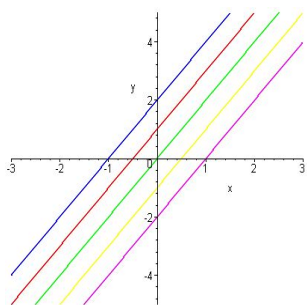


Többváltozós függvények

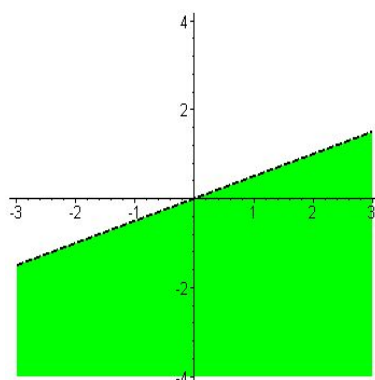
1. Ábrázolja az $f(x, y) = 2x - y$, $D(f) = \mathbb{R}^2$ függvény $c = -2; -1; 0; 1; 2$ magasságokhoz tartozó szintvonalait!

$c=-2, c=-1, c=0, c=1, c=2$



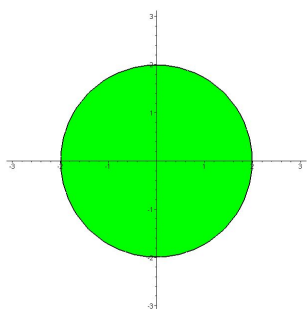
2. Határozza meg az $f(x, y) = \ln(x - 2y)$ függvény értelmezési tartományát!

$[y < \frac{1}{2}x]$

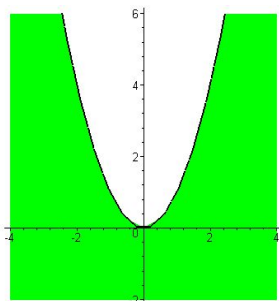


3. Határozza meg az $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + e^{x-y}$ függvény értelmezési tartományát!

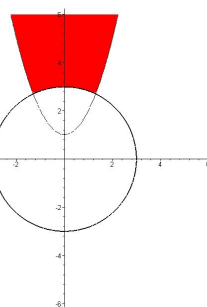
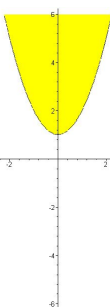
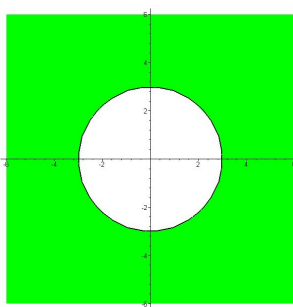
$[x^2 + y^2 \leq 4]$



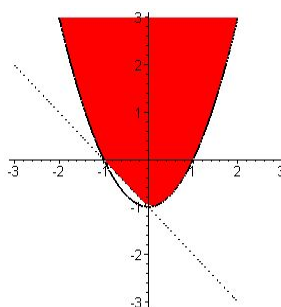
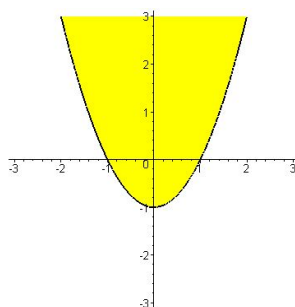
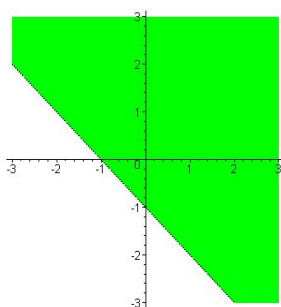
4. Határozza meg az $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt[5]{x - y^3}$ függvény értelmezési tartományát!
 $[y \geq x^2]$



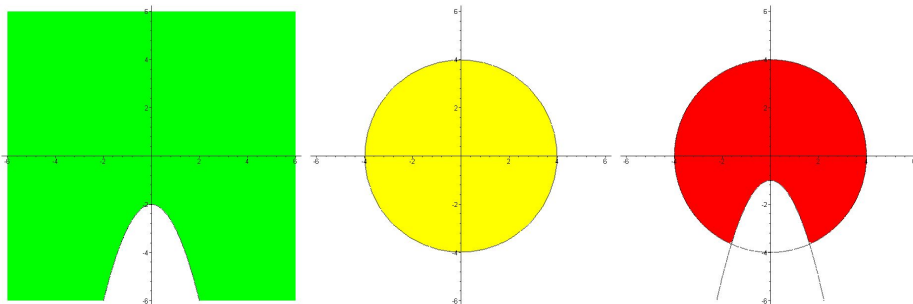
5. Határozza meg az $f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2 - 9} - \ln(y - x^2 - 1)$ függvény értelmezési tartományát!
 $[x^2 + y^2 \geq 9; y > x^2 + 1; \text{értelmezési tartomány}]$



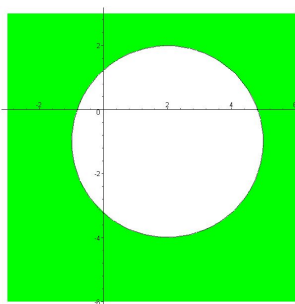
6. Határozza meg az $f(x, y) = \ln(x + y + 1) + \sqrt{y - x^2 + 1}$ függvény értelmezési tartományát!
 $[y > -x - 1; y \geq x^2 - 1; \text{értelmezési tartomány}]$



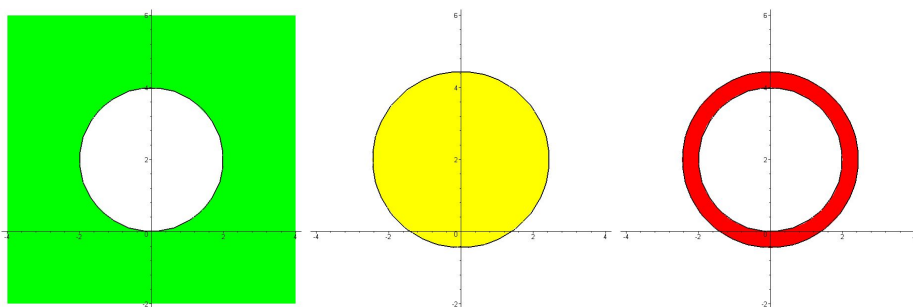
7. Határozza meg az $f(x, y) = \frac{\ln(y+x^2+2)}{\sqrt{-x^2-y^2+16}}$ függvény értelmezési tartományát!
 $[y > -x^2 - 2; x^2 + y^2 < 16; \text{értelmezési tartomány}]$



8. Határozza meg az $f(x, y) = \ln(x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4)$ függvény értelmezési tartományát!
 $[(x - 2)^2 + (y + 1)^2 > 9; \text{kör:középpont}(2; -1), \text{sugár } r = 3]$



9. Határozza meg az $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 4y - 1)$ függvény értelmezési tartományát!
 $[x^2 + (y - 2)^2 \geq 4; x^2 + (y - 2)^2 \leq 6; \text{értelmezési tartomány}]$



10. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 \sin(y)$ függvény parciális derivált függvényeit!
 $[f_x(x, y) = \sin(y) \cdot 2x; f_y(x, y) = x^2 \cdot \cos(y)]$
11. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 y - xy^3$ függvény parciális derivált függvényeit!
 $[f_x(x, y) = y \cdot 2x - y^3 \cdot 1 = 2xy - y^3; f_y(x, y) = x^2 \cdot 1 - x \cdot y^3 = x^2 + 3xy^2]$

12. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 e^{2y}$ függvény parciális derivált függvényeit!
 $[f_x(x, y) = e^{2y} \cdot 2x = 2xe^{2y}; f_y(x, y) = x^2 \cdot e^{2y} \cdot 2 = 2x^2 e^{2y}]$
13. Határozza meg az $f(x, y) = (2xy - y^4)^3$ függvény parciális derivált függvényeit!
 $[f_x(x, y) = 3(2xy - y^4)^2 \cdot (2y \cdot 1 - 0) = 6y(2xy - y^4)^2;$
 $f_y(x, y) = 3(2xy - y^4)^2 \cdot (2x \cdot 1 - 4y^3) = 3(2xy - y^4)^2(2x - 4y^3)]$
14. Határozza meg az $f(x, y) = \sqrt{x^2 y^2 + x^7}$ függvény parciális derivált függvényeit!
 $[f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 y^2 + x^7}} \cdot (y^2 \cdot 2x + 7x^6) = \frac{2xy^2 + 7x^6}{2\sqrt{x^2 y^2 + x^7}};$
 $f_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 y^2 + x^7}} \cdot (x^2 \cdot 2y + 0) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 y^2 + x^7}}]$
15. Határozza meg az $f(x, y, z) = xy^2 z + 3x^5 - 2y + 6z$ függvény parciális derivált függvényeit!
 $[f_x(x, y, z) = y^2 z \cdot 1 + 3 \cdot 5x^4 - 0 + 0 = y^2 z + 15x^4; f_y(x, y, z) = xz \cdot 2y + 0 - 2 \cdot 1 + 0 = 2xyz - 2;$
 $f_z(x, y, z) = xy^2 \cdot 1 + 0 - 0 + 6 \cdot 1 = xy^2 + 6]$
16. Határozza meg az $f(x, y) = x^y$ függvény parciális derivált függvényeit!
 $[f_x(x, y) = yx^{y-1}, ({}^y x^{3^y}); f_y(x, y) = x^y \ln(y), ({}^y 3^y)]$
17. Határozza meg az $f(x, y) = \ln(2x^2 + xy^5)$ függvény parciális derivált függvényeit!
 $[f_x(x, y) = \frac{1}{2x^2 + xy^5} \cdot (2 \cdot 2x + y^5 \cdot 1) = \frac{4x + y^5}{2x^2 + xy^5};$
 $f_y(x, y) = \frac{1}{2x^2 + xy^5} \cdot (0 + x \cdot 5y^4) = \frac{5xy^4}{2x^2 + xy^5}]$
18. Határozza meg az $f(x, y) = \frac{\sqrt{2x - 3y^2}}{x^2 y^4 + 2}$ függvény parciális derivált függvényeit!
 $[f_x(x, y) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-3y^2}} \cdot (2 \cdot 1 - 0) \cdot (x^2 y^4 + 2) - \sqrt{2x - 3y^2} \cdot (y^4 \cdot 2x + 0)}{(x^2 y^4 + 2)^2} =$
 $\frac{\frac{x^2 y^4 + 2}{\sqrt{2x-3y^2}} - 2xy^4 \sqrt{2x-3y^2}}{(x^2 y^4 + 2)^2};$
 $f_y(x, y) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-3y^2}} \cdot (0 - 3 \cdot 2y) \cdot (x^2 y^4 + 2) - \sqrt{2x - 3y^2} \cdot (x^2 \cdot 4y^3 + 0)}{(x^2 y^4 + 2)^2} =$
 $\frac{-3y(x^2 y^4 + 2) - 4x^2 y^3 \sqrt{2x - 3y^2}}{\sqrt{2x-3y^2} (x^2 y^4 + 2)^2}]$
19. Írja fel az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ függvény érintőjének egyenletét az $(1; -1)$ pontban!
 $[f_x(x, y) = 2x - y; f_y(x, y) = -x + 4y; \text{érintősík egyenlete: } 3x - 5y - z - 4 = 0]$
20. Írja fel az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $(2; 4)$ pontban!

$$[f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}; f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}; \text{érintősík egyenlete: } x + 2y + 2z - 18 = 0]$$

21. Írja fel az $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = 2 \ln\left(\frac{y}{x} + x^2\right)$ függvény érintőjének egyenletét az $(1; 1)$ pontban!
 $[x + y - z + 2 \ln(2) - 2 = 0; x + y - z + 2 \ln\left(\frac{2}{e}\right) = 0]$
22. Írja fel az $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontban!
 $[f_x(x, y) = -2xe^{-x^2 - y^2}; f_y(x, y) = -2ye^{-x^2 - y^2}$ érintősík egyenlete: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + ez - 3 = 0]$
23. Határozza meg az $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = 2xy^2 - y$ függvény $\underline{u}(1; 2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(1; -1)$ pontban!
 $[f_{\underline{u}}(1; -1) = -\frac{8}{\sqrt{5}}]$
24. Határozza meg az $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = xe^y - ye^x$ függvény $\underline{u}(-5; 2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(0; 0)$ pontban!
 $[f_x(x, y) = e^y - ye^x; f_y(x, y) = xe^y - e^x; f_{\underline{u}}(1; -1) = -\frac{7}{\sqrt{29}}]$
25. Határozza meg az $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = (x + 2y)^2$ függvény $\underline{u}(2; 1)$ irányú iránymenti deriváltját a $P(1; 1)$ pontban!
 $[f_{\underline{u}}(1; 1) = \frac{108}{\sqrt{5}}]$
26. Határozza meg az $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = x \ln(x + y)$ függvény gradiensét a $(3; -2)$ pontban!
 $[grad_f(3; -2) = \nabla f(3; -2) = (3, 3)]$
27. Határozza meg az $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény gradiensét a $(3; 4)$ pontban!
 $[f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2); f_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}; f_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}; grad_f(3; 4) = \nabla f(3; 4) = \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)]$
28. Határozza meg az $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = \sqrt{e^{3x}} \cdot \sin(3y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjait!
 $[f_x(x, y) = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x} \cdot \sin(3y); f_y(x, y) = 3e^{\frac{3}{2}x} \cdot \cos(3y); f_{x,x}(x, y) = \frac{9}{4}e^{\frac{3}{2}x} \cdot \sin(3y); f_{x,y}(x, y) = \frac{9}{2}e^{\frac{3}{2}x} \cdot \cos(3y); f_{y,x}(x, y) = \frac{9}{2}e^{\frac{3}{2}x} \cdot \cos(3y); f_{y,y}(x, y) = -9e^{\frac{3}{2}x} \cdot \sin(3y)]$
29. Határozza meg az $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = x^2 e^{xy^2}$ függvény másodrendű parciális deriváltjait!
 $[f_x(x, y) = 2xe^{xy^2} + x^2 y^2 e^{xy^2} = (2x + x^2 y^2) \cdot e^{xy^2}; f_y(x, y) = 2x^3 y \cdot e^{xy^2}; f_{xx}(x, y) = (2 + 2xy^2)e^{xy^2} + (2x + x^2 y^2)e^{xy^2} y^2; f_{xy}(x, y) = (2x^2 y)e^{xy^2} + (2x + x^2 y^2)e^{xy^2} 2xy; f_{yx}(x, y) = 6x^2 y e^{xy^2} + 2x^3 y^3 e^{xy^2}; f_{yy}(x, y) = 2x^3 e^{xy^2} + 4x^4 y^2 e^{xy^2}]$
30. Legyen $f : R^2 \rightarrow R : f(x, y) = x^3 y^2 + xy^3 - 8x + y^2$. Számítsa ki $f_{xxy}(x, y)$ parciális deriváltat!
 $[f_x(x, y) = 3x^2 y^2 + y^3 - 8; f_{xx}(x, y) = 6xy^2; f_{xxy}(x, y) = 12xy]$
31. Legyen $f : R^3 \rightarrow R : f(x, y, z) = xe^y + yz^3 + xyz$. Számítsa ki $f_{zxy}(x, y, z)$ parciális deriváltat!
 $[f_z(x, y, z) = 3yz^2 + xy; f_{zx}(x, y, z) = y; f_{zxy}(x, y, z) = 1]$
32. Legyen $f : R^3 \rightarrow R : f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 - z^2)$. Számítsa ki $f_{xxz}(x, y, z)$ parciális deriváltat!
 $[f_x(x, y, z) = 2x \cdot \cos(x^2 + y^2 - z^2); f_{xx}(x, y, z) = 2 \cos(x^2 + y^2 - z^2) - 4x^2 \cdot \sin(x^2 + y^2 - z^2); f_{xxz}(x, y, z) = 4z \sin(x^2 + y^2 - z^2) + 8x^2 y \cos(x^2 + y^2 - z^2)]$

33. Legyen $f : R^3 \rightarrow R : f(x, y, z) = \arctg(3x^6 - y^2) + x^3 \sin(z^2) - x^4 y^2 z^5 + \cos^8(z)$. Számítsa ki $f_{zyx}(x, y, z)$ parciális deriváltat!
 $[f_z(x, y, z) = 2x^3 z \cos(z^2) - 5x^4 y^2 z^4 - 8(\cos(z))^7 \sin(z); f_{zy}(x, y, z) = -10x^4 y z^4; f_{zyx}(x, y, z) = -40x^3 y z^4]$
34. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6$ kétváltozós függvénynek!
 $[D(f) = R^2$
 $f_x(x, y) = 4x + 2y; f_y(x, y) = 2x + 8y$
 stacionárius pontok: $(0; 0)$
 $f_{xx}(x, y) = 4; f_{xy}(x, y) = 2; f_{yx}(x, y) = 2; f_{yy}(x, y) = 8$
 $(0; 0)$ -lokális minimumhely; $f(0; 0) = 6]$
35. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$ kétváltozós függvénynek!
 $[D(f) = R^2$
 $f_x(x, y) = y - 3x^2; f_y(x, y) = x - 2y$
 stacionárius pontok: $(0; 0), (\frac{1}{6}; \frac{1}{12})$
 $f_{xx}(x, y) = -6x; f_{xy}(x, y) = 1; f_{yx}(x, y) = 1; f_{yy}(x, y) = -2$
 $(0; 0)$ - nem szélsőérték hely
 $(\frac{1}{6}; \frac{1}{12})$ -lokális maximumhely; $f(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}) = \frac{1}{432}]$
36. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$ kétváltozós függvénynek!
 $[D(f) = R^2$
 $f_x(x, y) = 3x^2 - 3y; f_y(x, y) = -3x - 3y^2$
 stacionárius pontok: $(0; 0), (-1; 1)$
 $f_{xx}(x, y) = 6x; f_{xy}(x, y) = -3; f_{yx}(x, y) = -3; f_{yy}(x, y) = -6y$
 $(0; 0)$ - nem szélsőérték hely
 $(-1; 1)$ -lokális maximumhely; $f(-1; 1) = 1]$
37. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$ kétváltozós függvénynek!
 [A függvény értelmezési tartománya az egész sík, kivéve a koordinátatengelyek pontjait, hiszen a nevező miatt sem x , sem y nem lehet nulla.
 $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy} = x^2 + y^2 + 2x^{-1}y^{-1}$
 $f_x(x, y) = 2x - \frac{2}{x^2 y}; f_y(x, y) = 2y - \frac{2}{xy^2}$
 stacionárius pontok: $(-1; -1), (1; 1)$
 $f_{xx}(x, y) = 2 + \frac{4}{x^3 y}; f_{xy}(x, y) = \frac{2}{x^2 y^2}; f_{yx}(x, y) = \frac{2}{x^2 y^2}; f_{yy}(x, y) = 2 + \frac{4}{xy^3}$
 $(-1; -1)$ -lokális minimumhely; $f(-1; -1) = 4$
 $(1; 1)$ -lokális minimumhely; $f(1; 1) = 4]$
38. Határozza meg az $f(x, y) = xy(x^2 y^2 - 1)$ függvény kétszeres integrálját a $\{(x, y) \in R^2 : 1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2\}$ tartományon!
 Megoldás:
 $\int_0^2 \left(\int_1^3 (x^3 y^3 - xy) dx \right) dy = \int_1^3 \left(\int_0^2 (x^3 y^3 - xy) dy \right) dx$

$$\int_0^2 (x^3 y^3 - xy) dy = \left[x^3 \cdot \frac{y^4}{4} - x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{1}{4} x^3 y^4 - \frac{1}{2} x y^2 \right]_0^2 = 4x^3 - 2x$$

$$\int_1^3 \left(\int_0^2 (x^3 y^3 - xy) dy \right) dx = \int_1^3 (4x^3 - 2x) dx = \left[x^4 - x^2 \right]_1^3 = 72$$

39. Határozza meg az $f(x, y) = 2xy$ függvény kettősintegrálját a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ tartományon!

Megoldás:

$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (2xy) dy \right) dx$$

$$\int_x^{\sqrt{x}} (2xy) dy = \left[2x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_x^{\sqrt{x}} = [xy^2]_x^{\sqrt{x}} = x^2 - x^3$$

$$\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} (2xy) dy \right) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

40. Határozza meg az $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^4}$ függvény kettősintegrálját a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x \leq 7; -2 \leq y \leq -1\}$ tartományon!

Megoldás:

$$\int_3^7 \left(\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+y)^4} dy \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4} dx \right) dy$$

$$\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4} dx = \int_3^7 (x+y)^{-4} dx = \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+y)^3} \right]_3^7 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3}$$

$$\int_{-2}^{-1} \left(\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4} dx \right) dy = \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3} \right) dy =$$

$$\int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{3} \cdot (7+y)^{-3} + \frac{1}{3} \cdot (3+y)^{-3} \right) dy = \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(7+y)^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(3+y)^2} \right]_{-2}^{-1} = \frac{83}{675}$$

41. Határozza meg az $f(x, y) = 10x^2 + 8xy$ függvény kettősintegrálját a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; -x \leq y \leq \sqrt{x}\}$ tartományon!

Megoldás:

$$\int_0^1 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy) dy \right) dx$$

$$\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy) dy = \left[10x^2 \cdot y + 8x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^{\sqrt{x}} = [10x^2 y + 4xy^2]_{-x}^{\sqrt{x}} = 10x^{\frac{5}{2}} + 4x^2 + 6x^3$$

$$\int_0^1 \left(\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy) dy \right) dx = \int_0^1 (10x^{\frac{5}{2}} + 4x^2 + 6x^3) dx = \left[\frac{20}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^4 \right]_0^1 =$$

$$\frac{239}{42}$$

42. Határozza meg az $f(x, y) = yx^2 + 4$ függvény kettősintegrálját a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq x^2 + 2\}$ tartományon!

Megoldás:

$$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2+2} (yx^2 + 4) dy \right) dx$$

$$\int_x^{x^2+2} (yx^2 + 4) dy = \left[x^2 \cdot \frac{y^2}{2} + 4 \cdot y \right]_x^{x^2+2} = \left[\frac{1}{2}x^2y^2 + 4y \right]_x^{x^2+2} = \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 6x^2 - 4x + 8$$

$$\int_0^1 \left(\int_x^{x^2+2} (yx^2 + 4) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 6x^2 - 4x + 8 \right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{14}x^7 + \frac{3}{10}x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 8x \right]_0^1 = \frac{293}{35}$$

43. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 - y$ függvény kétszeres integrálját az $y = 3x - x^2$ és $y = x$ függvények által közrezárt tartományon!

Megoldás:

$$\text{Tartomány} = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2; x \leq y \leq 3x - x^2\}$$

$$\int_0^2 \left(\int_x^{3x-x^2} (x^2 - y) dy \right) dx$$

$$\int_x^{3x-x^2} (2xy) dy = \left[x^2 \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_x^{3x-x^2} = \left[x^2y - \frac{1}{2}y^2 \right]_x^{3x-x^2} = -\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 4x^2$$

$$\int_0^2 \left(\int_x^{3x-x^2} (x^2 - y) dy \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 4x^2 \right) dx = \left[-\frac{3}{10}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 =$$

$$-\frac{4}{15}$$

44. Határozza meg az $f(x, y) = 3xy + 4x^2$ függvény kétszeres integrálját az $y = x^2 - 5$ és $y = 4$ függvények által közrezárt tartományon!

Megoldás:

$$\text{Tartomány} = \{(x, y) \in R^2 : -3 \leq x \leq 3; x^2 - 5 \leq y \leq 4\}$$

$$\int_{-3}^3 \left(\int_{x^2-5}^4 (3xy + 4x^2) dy \right) dx$$

$$\int_{x^2-5}^4 (3xy + 4x^2) dy = \left[3x \cdot \frac{y^2}{2} + 4x^2 \cdot y \right]_{x^2-5}^4 = \left[\frac{3}{2}xy^2 + 4x^2y \right]_{x^2-5}^4 = -\frac{3}{2}x^5 - 4x^4 + 15x^3 +$$

$$36x^2 - \frac{27}{2}x$$

$$\int_{-3}^3 \left(\int_{x^2-5}^4 (3xy + 4x^2) dy \right) dx = \int_{-3}^3 \left(-\frac{3}{2}x^5 - 4x^4 + 15x^3 + 36x^2 - \frac{27}{2}x \right) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{15}{4}x^4 + 12x^3 - \frac{27}{4}x^2 \right]_{-3}^3 = \frac{1296}{5}$$

45. Határozza meg az $f(x, y) = 1 + \frac{1}{2}x - y$ függvény kétszeres integrálját az $y = x^2 - 4$ és $y = 0$ függvények által közrezárt tartományon!

Megoldás:

$$\text{Tartomány} = \{(x, y) \in R^2 : -2 \leq x \leq 2; x^2 - 4 \leq y \leq 0\}$$

$$\int_{-2}^2 \left(\int_{x^2-4}^0 \left(1 + \frac{1}{2}x - y \right) dy \right) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{x^2-4}^0 \left(1 + \frac{1}{2}x - y\right) dy &= \left[y + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{x^2-4}^0 = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 2x + 12 \\ \int_{-2}^2 \left(\int_{x^2-4}^0 \left(1 + \frac{1}{2}x - y\right) dy\right) dx &= \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 2x + 12\right) dx = \\ \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 12x\right]_{-2}^2 &= 27,733 \end{aligned}$$

46. Határozza meg az $f(x, y) = 4 - y^2$ függvény kétszeres integrálját az $y = 2 - x^2$ és $y = x^2 - 2$ függvények által közrezárt tartományon!

Megoldás:

$$\text{Tartomány} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}; x^2 - 2 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-2}^{2-x^2} (4 - y^2) dy\right) dx \\ \int_{x^2-2}^{2-x^2} (4 - y^2) dy &= \left[4y - \frac{1}{3}y^3\right]_{x^2-2}^{2-x^2} = \frac{2}{3}x^6 - 4x^4 + \frac{32}{3} \\ \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-2}^{2-x^2} (4 - y^2) dy\right) dx &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}x^6 - 4x^4 + \frac{32}{3}\right) dx = \\ \left[\frac{2}{21}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{32}{3}x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} &= 23,2739 \end{aligned}$$