban.

   Megoldás: Tudjuk, hogy

   $$\nabla f(x,y,z) = \text{grad } f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

   Az x szerinti parciális derivált:

   $$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

Az y szerinti:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}$$

És a z szerinti:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

így

$$\nabla f(x,y,z) = \text{grad } f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z) = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^2} \qquad \text{ha} \qquad \mathbf{x} = (x,y,z)$$

Tehát

$$\nabla f(3,4,-1) = \text{grad } f(3,4,-1) =$$
$$= \left(\frac{3}{26}, \frac{4}{26}, -\frac{1}{26} \right) = \frac{1}{26}(3,4,-1)$$

3. **Feladat:** Általánosítsuk az elöző feladatot. Legyen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x) := \ln ||\mathbf{x}|| = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$. Számítsuk ki a gradiensvektort.

Megoldás: Adjuk meg a parciális deriváltakat. Az elöző feladat alapján az x_i szerinti parciális derivált

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} 2x_i = \frac{x_i}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Tehát az $f(\mathbf{x})$ fügvény gradiens vektora:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}(x_1, x_2 \cdot \cdot x_n) = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^2}$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg az

$$f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R},\ f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

függvény gradiensét.

Megoldás:

Számoljuk ki először az x szerinti parciális deriváltat:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

Természetesen az y és z szerinti deriválás eredménye csak annyiban különbözik az előbbitől, hogy a számlálóban y, illetve z fog állni:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{-y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{-z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

Így f gradiense:

$$\nabla f(x,y,z) = \text{grad } f(x,y,z) = -\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}(x,y,z)$$

Megjegyzés: Ha gömbi koordinátarendszerre áttérünk, a probléma a következő alakot ölti:

$$f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{||\mathbf{r}||},$$

ahol $\mathbf{r}$ jelenti az (x,y,z) pontba mutató vektort, és $||\mathbf{r}||$ ennek a vektornak a hossza, vagyis $||\mathbf{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Tehát ennek a függvénynek a helyettesítési értéke csak az origótól való távolságtól függ! A fizikában az ilyen alakú függvényeket például a ponttöltés elektromos potenciáljának leírására használják.

Ha a végeredményt megint csak polárkoordinátákban írjuk fel, akkor azt kapjuk, hogy

$$\nabla f(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{||\mathbf{r}||^3}\mathbf{r} = -\frac{||\mathbf{r}||}{||\mathbf{r}||^3}\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{||\mathbf{r}||^2}$$

ahol $\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}$ az $\mathbf{r}$ irányú egységvektor. Vagyis ennek a függvénynek a gradiensvektora a tér minden pontjában sugárirányba befelé, az origó felé mutat. Épp ez a tulajdonsága teremt lehetőséget arra, hogy a ponttöltés terét leírjuk a segítségével.

5. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \text{arctg}\,\left(\frac{y}{x}\right) \quad x \neq 0$ függvény gradiensét.

Megoldás: Az x szerinti parciális derivált:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot -\frac{y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

És az y szerinti:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

így tehát

$$\nabla f(x,y) = \text{grad } f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

4.8. Iránymenti derivált

4.8.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = 2xy^2 - y$ függvény $\mathbf{u} = (1,2)$ irányú iránymenti deriváltját az (x,y) pontban.

Megoldás: Az $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az értelmezési tartomány P pontjában és annak valamely környezetében, akkor f függvény $\mathbf{u}$ irányú iránymenti deriváltja a P pontban :

$$f'_{\mathbf{u}}(P) = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right|_P = \langle \text{grad } f(P)\, , \, \hat{\mathbf{u}} \rangle \qquad \text{ha} \qquad ||\hat{\mathbf{u}}|| = 1$$

Ebben az esetben, ha f egy kétváltozós függvény, akkor

$$f'_{\mathbf{u}}(x,y) = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(x,y)} = \langle \text{grad } f(x,y)\, , \, \hat{\mathbf{u}} \rangle \qquad \text{ha} \qquad ||\hat{\mathbf{u}}|| = 1$$

Az iránymenti derivált kiszámításához szükségünk van a függvény gradiensére és kell még egy irányt megadó egységvektor. A mi esetünkben az irány egy vektor formájában van megadva, de ez nem egységnyi hosszú. Ahhoz, hogy ebből egységvektort csináljunk, le kell osztanunk a vektor hosszának a négyzetgyökével :

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

Az így kapott $\hat{\mathbf{u}}$ vektort szokás az $\mathbf{u}$ vektor *normáltjának* nevezni.

Természetesen szükségünk lesz még a gradiensre. Számoljuk ki először az x szerinti parciális deriváltat:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2y^2$$

Az y szerinti parciális derivált:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4xy - 1$$

Így az iránymenti derivált:

$$f'_{\mathbf{u}}(x,y) = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(x,y)} = \langle \text{grad } f(x,y), \hat{\mathbf{u}} \rangle =$$

$$= \langle (2y^2\,,\, 4xy-1)\,,\, \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2y^2 + 2(4xy-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2y^2 + 8xy - 2\right]$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = 2xy^2 - y$ függvény $\mathbf{u} = (1,2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,-1)$ pontban.

Megoldás: Az előbbi eredményt felhasználva:

$$f'_{\mathbf{u}}(1,-1) = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(1,2)} = \left.\langle \text{grad } f, \hat{\mathbf{u}} \rangle\right|_{(1,-1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(2-8-2) = -\frac{8}{\sqrt{5}}$$

3. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = xe^y - ye^x$ függvény $\mathbf{u} = (-5,2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(0,0)$ pontban.

Megoldás: A megoldás menete ugyan az, mint az előző feladatban. Először elkészítjük a normált irányvektort:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{1}{\sqrt{(-5)^2 + 2^2}}(-5,2) = \frac{1}{\sqrt{29}}(-5,2)$$

A parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^y - ye^x$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^y - e^x$$

Helyettesítsünk be a parciális derivált függvényekbe:

$$f'_x(0,0) = e^0 - 0 \cdot e^0 = 1$$

$$f'_y(0,0) = 0 \cdot e^0 - e^0 = -1$$

Tehát az iránymenti derivált:

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{u}}(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\bigg|_{(1,2)} = \langle \text{grad } f(0,0), \hat{\mathbf{u}} \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{29}} \langle (1,-1), (-5,2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{29}}(-5-2) = -\frac{7}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

4.8.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$, $f(x,y,z) = (xy)^z$ függvény $\mathbf{u} = (1,-1,1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(3,1,2)$ pontban.

   Megoldás: Adjuk meg először a normált egységvektort.

   $$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}}(1,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$$

   A gradiensvektor kiszámításához képezzük a parciális deriváltakat. Az x és y szerinti deriválásoknál a változó az alapban lesz, így hatványfüggvényként végezzük el a deriválást.

   $$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = f'_x(x,y,z) = z(xy)^{z-1}y = zy^z x^{z-1}$$

   $$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = f'_y(x,y,z) = z(xy)^{z-1}x = zx^z y^{z-1}$$

   A z szerinti parciális deriválásnál a változó a kitevőben van, ezért exponenciális függvényként kell deriválni.

   $$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = f'_z(x,y,z) = (xy)^z \ln(xy)$$

   A helyettesítési értékek:

   $$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\bigg|_{(3,1,2)} = f'_x(3,1,2) = 2 \cdot 1^2 3^1 = 6$$

   $$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\bigg|_{(3,1,2)} = f'_y(3,1,2) = 2 \cdot 3^2 1^1 = 18$$

   $$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\bigg|_{(3,1,2)} = f'_z(3,1,2) = (3)^2 \ln 3 = 9 \ln 3$$

   A gradiensvektor

   $$\text{grad } f(3,1,2) = (6, 18, 9\ln 3)$$

Az iránymenti derivált:

$$
\begin{aligned}
f'_{\mathbf{u}}(3,1,2) &= \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(3,1,2)} = \langle \text{grad } f(3,1,2), \hat{\mathbf{u}} \rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \langle (6, 18, 9\ln 3)\,,\, (1,-1,1) \rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(6 - 18 + 9\ln 3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(9\ln 3 - 12)
\end{aligned}
$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg az $f(x,y) = 2x^3y^2$ függvény iránymenti deriváltját az $(1,1)$ pontban, az $y = 2x+1$ egyenletű egyenessel párhuzamos irányokban.

Megoldás: Ebben a feladatban nem egy vektorral van megadva az irány, hanem egy egyenes egyenletével. Ennek az egyenletnek a felhasználásával kell nekünk megkonstruálnunk egy olyan egységvektort, ami párhuzamos ezzel az egyenessel. Erre a legegyszerűbb módszer az, ha veszünk két olyan pontot az egyenesről és az egyik pontból vektort indítunk a másikba.

Ha $x = 0$, akkor az egyenlet alapján $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, tehát a $P(0,1)$ pont rajta van az egyenesen.

Ha $x = 1$, akkor az egyenlet alapján $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, tehát a $Q(1,3)$ pont szintén rajta van az egyenesen.

Tehát egy jó irányvektor lesz például az $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = (1,2)$ vektor. Ha ennek a pozitív skalárszorosát választjuk, az nem jelent változást, mert ezt a vektort még úgyis normálnunk kell. Ha azonban megszorozzuk (-1)-el, akkor egy ellentétes irányú vektort kapunk, az iránymenti derivált pedig érzékeny a vektor irányítására. Tehát iránymenti deriváltat $(-1,-2)$ segítségével is számolhatunk.

Határozzuk meg a $(1,2)$ irányú iránymenti deriváltat:

$$
\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)
$$

A parciális deriváltak:

$$
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x^2y^2
$$

$$
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4x^3y
$$

és így

$$
\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 6
$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 4$$

Tehát az iránymenti derivált az (1,2) irányban:

$$f'_{\mathbf{u}}(1,1) = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right|_{(1,1)} = \langle \text{grad } f(1,1), \hat{\mathbf{u}}\rangle =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\langle(6,4),(1,2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(6+8) = \frac{14}{\sqrt{5}}$$

Ha most $-\mathbf{u} = (-1,-2)$ irányba számoljuk ki az iránymenti deriváltat, mindössze annyi változik, hogy a végeredmény előjele megfordul, vagyis

$$f'_{-\mathbf{u}}(1,1) = -f'_{\mathbf{u}}(1,1)$$

Tehát az iránymenti derivált, ha csak egy egyenest adunk meg irányként, egy előjel erejéig határozatlan.

4.9. Szélsőérték-keresés

4.9.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Határozzuk meg az

$$f: \quad \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x,y) = 2xy + 2x^2 + 4y^2 + 6$$

függvény lokális szélsőértékeit.

Megoldás: Első lépésként meg kell keresnünk a stacionárius pontokat, vagyis azokat a helyeket, ahol szélsőértéke lehet a függvénynek. Ezeket az

$$f'_x(x,y) = 0$$
$$f'_y(x,y) = 0$$

egyenletekből kaphatjuk meg.

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2y + 4x = 0$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 8y = 0$$

Kaptunk egy egyenletrendszert, aminek a megoldásai az f függvény stacionárius pontjai. Jelen esetben a második egyenletet megszorozzuk kettővel, és kivonjuk az elsőből:

$$2y - 16y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

Tehát egyetlen potenciális szélsőérték helyünk van, az origó.

Annak eldöntése érdekében, hogy milyen stacionárius pontot találtuk, fel kell írnunk a függvény Hesse mátrixát.

Legyen P_0 pont az $f: \quad \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény stacionárius pontja.

(a) Ha P_0 pontban a Hesse mátrix definit, akkor P_0 pontban van szélsőérték.

(b) Ha P_0 pontban a Hesse mátrix indefinit, akkorP_0 pontban nincs szélsőérték.

(c) Ha P_0 pontban a Hesse mátrix pozitív definit, akkor P_0- ban minimumhely van

(d) Ha P_0 pontban a Hesse mátrix negatív definit, akkor P_0- ban maximumhely van.

Vizsgáljuk meg, hogy $(0,0)$ pontban vajon milyen definit a Hesse mátrix.

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$$

Ehhez ki kell számolnunk a másodrendű parciális deriváltakat. Mivel egy polinomokból álló függvény másodrendű parciális deriváltjai mindig folytonosak, a Young-tétel miatt $f''_{xy} = f''_{yx}$, tehát a kettő közül csak az egyiket kell kiszámolni.

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2y + 4x) = 4$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 8y) = 2$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 8y) = 8$$

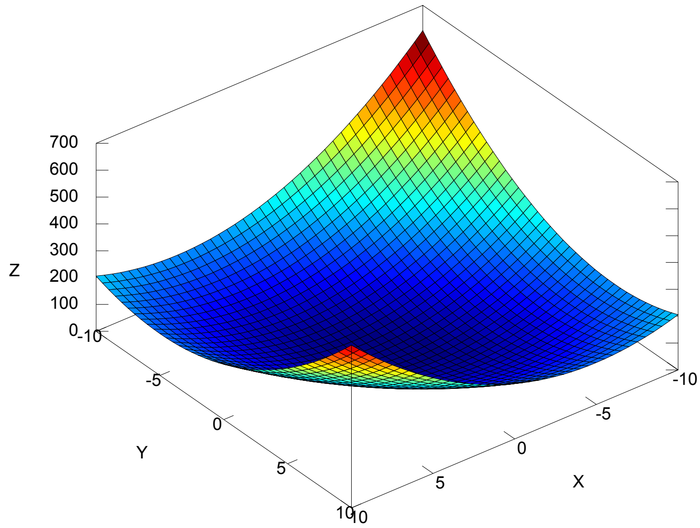
Tehát a Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 28 > 0,$$

tehát az origó valóban szélsőérték hely. Mivel a Hesse mátrix spurja $\mathrm{sp}(D^2 f(0,0)) = 4 + 8 = 12 > 0$, így a Hesse-mátrix pozitív definit, vagyis az origó egy lokális minimumhely. Mivel nincsen több szélsőérték-helye a függvénynek, így abszolút minimum is egyben. A függvény értéke az origóban:

$$f(0,0) = 6$$

A függvény grafikonja a szélsőérték közelében:



2. **Feladat:** Keressük meg a következő kétváltozós függvény lokális szélsőérték helyeit:

$$f: \quad \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x,y) = xy - x^3 - y^2$$

Megoldás: Ugyanazt az utat követjük, mint az előző feladatban. Először a stacionárius pontok megkeresésével kezdjük:

$$f'_x(x,y) = y - 3x^2 = 0$$

$$f'_y(x,y) = x - 2y = 0$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldanunk. Fejezzük ki valamelyik változót az egyik egyenletből, és helyettesítsük be a másikba:

$$y = 3x^2 \Rightarrow x - 2(3x^2) = 0 \Rightarrow x(1-6x) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így két megoldást kapunk:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{6}$$

Ebből két stacionárius pontot kapunk:

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{6} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{12}$$

Most meg kell vizsgálnunk, hogy ezen stacionárius pontok valóban szélsőérték helyek-e. Ehhez ismét szükségünk lesz a másodrendű parciális deriváltakra. Mivel ismét hatványfüggvénnyel van dolgunk, a Young-tétel most is érvényes lesz.

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(y - 3x^2) = -6x$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x - 2y) = 1$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x - 2y) = -2$$

Vizsgáljuk meg először a $(0,0)$ pontot. Az ehhez tartozó Hesse mátrix:

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A Hesse- determináns:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(0,0) & f''_{xy}(0,0) \\ f''_{yx}(0,0) & f''_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -1 < 0,$$

Ez azt jelenti, hogy ez a Hesse-mátrix indefinit, vagyis a $(0,0)$ pont nem lokális szélsőérték hely.

Most vizsgáljuk meg a $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ pontot:

$$D^2 f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

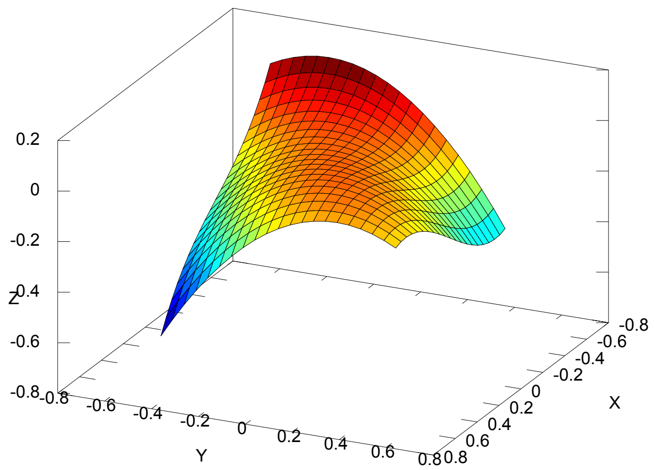
A Hesse- determináns:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 1 > 0,$$

Mivel $\mathrm{sp}(D^2 f((\frac{1}{6}, \frac{1}{12})) = -3 < 0$, így ez a Hesse-mátrix negatív definit, ami azt jelenti, hogy ez a pont lokális maximumhely.

Ebben a pontban a függvény értéke:

$$f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{432}$$



3. **Feladat:** Keressük meg a következő kétváltozós függvény lokális szélsőérték helyeit:

$$f: \quad \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$$

Megoldás: A feladat megoldását kezdjük az értelmezési tartomány megadásával. A függvény nincs értelmezve az osztás miatt olyan pontokban, ahol $x = 0$ vagy $y = 0$. Tehát az értelmezési tartomány az XY sík, kivéve a koordinátatengelyeket.

A stacionárius pontokat megadó egyenletek:

$$f'_x(x,y) = 2x - \frac{2}{x^2y} = 0$$

$$f'_y(x,y) = 2y - \frac{2}{xy^2} = 0$$

Fejezzük ki például az első egyenletből y-t:

$$y = \frac{1}{x^3}$$

Ezt írjuk be a második egyenletbe:

$$\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x\frac{1}{x^6}} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} - 2x^5 = 0$$

Rendezve kapjuk, hogy

$$1 = x^8 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Tehát két stacionárius pontot találtunk: (1,1), (-1,-1). Mivel mind a kettő eleme az értelmezési tartománynak, így tovább folytathatjuk a vizsgálódást.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x - \frac{2}{x^2 y}) = 2 + \frac{4}{x^3 y}$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y - \frac{2}{xy^2}\right) = \frac{2}{x^2 y^2}$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y - \frac{2}{xy^2}\right) = 2 + \frac{4}{xy^3}$$

Az $(1,1)$ ponthoz tartozó Hesse mátrix:

$$D^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(1,1) & f''_{xy}(1,1) \\ f''_{yx}(1,1) & f''_{yy}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

A Hesse determináns:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 4 = 32 > 0,$$

Mivel $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$, vagyis a minormátrixok pozitívak, így a Hesse mátrix pozitív definit. Ez pedig azt jelenti, hogy a függvénynek ebben a pontban lokális minimumhelye van.

A $(-1,-1)$-hez tartozó Hesse mátrix:

$$D^2 f(-1,-1) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(-1,-1) & f''_{xy}(-1,-1) \\ f''_{yx}(-1,-1) & f''_{yy}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

A $(-1,-1)$-hez tartozó Hesse determináns:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 4 = 32 > 0,$$

A függvénynek tehát $(-1,-1)$-ben is lokális minimumhelye van, mivel $\det(D^2 f(-1,-1)) > 0$ és $f''_{xx}(-1,-1) = 6 > 0$. A függvény helyettesítési értéke mindkét pontban megegyezik:

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 4$$

4.9.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Keressük meg az alábbi függvény lokális szélsőérték helyeit:

$$f: \quad \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$$

Megoldás: Az $f(x,y)$ függvény ebben a feladatban is folytonos második deriváltakkal rendelkezik, és értelmezési tartománya a teljes sík, így szélsőértéke csak a stacionárius pontokban lehet. A stacionárius pontokat meghatározó egyenletek:

$$f'_x(x,y) = 8xe^y - 8x^3 = 0$$

$$f'_y(x,y) = 4x^2e^y - 4e^{4y} = 0$$

Most is kaptunk egy egyenletrendszert. Alakítsuk szorzattá az első egyenletet.

$$8xe^y - 8x^3 = 8x(xe^y - x^2) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Ha az $x = 0$, akkor ezt a második egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$-4e^{4y} = 0$$

Ez azonban nem teljesülhet semmilyen y-ra, így x biztosan nem lehet 0.

Nézzük a másik esetet, ha

$$e^y - x^2 = 0 \Rightarrow e^y = x^2$$

Behelyettesítve a második egyenlet a következő alakot ölti:

$$4x^4 - 4(x^2)^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

Ha

$$x = \pm 1, \qquad e^y = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = 0$$

Tehát két stacionárius pontot találtunk: $(1,0), (-1,0)$. A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(8xe^y - 8x^3) = 8e^y - 24x^2$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2e^y - 4e^{4y}) = 8xe^y$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2e^y - 4e^{4y}) = 4x^2e^y - 16e^{4y}$$

A $(1,0)$ ponthoz tartozó Hesse mátrix:

$$D^2f(1,0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(1,0) & f''_{xy}(1,0) \\ f''_{yx}(1,0) & f''_{yy}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

A $(1,0)$ ponthoz tartozó Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} -16 & 8 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} = 192 - 64 = 128 > 0$$

Mivel $\det(D^2f(1,0)) > 0$ és $f''_{xx}(1,0) = -16 < 0$, így a Hesse-mátrix negatív definit, tehát ebben a pontban a függvénynek maximuma van.

Hasonlóan a $(-1,0)$ pontra:

$$D^2f(-1,0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(-1,0) & f''_{xy}(-1,0) \\ f''_{yx}(-1,0) & f''_{yy}(-1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -12 \end{vmatrix} = 192 - 64 = 128 > 0$$

Mivel $\det(D^2f(-1,0)) > 0$ és $f''_{xx}(-1,0) = -16 < 0$, ezért $(-1,0)$ pont is lokális maximumhelye a függvények. A helyettesítési érték mindkét esetben:

$$f(-1,0) = f(1,0) = 1$$

2. **Feladat:** Határozzuk meg a következő háromváltozós függvény szélsőértékeit:

$$f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R},\ f(x,y,z) = 2x^2 - 4xy + 4z + 6y^2 + 2z^2$$

Megoldás: Háromváltozós függvény esetén sincs lényeges változás a megoldás menetében. Most is meg kell keresünk a stacionárius pontokat, és meg kell állapítanunk, hogy az így talált pontok milyen szélsőértéket jelentenek.

A stacionárius pontokat meghatározó egyenletek:

$$f'_x(x,y,z) = 4x - 4y = 0$$

$$f'_y(x,y,z) = -4x + 12y = 0$$

$$f'_z(x,y,z) = 4 + 4z = 0$$

Az utolsó egyenletből azonnal adódik a $z = -1$ feltétel, míg az első két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$8y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Tehát az egyetlen stacionárius pont a $(0, 0, -1)$ pont. Készítsük el az ehhez a ponthoz tartozó Hesse-mátrixot. Ehhez szükségünk lesz a másodrendű parciális deriváltakra, amikből a Young-tétel miatt 6 darab különböző van.

$$f''_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(4x - 4y) = 4$$

$$f''_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}(4x - 4y) = -4$$

$$f''_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}(4x - 4y) = 0$$

$$f''_{yy}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(-4x + 12y) = 12$$

$$f_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}(-4x + 12y) = 0$$

$$f''_{zz}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}(4 + 4z) = 4$$

Így a Hesse-mátrix:

$$D^2 f(0, 0, -1) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0, 0, -1) & f''_{xy}(0, 0, -1) & f''_{xz}(0, 0, -1) \\ f''_{yx}(0, 0, -1) & f''_{yy}(0, 0, -1) & f''_{yz}(0, 0, -1) \\ f''_{zx}(0, 0, -1) & f''_{zy}(0, 0, -1) & f''_{zz}(0, 0, -1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy a stacionárius pont típusát megállapítsuk, erről a 3×3-as mátrixról azt kell eldönteni, hogy pozitív definit, negatív definit, indefinit, vagy szemidefinit. Ennek egyik módja az, hogy a bal felső minormátrixok determinánsait vizsgáljuk. Ekkor azt mondhatjuk, hogy

- Ha az egymást követő minormátrixok mind pozitívak, akkor a mátrix pozitív definit. Ekkor az adott mátrixhoz tartozó pont egy lokális minimum hely.
- Ha az egymást követő minormátrixok váltakozó előjelűek úgy, hogy a mátrix $(1, 1)$ eleme, vagyis a legkisebb rendű minormátrixa negatív, akkor a mátrix negatív definit. Ekkor az adott mátrixhoz tartozó pont egy lokális maximum hely.

- Ha az előzőek közül egyik kategóriába sem sorolható, de semelyik minormátrix determinánsa nem 0, akkor a mátrix indefinit. Ekkor az adott mátrixhoz tartozó pontban nincs szélsőérték.
- Ha van olyan minormátrix, amelynek a determinánsa 0, akkor a mátrix szemidefinit. Ekkor nem tudjuk megmondani, hogy milyen típusú a szélsőérték.

A mi esetünkben:

$$\det\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} = 4$$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = 48 - 16 = 32 > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot 32 = 128 > 0$$

Tehát a minormátrixok pozitívak, a Hesse-mátrix pozitív definit, vagyis a $(0, 0, -1)$ pont egy lokális minimuma a függvénynek.

3. **Feladat:** Három pozitív szám összege 12. Legfeljebb mekkora lehet a szorzatuk?

Megoldás: A feladat matematikai megfogalmazása a következő:

$$\max xyz = ? \quad \text{feltéve, hogy} \;\; x + y + z = 12 \;\; \text{és} \;\; x, y, z > 0$$

Ez a feltételes szélsőérték tipikus esete. A feltételes szélsőérték számolást tartalmazó feladatokat azonban legtöbbször vissza lehet vezetni feltétel nélküli szélsőérték-keresésre. Most ezt az utat fogjuk követni.

Az, hogy a három szám összege 12-t kell, hogy adjon, egy megszorítást ad meg a 3 változó között, emiatt csak kettő független lesz közülük. Ezt úgy tudjuk kihasználni a szélsőérték-keresésnél, hogy a feltételt jelentő egyenletből kifejezzük az egyik változót, és beírjuk a kérdéses kifejezés helyére:

$$z = 12 - x - y \Rightarrow xyz = xy(12 - x - y) = 12xy - x^2y - xy^2$$

Legyen

$$f(x, y) = 12xy - x^2y - xy^2 \qquad \text{és} \qquad x, y > 0$$

Most már egy kétváltozós függvénynek kell megkeresni a szélsőértékeit. Az első lépés most is a stacionárius pontok meghatározása:

$$f'_x(x, y) = 12y - 2xy - y^2 = 0$$

$$f'_y(x, y) = 12x - x^2 - 2xy = 0$$

Vizsgáljuk meg először külön-külön a két egyenletet. Az elsőt az $y = 0$, a másodikat az $x = 0$ választás kielégíti. Azonban a feladat kikötötte, hogy három pozitív számról van szó, így egyik változó se lehet 0. Emiatt az első egyenletet leoszthatjuk y-al, a másodikat pedig x-el:

$$12 - 2x - y = 0$$

$$12 - x - 2y = 0$$

Ez már egy lineáris egyenletrendszer, amit könnyűszerrel megoldhatunk. Szorozzuk be 2-vel az második egyenletet, és vonjuk ki az elsőből:

$$-12 + 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 4 \quad \Rightarrow \quad x = z = 4$$

Tehát az egyetlen stacionárius pont a $(4, 4)$ pont, ha a kétváltozós függvény feltétel nélküli szélsőértékét tekintjük.

Meg kell még határoznunk, hogy minimumot, vagy maximumot találtunk-e. Ehhez szükségünk lesz a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(12y - 2xy - y^2) = -2y$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(12y - 2xy - y^2) = 12 - 2x - 2y$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(12x - x^2 - 2xy) = -2x$$

Így a $(4, 4)$ pont Hesse-determinánsa:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(4,4) & f''_{xy}(4,4) \\ f''_{yx}(4,4) & f''_{yy}(4,4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 64 - 16 = 48 > 0,$$

tehát a függvények szélsőértéke van ebben a pontban, s mivel $f''_{xx}(4, 4) = -8 < 0$, így az egy lokális maximum.

A három szám szorzata tehát akkor lesz maximális, ha $x = y = z = 4$, és ekkor a szorzat értéke 64, és ez a feladat egyetlen szélsőértéke.

Megjegyzés: Figyeljük meg, hogy az xyz kifejezés értéke közben alulról is korlátos: mivel pozitív számokat szorzunk össze, biztosan nem lehet kisebb a szorzatuk, mint 0. 0-t azonban csak akkor vehetne fel a kifejezés, ha valamelyik változó 0-vá válna, ezt azonban a feladat szövege nem engedi meg. Ennek következménye, hogy a kifejezés értéke tetszőlegesen megközelítheti a 0-t, de el nem érheti; emiatt csak a $(4, 4, 4)$ koordinátájú szélsőérték hely létezik. Ha a feladat szövegében megengednénk, hogy a változók 0 értéket is felvegyenek, akkor minden olyan pont, amelynek valamely koordinátája 0, minimumhely lenne.

4. **Feladat:** Tekintsük a $3x+2y+z-14=0$ egyenletű síkot, és határozzuk meg a síknak az origóhoz legközelebb eső pontját.

Megoldás: A feladatban megadott sík az $g(x,y)=14-3x-2y$ függvény grafikonja, 3 dimenziós derékszögű koordinátarendszerben ábrázolva. Azok a pontok esnek erre a síkra, amelyek koordinátája:

$$(x,y,14-3x-2y)$$

Egy pont origótól való távolságát a pontba húzott helyvektor hossza adja meg:

$$d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+(14-3x-2y)^2}$$

A kérdés az, hogy mely $(x,y,z(x,y))$ pontra lesz ez a $d(x,y)$ távolság minimális. Ehhez a szokásos lépéseket kell elvégeznünk. Megkönnyíthetjük azonban a dolgunkat, ha $d(x,y)$ szélsőértékei helyett $(d(x,y))^2$ szélsőértékeit keressük. A gyökfüggvény folytonossága és szigorú monotonitása miatt mindkét kifejezés ugyan ott veszi fel a szélsőértékeit, azonban

$$(d(x,y))^2=f(x,y)=x^2+y^2+(14-3x-2y)^2$$

könnyebben deriválható.

Mint mindig, most is a stacionárius pontok keresésével kezdjük:

$$f'_x(x,y)=2x+2(14-3x-2y)\cdot(-3)=20x+12y-84=0$$

$$f'_y(x,y)=2y+2(14-3x-2y)\cdot(-2)=12x+10y-56=0$$

Szorozzuk be az első egyenletet 3-al, a másodikat 5-el, és vonjuk ki az elsőből a másodikat:

$$36y-252-(50y-280)=0$$

$$-14y+28=0 \quad \Rightarrow \quad y=2 \quad \Rightarrow \quad x=3, z=1$$

Tehát $f(x,y)$ stacionárius pontjának koordinátái $(3,2)$, az eredeti feladat stacionárius pontja pedig $(3,2,1)$. A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(20x+12y-84)=20$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(20x+12y-84)=12$$

$$f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(12x+10y-56)=10$$

Így a $(3, 2)$ pont Hesse-determinánsa:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(3,2) & f''_{xy}(3,2) \\ f''_{yx}(3,2) & f''_{yy}(3,2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = 200 - 144 = 56 > 0,$$

tehát a függvények szélsőértéke van ebben a pontban, s mivel $f''_{xx}(3,2) = 20 > 0$, ez egy lokális minimum, összhangban a várakozásainkkal.

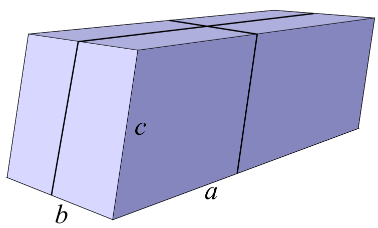
Tehát a sík origóhoz legközelebbi pontja a $(3, 2, 0)$ pont, és itt az origótól való távolság

$$d(3,2) = \sqrt{3^2 + 2^2 + (14 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

5. **Feladat:** Egy 2 méter hosszú madzaggal átkötünk egy téglatest alakú csomagot, méghozzá két irányból is. Legfeljebb mekkora lehet a csomag térfogata?

Megoldás: Egy téglatest alakú csomag egy csúcsból induló éleinek hossza legyen a, b, c, ahol c jelölje éppen a csomag magasságát. Egy ilyen csomagnak a térfogata $V = abc$.

Ha két irányból is átkötjük a csomagot, akkor a madzag hossza $2a + 2b + 4c$.



A feladat szövege szerint most $2a + 2b + 4c = 2$. Vegyük észre, ha az egyik oldalt kifejezzük a másik kettővel, akkor egy kétváltozós függvénnyel elő tudjuk állítani összes olyan csomag térfogatát, amelyek a feltételnek eleget tesznek.

Legyen $a = 1 - b - 2c$. Ekkor

$$V = abc = (1 - b - 2c)bc$$

Tehát keressük meg a

$$V(b,c) = (1 - b - 2c)bc = bc - b^2c - 2bc^2 \qquad \text{ha} \qquad b, c > 0$$

kétváltozós függvény szélsőértékét.

Határozzuk meg a stacionárius pontokat.

$$V_b'(b,c) = c - 2bc - 2c^2 = 0$$

$$V_c'(b,c) = b - b^2 - 4bc = 0$$

Mivel $b, c > 0$, az első egyenlet osszuk végig c-vel, a másodikat pedig b-vel.

Az új egyenletrendszer:

$$1 - 2b - 2c = 0$$

$$1 - b - 4c = 0$$

A második egyenlet (-2)- szeresét adjuk hozzá az elsőhöz.

$$-1 + 6c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{1}{6} \qquad \text{és} \qquad b = \frac{1}{3}$$

Tehát szélsőérték csak a $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ pontban lehet.

Nézzük meg milyen szélsőérték van a kapott pontban.

$$V_{bb}'' = -2c$$

$$V_{cc}'' = -4b$$

$$V_{bc}'' = 1 - 2b - 4c$$

A Hesse mátrix determinánsa a $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ pontban :

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$$

Tehát a Hesse mátrix definit, van szélsőérték, mivel a főátlóban lévő elemet összege, azaz a mátrix nyoma negatív, így maximumhely van a $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$ pontban.

Még a harmadik oldal hosszát és a csomag maximális térfogatát kell kiszámolni. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $a = \frac{1}{3}$.

Tehát a maximális térfogatú csomag méretei:

$$a = \frac{1}{3}m \qquad b = \frac{1}{3}m \qquad c = \frac{1}{6}m$$

Így a maximális térfogat:

$$V_{max} = abc = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{54}m^3$$

4.10. Kettős integrál

4.10.1. Alapfeladatok

1. **Feladat:** Számoljuk ki az alábbi kétszeres integrált:

$$\int_{-1}^{2}\left(\int_{0}^{1}(x+y)\,dx\right)dy\,.$$

Megoldás: A kétszeres integráloknál fontos a műveleti sorrend: mindig belülről kifelé haladunk.

Jelen esetben az x szerinti integrállal kell kezdeni:

$$\int_{0}^{1}(x+y)dx=\left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_0^1=\frac{1^2}{2}+y-\left(\frac{0}{2}+0\right)=\frac{1}{2}+y\,.$$

Az x szerinti integrálásnál y-t konstansnak tekintettük, és a határokat pedig most csak x helyére írtuk be.

Majd következik a második integrál:

$$\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}+y\right)dy=\left[\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{2}=\frac{2}{2}+\frac{2^2}{2}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^2}{2}\right)=3\,.$$

2. **Feladat:** Számítsuk ki a következő kétszeres integrált:

$$\int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{2}xy(x^2y^2-1)\,dy\right)dx\,.$$

Megoldás: Először is érdemes felbontani a zárójelet az integrandusban, mert ebben az alakban nehézkes lenne integrálni:

$$\int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{2}xy(x^2y^2-1)\,dy\right)dx=\int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{2}(x^3y^3-xy)\,dy\right)dx\,.$$

Végezzük el a belső integrálást y szerint.

$$\int_{0}^{2}(x^3y^3-xy)\,dy=\left[x^3\frac{y^4}{4}-x\frac{y^2}{2}\right]_0^2=$$

$$=x^3\frac{2^4}{4}-x\frac{2^2}{2}-(x^3\frac{0^4}{4}-x\frac{0^2}{2})=4x^3-2x\,.$$

Most következik az x szerinti integrálás.

$$\int_{1}^{3}\left(4x^3-2x\right)dx=\left[x^4-x^2\right]_1^3=3^4-3^2-(1^4-1^2)=72\,.$$

3. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi kétszeres integrált:

$$\int_0^1 \left(\int_{x-1}^{-x+1} (x-2y)\,dy \right) dx\,.$$

Megoldás: Ebben a feladatban az y szerinti integrálás határai függenek x-től.

A belső integrálással kezdjük most is:

$$\int_{x-1}^{-x+1} (x-2y)\,dy = \left[xy - y^2\right]_{x-1}^{-x+1} =$$
$$= x(-x+1) - (-x+1)^2 - \big(x(x-1) - (x-1)^2\big) =$$
$$= -x^2 + x - x^2 + 2x - 1 - \big(x^2 - x - x^2 + 2x - 1\big) =$$
$$= -2x^2 + 2x\,.$$

Folytassuk a külső integrállal:

$$\int_0^1 \big(-2x^2 + 2x\big)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}\,.$$

Tehát

$$\int_0^1 \left(\int_{x-1}^{-x+1} (x-2y)\,dy \right) dx = \frac{1}{3}\,.$$

Természetesen nem kell ennyire szétszedni az integrálokat. Az előbbi megoldás, a külső integrál jelölésével, következőképpen is megadható.

$$\int_0^1 \left(\int_{x-1}^{-x+1} (x-2y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[xy - y^2\right]_{x-1}^{-x+1} dx =$$

$$\int_0^1 \left[xy - y^2\right]_{x-1}^{-x+1} dx =$$

$$\int_0^1 \left[x(-x+1) - (-x+1)^2 - \big(x(x-1) - (x-1)^2\big)\right] dx =$$

$$\int_0^1 \left[-x^2 + x - x^2 + 2x - 1 - \big(x^2 - x - x^2 + 2x - 1\big)\right] dx =$$

$$\int_0^1 \big(-2x^2 + 2x\big)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}\,.$$

4. **Feladat:** Számítsuk ki az alábbi kétszeres integrált:

$$\int_{-1}^{2} \left(\int_{y}^{2y} \frac{x}{y}\, dx \right) dy\,.$$

Megoldás: Ismét a belső integrállal kell kezdenünk:

$$\int_{-1}^{2} \left(\int_{y}^{2y} \frac{x}{y}\, dx \right) dy = \int_{-1}^{2} \left[\frac{x^2}{2y} \right]_{y}^{2y} dy = \int_{-1}^{2} \left(2y - \frac{y}{2} \right) dy =$$

$$\left[y^2 - \frac{y^2}{4} \right]_{-1}^{2} = 4 - 1 - \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}\,.$$

5. **Feladat:** Számoljuk ki az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = xy$ függvény kettős integrálját a

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$$

téglalap alakú D tartományon.

Megoldás: A következő kettős integrált kell meghatároznunk.

$$\iint\limits_{D} xy\, dxdy\,.$$

Használjuk fel, hogy a kettős integrálás téglalaptartományon kétféleképpen is felírható:

$$\iint\limits_{D} xy\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (xy)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (xy)\, dy \right) dx\,.$$

Végezzük el a számolást mindkét alakkal.

1. megoldás:

$$\iint\limits_{D} xy\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (xy)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (xy)\, dy \right) dx\,.$$

Jelen esetben az x szerinti integrállal kell kezdeni:

$$\int_0^1 (xy) dx = \left[\frac{x^2}{2} y \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} y - \frac{0}{2} y = \frac{y}{2}\,.$$

Az x szerinti integrálásnál y-t konstansnak tekintettük, és a határokat pedig csak x helyére írtuk be.

Majd következik a második integrál:

$$\int_0^2 \frac{y}{2} dy = \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2 = \frac{2^2}{4} - 0 = 1\,.$$

Végezzük el a számolást a másik sorrendben is!

2. megoldás:

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 (xy)\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = \int_0^1 \left(x\frac{2^2}{2} - x\frac{0}{2}\right) dx =$$

$$\int_0^1 2x\, dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1^2 - 0 = 1\,.$$

Ez is ugyan azt a végeredményt adja, ahogy vártuk.

3. Megoldás:

Ha téglalap alakú tartományon az integrandus szorzat , vagyis $f(x)g(y)$ alakú, akkor alkalmazható a következő integrálási szabály:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\, dx\right) dy = \int_a^b g(y)dy \cdot \int_c^d f(x)dx$$

Alkalmazzuk a tételt erre az esetre és számoljuk ki az integrált harmadszor is:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 (xy)\, dx\right) dy = \left(\int_0^2 y\, dy\right) \cdot \left(\int_0^1 x\, dx\right) = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\,.$$

6. **Feladat:** Számoljuk ki az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = 2x - 3y$ függvény kettős integrálját a

$$-2 \leq x \leq 0, \qquad 1 \leq y \leq 2$$

téglalap alakú D tartományon.

Megoldás: A feladatunk tehát a következő kettős integrál kiszámolása:

$$\iint\limits_D (2x - 3y) dxdy\,.$$

Mivel a határok fixek, a tartomány téglalap alakú.

Ezért

$$\iint_D (2x-3y)dxdy = \int_{-2}^{0}\left(\int_{1}^{2}(2x-3y)\,dy\right)dx = \int_{1}^{2}\left(\int_{-2}^{0}(2x-3y)\,dx\right)dy\,.$$

Végezzük el a számolást a következő alakban:

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{1}^{2}(2x-3y)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{0}\left[2xy-\frac{3}{2}y^2\right]_1^2 dx =$$

$$\int_{-1}^{0}\left[4x-6-\left(2x-\frac{3}{2}\right)\right]_1^2 dx = \int_{-1}^{0}\left(2x-\frac{9}{2}\right)dx =$$

$$\left[x^2-\frac{9}{2}x\right]_{-1}^{0} = 0-\left(1+\frac{9}{2}\right) = -\frac{11}{2}\,.$$

7. **Feladat:** Számoljuk ki az $f:\mathbf{R^2}\to\mathbf{R}$, $f(x,y)=x\cos(xy)\cos^2(x\pi)$ függvény kettős integrálját a

$$D: \qquad 0\le x\le\frac{1}{2}, \qquad 0\le y\le\pi$$

tartományon.

Megoldás: Ezt a kettős integrált ismét kétféleképpen lehet felírni kétszeres integrálként, hiszen most is téglalap alakú tartományon integrálunk.

Vagy

$$\iint_D x\cos(xy)\cos^2(x\pi)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi} x\cos(xy)\cos^2(x\pi)\,dy\right)dx,$$

vagy

$$\iint_D x\cos(xy)\cos^2(x\pi)dxdy = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(xy)\cos^2(x\pi)\,dx\right)dy$$

alakban írhatjuk fel ezt a kettős integrált. Azonban kis vizsgálódás után észrevehetjük, hogy a két sorrendben nem azonos nehézségű integrálokat kell elvégezni. A második felírás esetén az x szerinti integrál elvégzése nagyon nehéz és hosszadalmas lenne, míg az első felírási módban az y szerinti integrál gond nélkül elvégezhető. Szélsőséges esetben elképzelhető, hogy egy kétszeres integrálnak nem létezik zárt alakban megadható primitív függvénye az integrálás adott sorrendje mellett, de a sorrendet felcserélve az integrálás elvégezhető.

Induljuk ki emiatt az első felírásból:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\pi} x \cos(xy) \cos^2(x\pi)\, dy \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\sin(xy) \cos^2(x\pi) \right]_0^{\pi} dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(x\pi) \cos^2(x\pi)\, dx\,,$$

hiszen $\sin(x \cdot 0) = 0$. Figyeljük meg, hogy ha az integrandust $-\pi$-vel bővítenénk, akkor $f'(x) \cdot f^2(x)$ alakú lenne, aminek az integrálja $\frac{f^3}{3}$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(x\pi) \cos^2(x\pi)\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} (-\pi \sin(x\pi)) \cos^2(x\pi)\, dx =$$

$$-\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos^3(x\pi)}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos^3(\frac{\pi}{2})}{3} - \frac{\cos^3(0)}{3} \right) = \frac{1}{3\pi}\,,$$

hiszen $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

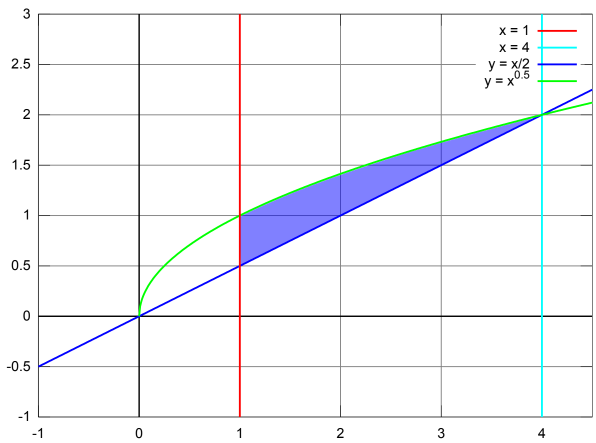
4.10.2. Összetett feladatok

1. **Feladat:** Számítsuk ki az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = xy$ függvény kettős integrálját az

$$x = 1, \quad x = 4, \quad y = \frac{x}{2}, \quad y = \sqrt{x}$$

görbék által határolt D tartományon.

Megoldás: Ha az integrálást most nem egy téglalap alakú tartományon, hanem valamilyen görbék által határolt úgynevezett normáltartományon kell elvégezni. Először célszerű lenne lerajzolni ezt a tartományt.



A tartomány felfogható x szerinti normáltartománynak.

Ebben az esetben úgy végezzük el a kettős integrált, hogy x értékét változtatjuk 1-től 4-ig, és minden adott x érték mellett elvégzünk egy egydimenziós integrálást az y tengellyel párhuzamosan. Most adott x értéknél ez utóbbi integrálás $y = \frac{x}{2}$-től $y = \sqrt{x}$-ig tart.

Tehát a D tartomány most:

$$0 \leq x \leq 4, \qquad \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x}\,.$$

Ekkor a kettős integrál a következő alakban írható fel:

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int_1^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy\,dy \right) dx\,.$$

Végezzük el a kijelölt műveletet.

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int_1^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy\,dy \right) dx =$$

$$= \int_1^4 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right]_1^4 = \frac{4^3}{6} - \frac{4^4}{32} - \left(\frac{1^3}{6} - \frac{1^4}{32} \right) = \frac{81}{32}\,.$$

Figyeljük meg, hogy a megadott tartomány felfogható y szerinti normáltartománynak is. Ebben az esetben a kettős integrál kicsit bonyolultabb, ugyanis az $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ és a $1 \leq y \leq 2$ tartományokat külön kell kezelni. Ennél a sorrendnél minden egyes rögzítettnek gondolt y érték mellett elvégzünk egy integrálást az x tengellyel párhuzamosan. Azonban az integrálási határ függni fog attól, hogy épp milyen y koordináta mellett végezzük az x tengellyel párhuzamos integrálást. Emiatt a határoló görbéket most $y(x)$ helyett $x(y)$ alakban, vagyis y függvényében kell felírni. Ez azt jelenti, hogy az egyenleteinket x-re kell rendezni. Most y függvényében felírva a következő görbék határolják ezt a tartományt:

$$y = \frac{1}{2}, \quad y = 2, \quad x = 2y, \quad x = y^2\,.$$

Amíg $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ esetén ezeket az integrálokat $x = 1$-től $x = 2y$-ig kell elvégezni, addig $1 \leq y \leq 2$ esetén az integrálás alsó határa $x = y^2$, a felső határ pedig továbbra is $x = 2y$.

Így ilyen sorrendben a következőképpen néz ki az integrál:

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{1}^{2y} xy\,dx \right) dy + \int_{1}^{2} \left(\int_{y^2}^{2y} xy\,dx \right) dy \,.$$

Mivel

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{1}^{2y} xy\,dx \right) dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{1}^{2y} dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2y^3 - \frac{y}{2} \right) dy =$$

$$\left[\frac{y^4}{2} - \frac{y^2}{4} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{16} \right) = \frac{9}{32} \,,$$

és

$$\int_{1}^{2} \left(\int_{y^2}^{2y} xy\,dx \right) dy = \int_{1}^{2} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{y^2}^{2y} dy = \int_{1}^{2} \left(2y^3 - \frac{y^5}{2} \right) dy =$$

$$\left[\frac{y^4}{2} - \frac{y^6}{12} \right]_{1}^{2} = 8 - \frac{16}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{9}{4} \,,$$

így

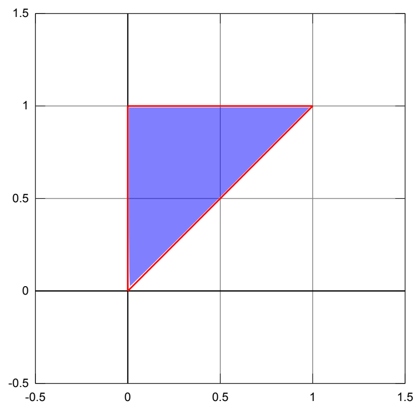
$$\int\int xy\,dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{1}^{2y} xy\,dx \right) dy + \int_{1}^{2} \left(\int_{y^2}^{2y} xy\,dx \right) dy = \frac{9}{32} + \frac{9}{4} = \frac{81}{32} \,.$$

2. **Feladat:** Számítsuk ki az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény kettős integrálját az

$$A(0,0), B(1,1), C(0,1)$$

pontok által meghatározott ABC háromszög fölött.

Megoldás: Először is rajzoljuk fel a kérdéses háromszöget:



Ez mindkét változója szerint normáltartomány, ráadásul mindkét integrálási sorrend szerint felírható egyetlen kétszeres integrálként. Az egyik lehetőség:

$$\iint\limits_{ABC} \frac{1}{1+x^2}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{1}{1+x^2}\, dy \right) dx\,.$$

És a másik:

$$\iint\limits_{ABC} \frac{1}{1+x^2}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{1}{1+x^2}\, dx \right) dy\,.$$

Nézzük az első alakot.

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{1}{1+x^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{1+x^2} \right]_x^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx =$$

$$\left[\operatorname{arctg}\,(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\,.$$

A második integrálnál felhasználtuk, hogy kettővel bővítve a $\frac{f'}{f}$ alakú kifejezést kapunk, aminek integrálja $\ln(f)$.

A másik sorrendben elvégezve az integrálást:

$$\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{1}{1+x^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 [\operatorname{arctg}(x)]_0^y\, dy = \int_0^1 1 \cdot \operatorname{arctg}\,(y) dy\,.$$

Az 1-es szorzó arra utal, hogy parciális integrálás fog következni:

$$v' = 1 \qquad u = \operatorname{arctg}\,(y)$$

$$v = y \qquad u' = \frac{1}{1+y^2}$$

Így

$$\int_0^1 1 \cdot \operatorname{arctg}\,(y) dy = [y \cdot \operatorname{arctg}\,(y)]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\, dy =$$

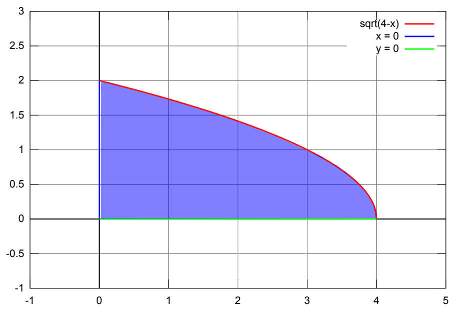
$$\frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+y^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\,.$$

3. **Feladat:** Számítsuk ki az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \frac{ye^{2x}}{4-x}$ függvény kettős integrálját az

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{4-x}$$

görbék által határol D tartomány fölött.

Megoldás: Először is rajzoljuk le a kérdéses tartományt:



Mivel ez mindkét változója szerint normáltartomány, így mindkét sorrendben felírható a kettős integrál kétszeres integrálként. Az egyik lehetőség:

$$\iint\limits_D \frac{ye^{2x}}{4-x}\,dxdy = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{4-x}} \frac{ye^{2x}}{4-x}\,dy \right) dx\,.$$

És a másik:

$$\iint\limits_D \frac{ye^{2x}}{4-x}\,dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{4-y^2} \frac{ye^{2x}}{4-x}\,dx \right) dy\,.$$

A második lehetőséget most el kell vetnünk, mert abban az x szerinti integrál meghatározása valószínűleg nem lehetséges zárt alakban. Így marad az első felírás:

$$\int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{4-x}} \frac{ye^{2x}}{4-x}\,dy \right) dx = \int_0^4 \left[\frac{y^2e^{2x}}{2(4-x)} \right]_0^{\sqrt{4-x}} dx =$$

$$\int_0^4 \frac{(4-x)e^{2x}}{2(4-x)}\,dx = \int_0^4 \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^4 = \frac{e^8}{4} - \frac{1}{4}\,.$$

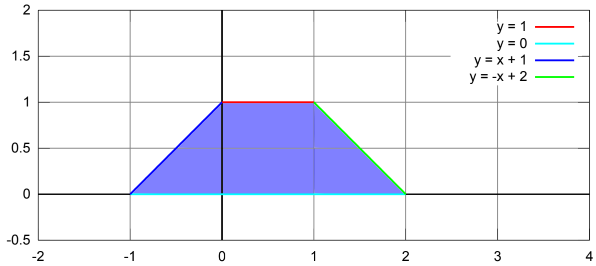
4. **Feladat:** Számítsuk ki az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = xy + 2$ függvény kettős integrálját az

$$A(-1, 0) \quad B(2, 0) \quad C(1, 1) \quad D(0, 1)$$

pontok által határolt D tartomány fölött.

Megoldás:

Először is rajzoljuk le a D tartományt:



Ez a trapéz alakú tartomány mind x, mind y szerint normáltartomány, így tetszőleges sorrendben elvégezhető az integrál. Azonban ha először x szerint integrálunk, könnyebb dolgunk lesz, ugyanis ekkor egyetlen tagban fel tudjuk írni az integrált. Ebben az esetben az alábbi, x-re rendezett egyenesek határolják a tartományt:

$$y = 0, \quad y = 1, \quad x = y - 1, \quad x = -y + 2\,.$$

Így az integrál:

$$\iint_D (xy + 2)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{-y+2} (xy + 2)\,dx \right) dy =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} + 2x \right]_{y-1}^{-y+2} dy = \int_0^1 \left(-y^2 - \frac{5}{2}y + 6 \right) dy =$$

$$\left[-\frac{y^3}{3} - \frac{5}{4}y^2 + 6y \right]_0^1 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{4} + 6 = \frac{53}{12}\,.$$

5. **Feladat:** Számítsuk ki az $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = (x + y)^2$ függvény kettős integrálját az origó középpontú, egységnyi sugarú Ω körlap felett.

Megoldás: Ha az integrálási tartomány kör vagy körszerű tartomány, célszerű áttérni polárkoordinátákra. Először adjuk meg a függvény polárkoordinátás alakját.

Ha

$$x = r\cos t \qquad y = r\sin t$$

akkor

$$(x + y)^2 = (r\cos t + r\sin t)^2$$

és

$$dxdy = rdrdt$$

Még a határokat kell megnézni.

$$0 \le r \le 1 \qquad \text{és} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\iint_{\Omega} (x+y)^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\cos t + r\sin t)^2 r dr dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3(\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t)\ dr dt =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} (1 + \sin 2t) dt \right) \cdot \left(\int_0^1 r^3 dr \right) =$$

$$= \left[t - \frac{1}{2}\cos 2t \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$