Lineáris algebra és többváltozós függvények (NGB_MA_002_2)

Készítette:

Kiss-Tóth Christian

Széchenyi István Egyetem

Budapest, 2015. február 3.

Tartalomjegyzék

1. Integrálszámítás

1.1. Racionális törtfüggvények integrálása

1.1.1 definíció: (polinom) Az x változó egész kitevőjű hatványainak lineáris kombinációját (valós számokkal vett szorzatának összegét) polinomnak nevezzük. A polinom **fokszáma** a polinomban szereplő legnagyobb kitevő. Jelölés: $P(x)$, $Q(x)$, $\deg P$, $\deg Q$.

1.1.2 definíció: (racionális törtfüggvény) Racionális törtfüggvénynek a két polinom hányadosaként felírható függvényeket: $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Egy ha a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma ($\deg P < \deg Q$), akkor **valódi** racionális törtfüggvényről beszélünk.

1.1.3 tétel: (gyöktényezős felbontás) Minden $P(x)$ polinom felírható konstans, elsőfokú, és gyökökkel nem rendelkező másodfokú polinomok szorzatára, amely tényezők között esetleg lehetnek azonosak.

1.1.4 példa: $2x^5 - 4x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 2(x^2+1)(x-1)^2(x+2)$.

1.1.5 tétel: (parciális törtekre bontás) Minden valódi racionális törtfüggvény felbontható parciálalis törtek összegére. A felbontás a nevező gyöktényezős alakjától függ, attól, hogy abban hány és milyen típusú tag van.

	Gyöktényező	Az összegben szereplő parciális törtek
I.	$(x-\alpha)$	$\frac{A}{x-\alpha}$
II.	$(x-\beta)^m$	$\frac{A_m}{(x-\beta)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\beta)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_2}{(x-\beta)^2} + \frac{A_1}{(x-\beta)}$
III.	(x^2+ax+b)	$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$
IV.	$(x^2+ax+b)^m$	$\frac{A_m x+B_m}{(x+ax+b)^m} + \frac{A_{m-1}x+B_{m-1}}{(x+ax+b)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_2x+B_2}{(x+ax+b)^2} + \frac{A_1x+B_1}{(x+ax+b)}$

1.1.6 feladat: Milyen alakban keresné az $R(x) = \dfrac{x^3+2x^2-5x+1}{x(x^2+2x+3)(x+1)^3(x-2)}$ racionális törtfüggvény parciális törtekre való felbontását?

Megoldás: Az x tényezőhöz tartozó parciális tag: $\dfrac{A}{x}$.
Az (x^2+2x+3) tényezőhöz tartozó parciális tag: $\dfrac{Bx+C}{x^2+2x+3}$.
Az $(x+1)^3$ tényezőhöz tartozó parciális tagok: $\dfrac{D}{x+1} + \dfrac{E}{(x+1)^2} + \dfrac{F}{(x+1)^3}$.
Az $(x-2)$ tényezőhöz tartozó parciális tag: $\dfrac{G}{x-2}$.
A keresett előállítás tehát ezen hat parciális tört összege. ♣

Miért hasznos egy racionális törtfüggvény parciális törtek összegére való bontása? A válasz az, hogy ha $R(x)$-et felírtuk parciális törtek összegére, akkor $R(x)$ integrálja egyenlő ezen törtek integráljainak összegével, vagyis ha ezeket a speciális parciális törteket ki tudnánk integrálni, akkor tetszőleges $R(x)$ primitív függvényét meg tudnánk határozni.

Olyan racionális törtfüggvényekkel, amelyek nevezője tartalmaz IV. típusú tényezőt nem foglalkozunk, mert a hozzá tartozó parciális törtek integrálása bonyolult. Mivel tetszőleges polinom szorzattá alakítása nem megoldható, így csak olyan $R(x)$ függvényekkel foglalkozunk, amelyek nevezője vagy szorzat alakban van felírva, vagy egy esetleges x hatvány kiemelése után a másodfokú megoldóképlettel tényezőkre bontható.

A parciális törtek integrálása:

I) $\displaystyle\int \frac{4}{9x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{4\ln|x-5|}{9} + C.$

II) $\displaystyle\int \frac{3}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{(x+2)^{-1}}{-1} + C.$

III) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} + \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x +$
$\displaystyle + \int \frac{1}{1+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5| + \operatorname{arctg}(x+2) + C.$

1.1.7 megjegyzés: A III. esetben azért volt fontos, hogy a nevezőnek ne legyen gyöke, hogy az átalakítás után mindig olyan alakú nevezőt kapjunk, hogy $(ax+b)^2+c$, ahol c pozitív, mert ha negatív lenne, akkor a kiemelés során negatív számot nem tudnánk bevinni a négyzetreemelésen belülre.

Hogyan határozható meg egy tetszőleges $R(x)$ ilyen alakú tényezőkre történő felbontása? Hogyan kapjuk meg a tételben szereplő A_i, B_i együtthatók értékét? A válasz az egyenlő együtthatók módszere.

1.1.8 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{6}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: A parciális tört valódi, hiszen a nevező másodfokú, a számláló pedig nulladfokú (konstans). Vizsgáljuk meg, hogy a nevezőnek van-e gyöke! Van, $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, így a parciális törtekre való bontást a következő alakban keressük:

$$\frac{6}{x^2+3x} = \frac{6}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}.$$

ahol a jobb oldal közös nevezőre hozás után $\displaystyle\frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)}$. Ebből:

$$\frac{6}{x^2+3x} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}.$$

Az egyenlőség azt jelenti, hogy a két oldal mint függvény, minden x-re azonos, és mivel a nevezők egyenlők ez csak úgy lehet, ha a számlálók mint polinomok egyenlők, vagyis minden együtthatójuk megegyezik:

$$\begin{gathered} A+B=0, \\ 3A=6, \end{gathered}$$

azaz $A = 2$, $B = -2$, vagyis érvényes az $\dfrac{6}{x^2+3x} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x+3}$ egyenlőség. Ekkor a keresett integrál:

$$\int \frac{6}{x^2+3x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x} - \frac{2}{x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x+3}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x| - 2\ln|x+3| + C. \quad \clubsuit$$

1.1.9 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: A racionális törtfüggvény valódi, hiszen a nevező harmadfokú, a számláló pedig másfokú, valamint a nevezőben a tényezők már nem bonthatók tovább, x^2+1-nek nincsen valós gyöke. A parciális törtekre való bontása tehát:

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+1)},$$

vagyis a megfelelő együtthatók egyenlőségéből:

$$\begin{aligned} A+B &= 2,\\ -B+C &= 3,\\ A-C &= -1. \end{aligned}$$

amiből $A = 2$, $B = 0$, $C = 3$, vagyis a keresett integrál:

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| + 3\mathrm{arctg}x + C. \quad \clubsuit$$

Mi a helyzet a nem valódi racionális törtekkel? Amikor a számláló fokszáma legalább akkora mint a nevezőé? A kérdésre a választ a következő tétel adja meg:

1.1.10 tétel: Ha adott két polinom $P(x)$ és $Q(x)$, ahol $\deg P \geq \deg Q$, akkor egyértelműen leteznek olyan $H(x)$ és $M(x)$ polinomok, amelyekre $P(x) = Q(x)H(x) + M(x)$, és $\deg M < \deg Q$.

1.1.11 példa: $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 1$, $Q(x) = x^2 + 1$. Ekkor $x^3 + 2x^2 + 5x - 1 = (x^2+1)(x+2) + (4x-3)$.

1.1.12 következmény: Minden nem valódi racionális törtfüggvény előáll egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként, így az ilyen $R(x)$ függvények integrálása visszavezethető egy polinom és egy valódi racionális törtfüggvény összegének integrálására:

$$\int \frac{x^3+2x^2+5x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+1)(x+2)+(4x-3)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x+2\,\mathrm{d}x + \int \frac{4x-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

1.1.13 megjegyzés: A tételben nem szükségszerű, hogy $\deg P \geq \deg Q$ teljesüljön, de ha $\deg P < \deg Q$ akkor triviálisan $H(x) = 0$ és $M(x) = P(x)$.

1.2. Helyettesítéses integrál

1.2.1 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: Az integrálási nehézséget egyértelműen az okozza, hogy az integrandus egy összetett függvény (nincsen mellette a belső függvény deriváltja) és összetett függvényeket általános esetben nem tudunk integrálni. A cél az lenne, hogy az integrandusban a sin függvény belsejében eltűnjön a gyökjel, és csak egy sima változó legyen. *Ez a helyettesítéses integrál lényege, illetve motívációja.*

Szeretnénk tehát, hogy a $\sqrt{x}$ helyett egy sima változó (legyen mondjuk t) szerepeljen. Tekintsük a következő, - a differenciálegyenletek témakörénél már érintett, így valamennyire ismerős - formális számolást:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= t,\\ x &= t^2,\\ 1\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Behelyettesítve az eredeti integrálba:

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin t\cdot 2t\,\mathrm{d}t,$$

amely integrált ki tudjuk számolni, hiszen a parciális integrálás klasszikus alapesete:

$$\int \sin t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2t\cdot(-\cos t) - \int 2(-\cos t)\,\mathrm{d}t = -2t\cos t + 2\sin t + C,$$

Visszahelyettesítve, hogy t valójában $\sqrt{x}$, azt kapjuk, hogy:

$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C.$$

Ellenőrizve (visszaderiválva) a formális számolás eredményeképpen kapott primitív függvényt valóban visszakapjuk $\sin\sqrt{x}$-et, vagyis az eljárás működött és helyes eredményre vezetett. ♣

A heurisztikus számolás alapja a következő tétel:

1.2.2 tétel: $\displaystyle\int f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(t)(g^{-1}(t))'\,\mathrm{d}t.$

Azt mondjuk hogy a fenti képletben, a $g(x) = t$ helyettesítéssel integráltunk. A jobb oldalon visszaírva a helyettesítést, valóban azonosságot kapunk.
Mivel a formulában szerepel a $g(x)$ függvény inverze, így csak olyan függvény helyére vezethetünk be új változót, aminek van inverze, az első félévben tanultak alapján a szigorúan monoton növekvő függvények ilyenek. Tekintsünk még egy példát gyakorlás gyanánt:

1.2.3 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: Az integrandus $\sqrt[3]{x}$ függvénye, ha helyettük t állna, akkor azt a racionális törtfüggvényt ki tudnánk integrálni. Nézzük meg mi történik, ha elvégezzük a $\sqrt[3]{x} = t$ helyettesítést (a köbgyökfüggvény szigorúan monoton nő, van inverze, a helyettesítés elvégezhető):

$$\sqrt[3]{x} = t,$$
$$x = t^3,$$
$$1\,\mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t.$$

Behelyettesítve az integrálba:

$$\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(t+1)t}\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t = \int \frac{3t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int 3\,\mathrm{d}t - \int \frac{3}{t+1}\,\mathrm{d}t = 3t - 3\ln|t+1| + C.$$

Visszaírva az eredeti változót:

$$\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x} - 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + C. \qquad \clubsuit$$

1.2.4 megjegyzés: Látható, hogy az $\sqrt[n]{x} = t$ helyettesítés mindig működik, amikor olyan függvényt kell integrálni, ami $R(\sqrt[n]{x})$ alakú, ahol a külső $R(x)$ függvény egy racionális törtfüggvény.

1.2.5 tétel: Az első félév során tanult négy integrálási alapeset valójában mind a helyettesítéses integrálás speciális esetei:

a) $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C$, ahol $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$,

b) $\displaystyle\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$, ahol $\alpha \neq 1$,

c) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$,

d) $\displaystyle\int g'(x)\cdot f(g(x))\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$, ahol $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Bizonyítás:

a) Legyen $ax+b = t$, ekkor:

$$a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\frac{1}{a}\,\mathrm{d}t = \frac{F(t)}{a} + C = \frac{F(ax+b)}{a} + C.$$

b) Legyen $f(x) = t$, ekkor:

$$f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \int f'(x)f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \int t^{\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C.$$

c) Legyen $f(x) = t$, ekkor:

$$f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

d) Legyen $g(x) = t$, ekkor:

$$g'(x)\,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t \Rightarrow \int g'(x) f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C = F(g(x)) + C. \qquad \clubsuit$$

Helyettesítéses integrálást eredményesen tudunk alkalmazni akkor is, ha az integrandus e^x-nek valamilyen integrálható függvénye.

1.2.6 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ integrált!

MEGOLDÁS: Az integrandus ebben az esetben e^x függvénye, nézzük meg hát, mi történik az $e^x = t$ helyettesítés során:

$$\begin{aligned} e^x &= t, \\ x &= \ln t, \\ 1\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Behelyettesítve az integrálba:

$$\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^3}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

A helyettesítés után az integrandus egy racionális törtfüggvény lett, elvégezve a maradékos osztást,

$$\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \mathrm{arctg} t + C = e^x - \mathrm{arctg}(e^x) + C. \qquad \clubsuit$$

1.2.7 megjegyzés: Hasonlóan az $\sqrt[n]{x} = t$ helyettesítéshez, az $e^x = t$ helyettesítés működik minden $R(e^x)$ alakú integrandusra, ahol $R(x)$ ismét egy racionális törtfüggvényt jelöl.

1.2.8 feladat: Határozza meg az $\displaystyle\int (3x-2)\sqrt{5-2x}\,\mathrm{d}x$ integrált!

MEGOLDÁS: Az integrandus ugyan nem a $\sqrt{5-2x}$ függvénye, de a nehézséget mégis az okozza, végezzük el a $\sqrt{5-2x} = t$ helyettesítést:

$$\begin{aligned} \sqrt{5-2x} &= t, \\ x &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t^2, \\ 1\,\mathrm{d}x &= -t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Behelyettesítve az integrálba:

$$\int (3x-2)\sqrt{5-2x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{15}{2} - \frac{3}{2}t^2 - 2\right) \cdot t \cdot (-t)\,\mathrm{d}t = -\frac{11}{6}t^3 + \frac{3}{10}t^5 + C =$$
$$-\frac{11}{6}(5-2x)\sqrt{5-2x} + \frac{3}{10}(5-2x)^2\sqrt{5-2x} + C. \qquad \clubsuit$$

1.2.9 feladat: Határozza meg az $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$ integrált!

MEGOLDÁS: Az integrandus itt összetett függvény, $\ln x$ függvénye, nézzük meg, mire vezet a $t = \ln x$ helyettesítés:

$$\ln x = t,$$
$$x = e^t,$$
$$\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t.$$

Behelyettesítve az integrálba kapjuk, hogy $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int \sin t\cdot e^t\,\mathrm{d}t$, ami a harmadik parciális integrálási alapeset. Ebben az alapesetben kétszer kell alkalmaznunk a parciális integrálást, mindegy milyen szereposztással, de mindkét alkalommal ugyanúgy. A primitív függvényt pedig végül egy egyenlet megoldásaként kapjuk.

Legyen $f'(t) = \sin t$, $g(t) = e^t$. A keresett integrált A-val jelölve:

$$A = \int \sin t\cdot e^t\,\mathrm{d}t = -\cos t\cdot e^t - \int -\cos t\cdot e^t\,\mathrm{d}t = -\cos t\cdot e^t + \int \cos t\cdot e^t\,\mathrm{d}t =$$
$$-\cos t\cdot e^t + \sin t\cdot e^t - \int \sin t\cdot e^t\,\mathrm{d}t = -\cos t\cdot e^t + \sin t\cdot e^t - A,$$

amiből $\displaystyle A = \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos t\cdot e^t + \sin t\cdot e^t}{2} + C$, vagyis visszahelyettesítés után:

$$\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\cos(\ln x)\cdot e^{\ln x} + \sin(\ln x)\cdot e^{\ln x}}{2} + C = -\frac{x\cos(\ln x)}{2} + \frac{x\sin(\ln x)}{2} + C. \clubsuit$$

1.3. Improprius integrál

1.3.1 definíció: Legyen f $[a, b]$ intervallumon értelmezett (az egyszerűség kedvéért folytonos) függvény. Az $[a, b]$ intervallumon az f függvény grafikonjának az x tengellyel bezárt előjeles területe az f függvény határozott integrálja az $[a, b]$ intervallumon, és $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$-el jelöljük.

1.3.2 tétel: (Newton-Leibniz formula) Tegyük fel, hogy az $[a, b]$ intervallumon értelmezett f függvénynek F egy primitív függvénye ($F' = f$). Ekkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

1.3.3 feladat: Határozza meg az $\displaystyle\int\limits_1^2 x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: Első körben meghatározva a határozatlan integrált:

$$\int x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Ekkor alkalmazva a Newton-Leibniz formulát:

$$\int\limits_1^2 x + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right]_1^2 = (2 + \ln 2) - \left(\frac{1}{2} - \ln 1\right) = \frac{3}{2} + \ln 2. \qquad \clubsuit$$

1.3.4 kérdés: Milyen általánosítása lehet a már tanult határozott integrálnak?

Válasz: Az egyik lehetőség, hogy az integrálási határok nem végesek, és végtelen intervallumon szeretnénk integrálni. A másik lehetőség, hogy az intervallum ugyan korlátos, de a függvény az adott intervallumon nem korátos illetve szakadási helye van. ♣

1.3.5 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: Tekintsünk el attól a ténytől, hogy az integrálás egyik határa végtelen, határozzuk meg a primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C.$$

Ekkor a Newton Leibniz formulát alkalmazva tetszőleges $[a, b]$ intervallumon meg tudjuk mondani a határozott integrált. Legyen $a = 1$:

$$\int\limits_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Az végtelenig tartó határozott integrálra pedig tekinthetünk úgy, mint egy olyan $[1, u]$ intervallumon vett integrálra, amikor a u tart a végtelenhez:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty} \int\limits_1^u \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right) = 1.$$

1.3.6 definíció: (improprius integrál 1.) Legyen f az $[a,+\infty)$ intervallumon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az f függvénynek az $[a,+\infty)$ intervallumon vett improprius integrálja:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$$

ha ez a határérték létezik létezik és véges. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens. Ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor az improprius integrál divergens.

1.3.7 állítás: Ha F a f primitív függvénye az $[a,+\infty)$ intervallumon, akkor a korábbiak alapján: $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty} F(u) - F(a)$.

1.3.8 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int_0^\infty e^{-5x}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: Az improprius integrál meghatározásához a határozott integrálhoz hasonlóan először a primitív függvényt kell meghatározni. Az első integrálási alapeset szerint:

$$\int_0^\infty e^{-5x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-5x}}{-5} + C = F(x).$$

Ekkor a korábbi megállapítások szerint az improprius integrál értéke:

$$\int_0^\infty e^{-5x}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty} F(u) - F(0) = \lim_{u\to\infty}\left(\frac{e^{-5u}}{-5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}. \qquad \clubsuit$$

1.3.9 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: Ez az integrál pedig a parciális integrálás első alapesete:

$$\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = x\cdot\frac{e^{-3x}}{-3} - \int\frac{e^{-3x}}{-3}\,\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + C = F(x).$$

Az állítás szerint az improprius integrál értéke:

$$\int_0^\infty xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty} F(u) - F(0) = \lim_{u\to\infty}\left(-\frac{ue^{-3u}}{3} - \frac{e^{-3u}}{9}\right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9},$$

hiszen az első u-t tartalmazó tag a L'Hospital szabály miatt, a második u-t tartalmazó tag pedig az exponenciális függény tulajdonságai miatt tart a nullához. $\clubsuit$

1.3.10 definíció: (improprius integrál 2.) Legyen f az $(-\infty, a]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az f függvénynek az $(-\infty, a]$ intervallumon vett improprius integrálja:

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to-\infty} \int\limits_{u}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ha ez a határérték létezik létezik és véges. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens. Ellenkező esetben divergens.

1.3.11 állítás: Ha F a f primitív függvénye az $(-\infty, a]$ intervallumon, akkor az előző eset analógjára $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - \lim\limits_{u\to-\infty} F(u)$.

1.3.12 feladat: Határozzuk meg az $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{5}{x+2}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: A határozatlan integrál:

$$\int \frac{5}{x+2}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x+2| + C = F(x),$$

vagyis az improprius integrál:

$$\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{5}{x+2}\,\mathrm{d}x = F(-3) - \lim_{u\to-\infty} F(u) = 0 - \lim_{u\to-\infty} 5\ln|u+2| = -\infty,$$

vagyis az improprius integrál divergens. ♣

1.3.13 definíció: (improprius integrál 3.) Legyen f az $(-\infty, +\infty)$ intervallumon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az f függvénynek az $(-\infty, +\infty)$ intervallumon vett improprius integrálja:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ha a jobb oldalon mindkét improprius integrál konvergens valamilyen rögzített a esetén.

1.3.14 állítás: Ha F a f primitív függvénye az $(-\infty, +\infty)$ intervallumon, akkor az előző esetek alapján $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to+\infty} F(u) - \lim\limits_{u\to-\infty} F(u)$.

1.3.15 feladat: Határozzuk meg az $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$ integrált!

MEGOLDÁS: A határozatlan integrál a második integrálási alapesetbe tartozik ($\int f' f^\alpha$):

$$\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x\cdot(x^2+4)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+4)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+4} + C = F(x).$$

vagyis az improprius integrál:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2+4} - \lim_{u\to-\infty} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2+4} = 0-0=0. \qquad \clubsuit$$

1.3.16 megjegyzés: Mind a három fajta improprius integrálás során az a lényeg, hogy az integrandus korlátos az integrációs intervallum minden véges zárt részintervallumán, de az integrációs intervallum maga végtelen. Egy másik fajta általánosítása az improprius integrálnak ha nem az integrációs intervallum végtelen, hanem az f függvény az intervallum határában, vagy akár az intervallum belsejében a végtelenhez tart.

1.3.17 definíció: (improprius integrál 4.) Legyen f az $[a,b)$ intervallumon folytonos függvény, de $\lim\limits_{x\to b-} = \pm\infty$. Ekkor az f függvény $[a,b)$ intervallumon vett improprius integrálja:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to b-}\int\limits_a^u f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ha ez a határérték létezik és véges.

1.3.18 állítás: Ha F a f primitív függvénye az $[a,b)$ intervallumon, akkor a korábbi állítások alapján $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to b-} F(u) - F(a)$.

1.3.19 definíció: (improprius integrál 5.) Legyen f az $(a,b]$ intervallumon folytonos függvény, de $\lim\limits_{x\to a+} = \pm\infty$. Ekkor az f függvény $(a,b]$ intervallumon vett improprius integrálja:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to a+}\int\limits_u^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ha ez a határérték létezik és véges.

1.3.20 állítás: Ha F a f primitív függvénye az $[a,b)$ intervallumon, akkor a korábbi állítások alapján $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \lim\limits_{u\to a+} F(u)$.

1.3.21 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: Az integrandus a $[0,2)$ intervallumon egy folytonos függvény, 2-ben a bal oldali határértéke $+\infty$, így éppen a negyedik fajta improprius integrállal van dolgunk. A primitív függvényt helyettesítéssel határozhatjuk meg. Ha $t=\sqrt{2-x}$, akkor $x=2-t^2$, $\mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2-t^2}{t}\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t = \int 2t^2-4\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3-4t+C = \frac{2}{3}\cdot(2-x)\sqrt{2-x}-4\sqrt{2-x}=F(x).$$

Ekkor az improprius integrál értéke az állítás szerint:

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to 2-} F(u)-F(0) = 0-\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-4\sqrt{2}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{3}. \qquad \clubsuit$$

Az improprius integrál akkor is értelmezhető, ha az integrandus az integrációs intervallum mindkét végpontjában valamelyik végtelenhez tart:

1.3.22 definíció: (improprius integrál 6.) Legyen f az (a,b) intervallumon folytonos függvény, de $\lim\limits_{x\to a+} = \pm\infty$ és $\lim\limits_{x\to b-} = \pm\infty$. Ekkor az f függvény (a,b) intervallumon vett improprius integrálja:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ha a jobb oldalon mindkét improprius integrál létezik és véges valamilyen tetszőleges, rögzített $c\in(a,b)$ esetén.

1.3.23 állítás: Ha F a f primitív függvénye az (a,b) intervallumon, akkor a korábbi állítások alapján $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to b-} F(u) - \lim_{u\to a+} F(u)$.

1.3.24 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: Az integrandus a $(0,2)$ intervallumon egy folytonos függvény, de a 0-ban és a 2-ben is a megfelelő féloldalas határértékek $+\infty$, így most a hatodik fajta improprius integrállal van dolgunk. A primitív függvény keresése arcsin-ra vezet:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x-1)+C=F(x).$$

Ekkor az improprius integrál értéke az állítás szerint:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to 2-} F(u) - \lim_{u\to 0+} F(u) = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \ \clubsuit$$

1.3.25 megjegyzés: Ha az integrandus az integrációs intervallum néhány belső pontjában nem korlátos, akkor ezek a pontok felbontják az eredeti integrációs intervallumot részintervallumokra, és az eredeti integrál az ezeken a részintervallumokon vett integrálok összege, feltéve, hogy mindegyik létezik és véges.

1.3.26 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: Az integrandus nincs értelmezve az $[1,10]$ intervallumba eső 2 helyen, a 2 környezetében a függvény nem korlátos. Ekkor a fenti megjegyzés alapján a következőképpen járunk el:

$$\int_1^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x + \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x,$$

feltéve, ha a jobb oldalon mind a két improprius integrál konvergens. A primitív függvény mind a két intervallumon azonos, $\int f(ax+b)$ típusú integrál (más alapesetekbe, sőt helyettesítéssel is kiszámolható):

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x-2} + C = F(x).$$

Ekkor a jobb oldalon lévő két improprius integrál értéke:

$$\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to 2-} F(u) - F(1) = 0 - (-3) = 3,$$

$$\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x = F(10) - \lim_{u\to 2+} F(u) = 6 - 0 = 6,$$

vagyis az improprius integrál értéke a teljs intervallum $3+6=9$. $\clubsuit$

2. Vektorszámítás

2.1. Alapfogalmak, műveletek

2.1.1 definíció: (vektor) A térbeli irányított szakaszokat vektoroknak hívjuk. Egy vektort három adata határoz meg egyértelműen, a nagysága, az állása, és az irányítása. Két vektort egyenlőnek tekintünk, ha mind a három jellemzőjük azonos. Ez azzal ekvivalens, hogy van olyan eltolás, amellyel fedésbe hozhatók. Vektorokat vagy a végpontjaik feletti nyíllal, ($\overrightarrow{AB}$) aláhúzott ($\underline{a}$) vagy nyomtatásban félkövér kisbetűvel jelöljük ($\mathbf{b}$).

2.1.2 definíció: (vektorok összeadása) Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két vektor. Ekkor az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ összeget a paralelogramma-szabállyal definiáljuk: eltoljuk a vektorokat úgy, hogy közös kezdőpontból induljanak ki, ezután a vektoork által kifeszített síkban tekintjük az egyik vektor végpontján átmenő és a másik vektor egyenesével párhuzamos egyenesek metszéspontját. A közös kezdőpontból ebbe a metszéspontba mutató vektor az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor.

Ugyanezt a definíciót kapjuk, hogy ha az összeadandó vektorokat egymás után fűzzük, és az összeg az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutató vektor. Ez a definíció több vektor összeadása esetén sokkal praktikusabb.

A vektorok összeadása asszociatív és kommutatív művelet.

2.1.3 definíció: (vektorok kivonása) Adott két vektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ alatt azt a vektort értjük, amelyiket $\mathbf{b}$-hez adva éppen $\mathbf{a}$-t kapjuk. Azonos kezdőpontból mérve a vektorokat ez éppen a $\mathbf{b}$ végpontjából az $\mathbf{a}$ végpontjába mutató vektor. A vektorok kivonása nem kommutatív, és nem asszociatív.

2.1.4 definíció: (hossz, null-, egység-, ellentettvektor) Vektor hossza alatt a reprezentáló szakasz hosszát értjük. Ha ez a hossz 1, akkor egység-, ha 0, akkor nullvektorról beszélünk. A nullvektor jele $\mathbf{0}$. A $-\mathbf{v}=\overrightarrow{BA}$ vektort a $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$ vektor ellentettjének nevezzük. Erre a vektorra fennáll, hogy $\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$ és $\mathbf{v}+(-\mathbf{v})=\mathbf{0}$.

2.1.5 definíció: (vektor szorzása számmal) Legyen $\lambda>0$ valós szám. Ekkor a $\mathbf{v}$ vektor λ-szorosán azt a vektort értjük, amelynek állása és iránya azonos $\mathbf{v}$ állásával és irányával, hossza pedig $\mathbf{v}$ hosszának a λ-szorosa. Ha $\lambda<0$, akkor a $\lambda\cdot\mathbf{v}$ vektor a $|\lambda|\cdot\mathbf{v}$ vektor ellentettje. A három alapműveletre teljesülnek a következő tulajdonságok:

$$(\lambda\mu)\mathbf{v}=\lambda(\mu\mathbf{v}),$$
$$\lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\lambda\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w},$$
$$(\lambda+\mu)\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}.$$

2.1.6 definíció: (lineáris kombináció) Legyenek $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_n}$ vektorok, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ tetszőleges valós számok. Ekkor a $\lambda_1\mathbf{v_1}+\lambda_2\mathbf{v_2}+\ldots+\lambda_n\mathbf{v_n}$ vektort a $\mathbf{v_i}$ vektorok λ_i együtthatókkal vett lineáris kombinációinak nevezzük.

A vektorok legfontosabb tulajdonsága, hogy tudjunk számolni velük. Ehhez alapvető fontosságú a következő tétel:

2.1.7 tétel: Legyen **a**, **b** és **c** három nem egysíkú vektor. Ekkor minden térbeli vektor (az együtthatókat tekintve) egyértelműen előáll az **a**, **b** és **c** vektorok lineáris kombinációjaként.

2.1.8 következmény: Ez azt jelenti hogy minden **v** vektorhoz egyértelműen van olyan (α, β, γ) hármas, melyre $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. Ezeket az együtthatókat a **v** vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bázishoz tartozó koordinátáinak nevezzük.

A tétel tehát azt jelenti, hogy ha rögzítünk három nem egysíkú vektort a térben, akkor minden vektort egyértelműen tudunk számhármasokkal jellemezni. Ez a három vektor ugyan bármilyen lehet, de a továbbiakban egy kitüntetett bázist fogunk használni.

Vegyünk a térben három egységnyi hosszú, páronként merőleges egységvektort, és ezeket jelöljük **i**, **j**, **k**-val. Ez a három vektor kifeszíti a szokásos térbeli koordinátarendszert, és a vektorok koordinátái ebben a bázisban a szokásos térbeli koordináták abban az értelemben, hogy ha a vektort az origóból indítjuk, akkor a vektorhoz tartozó koordináták éppen a végpont koordinátái. Sokszor fogjuk azonosítani a pontok koordinátáit az origóból a pontba mutató vektorral. Az origóból a pontba mutató vektort a pont helyvektorának nevezzük.

Ha a vektorokat tudjuk számhármasokkal jellemezni, akkor a műveletek is könnyen elvégezhetők:

$$\begin{gathered}
\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} \Longrightarrow \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \\
\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k} \Longrightarrow \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3), \\
\Downarrow \\
\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3), \\
\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3), \\
\lambda\mathbf{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3), \\
\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.
\end{gathered}$$

Amennyiben adott egy szakasz, és a végpontjaiba mutató helyvektorok, abban az esetben ki tudjuk számolni a szakaszt $p : q$ arányban osztó pontba mutató vektor koordinátáit. Legegyszerűbb eset az, amikor a szakasz felezőpontjáról beszélünk:

2.1.9 állítás: Adott a térben két pont, A és B, jelölje az AB szakasz felezőpontját F, a megfelelő pontokba mutató helyvektorok pedig $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{f}$. Ekkor a felezőpontba mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe: $\mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}$.

Hasonlóképpen egyszerű képlet adódik a szakaszt tetszőleges arányban osztó pont helyvektorára:

2.1.10 állítás: Adott a térben két pont A és B, és legyen R az AB szakasz azon pontja, melyre $AR : RQ = p : q$. Ekkor az R pont helyvektorára: $\mathbf{f} = \dfrac{q\mathbf{a} + p\mathbf{b}}{p + q}$.

2.1.11 megjegyzés: A felezőpont esetén $p = q = 1$, az általános képlet összhangban van a fenti speciális esettel.

2.2. Vektorok skaláris szorzata

2.2.1 definíció: (skaláris szorzat) Adottak a $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ vektorok, a két vektor skaláris szorzatán a

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \cdot \cos\varphi$$

mennyiséget értjük, ahol φ a két vektor által közrezárt szög. Mivel a φ és a $360° - \varphi$ szögek koszinusza azonos, ez a mennyiség jól definiált. Ezt a szorzatot azért nevezzük skalárisnak, mert értéke egy valós szám (skalár) nem pedig vektor.

Bizonyítás nélkül kimondjuk a skalárszorzatot és az alapvető vektorműveleteket (összeadás, kivonás, számmal való szorzás) összekapcsoló egyszerű azonosságokat:

2.2.2 állítás: Legyenek $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tetszőleges vektorok, λ valós szám. Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle, \\
\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \\
\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle, \\
\langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \lambda \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.
\end{aligned}$$

A skaláris szorzás egyszerűen számolható a vektorok koordinátái segítségével, és így jól alkalmazható két vektor szögének vizsgálatára. Erre vonatkoznak a következő tételek:

2.2.3 tétel: Ha adott két, a koordinátáival adott vektor: $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Ekkor $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$.

2.2.4 tétel: Adottak a $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ vektorok, ekkor:

a) $\cos\varphi = \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}$,

b) $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ merőlegesek egymásra $\Longleftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$,

c) $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ hegyesszöget zárnak be $\Longleftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle > 0$,

d) $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ tompaszöget zárnak be $\Longleftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle < 0$.

A skaláris szorzás másik alkalmazása, hogy ha adottak a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok, akkor fel tudjuk bontani $\mathbf{v}$-t $\mathbf{w}$-vel párhuzamos és $\mathbf{w}$-re merőleges összetevőkre. Erre a fizikai alkalmazások során nagyon gyakran van szükség.

2.2.5 tétel: Legyen adott egy $\mathbf{v}$ és egy $\mathbf{w}$ vektor, ahol $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Ekkor $\mathbf{v}$ $\mathbf{w}$ irányú vetületvektora ($\mathbf{w}$-vel párhuzamos összetevője):

$$\mathbf{v}_p = \left(\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) \cdot \mathbf{w}.$$

2.2.6 feladat: Legyen $\mathbf{v} = (3, 2, -5)$, $\mathbf{w} = (-1, 4, 2)$. Bontsuk fel $\mathbf{v}$-t $\mathbf{w}$-vel párhuzamos, és $\mathbf{w}$-re merőleges összetevőkre!

MEGOLDÁS: A párhuzamos összetevő meghatározására szolgál a fenti képlet. A képlethez meg kell határoznunk a $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ skalárszorzatot, valamint $\mathbf{w}$ hosszát:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = -3 + 8 - 10 = -5,$$
$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}.$$

ebből a párhuzamos összetevő:

$$\mathbf{v}_p = \left(\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \right) \cdot \mathbf{w} = -\frac{5}{21} \mathbf{w} = \left(\frac{5}{21}, -\frac{20}{21}, -\frac{10}{21} \right).$$

A merőleges összetevőt megkaphatjuk úgy, hogy $\mathbf{v}$-ből kivonjuk a párhuzamos komponenst:

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v} - \mathbf{v}_p = (3, 2, -5) - \left(\frac{5}{21}, -\frac{20}{21}, -\frac{10}{21} \right) = \left(\frac{58}{21}, \frac{62}{21}, -\frac{95}{21} \right).$$

skaláris szorzással meggyőződhetünk arról, hogy ez a komponens valóban merőleges $\mathbf{w}$-re. ♣

2.3. Vektorok vektoriális szorzata

2.3.1 definíció: (vektoriális szorzat) Adottak a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok. Ekkor $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, amely merőleges $\mathbf{v}$-re és $\mathbf{w}$-re, a hossza $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{w}\|\cdot\sin\varphi$, ahol φ a $\mathbf{v}$ és a $\mathbf{w}$ vektorok által bezárt szög, és $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\times\mathbf{w}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot.

2.3.2 állítás: Ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, akkor:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, -(v_1w_3 - v_3w_1), v_1w_2 - v_2w_1).$$

A vektoriális szorzás és az alapvető vektorműveleketek között is kimondhatók hasonló összefüggések, mint a skaláris szorzás esetében:

2.3.3 állítás: Legyenek $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tetszőleges vektorok, λ valós szám. Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\begin{gathered}
\mathbf{v}\times\mathbf{w} = -\mathbf{w}\times\mathbf{v},\\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{w}+\mathbf{v}\times\mathbf{w},\\
\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w},\\
(\lambda\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{v}\times(\lambda\mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{v}\times\mathbf{w}).
\end{gathered}$$

A skaláris szorzás segítségével vetületeket lehetett számolni, illetve vektorok merőlegességét lehetett jól megfogni, a vektoriális szorzás segítségével területeket illetve párhuzamosságot lehet számolni:

2.3.4 tétel: Adottak a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok.

a) $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ pontosan akkor párhuzamosak, ha a $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ vektoriális szorzat nullvektor,

b) a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe egyenelő a $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ vektoriális szorzat hosszával:

$$t_p = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|,$$

c) a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok által kifeszített háromszög területe egyenelő a $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ vektoriális szorzat hosszának a felével:

$$t_h = \frac{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|}{2}.$$

2.3.5 feladat: Tekintsük az $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 5)$ és $C(-1, -1, -1)$ pontokat. Bizonyítsuk be, hogy ezek a pontok háromszöget alkotnak, és számoljuk ki a C csúcshoz tartozó magasság hosszát!

Megoldás: A háromszög oldalvektorai: $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 2)$ és $\overrightarrow{AC} = (-2, -3, -4)$. Mivel ezek a vektorok nem párhuzamosak (két vektor pontosan akkor párhuzamos, ha egymás skalárszorosai) így a három pont valóban háromszöget alkot.

Tudjuk, hogy $\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$ nem más, mint a kifeszített paralelogramma területe, ami az ABC háromszög területének a kétszerese. A vektoriális szorzat:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3), -(2 \cdot (-4) - 2 \cdot (-2)), 2 \cdot (-3) - 0 \cdot (-2)) = (6, 4, -6),$$

vagyis $t_{ABC\triangle} = \dfrac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{2} = \dfrac{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-6)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{88}}{2} = \sqrt{22}$.

A C csúcshoz tartozó magasság pedig kiszámolható a háromszög legalapvetőbb területképleté-ből:

$$t_{ABC\triangle} = \frac{cm_c}{2} = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \right\| \cdot m_c}{2} \Longrightarrow m_c = \frac{2t_{ABC\triangle}}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\|},$$

és mivel $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{8}$ így $m_c = \sqrt{11}$. ♣

2.4. Vektorok vegyes szorzata

2.4.1 definíció: (vegyes szorzat) Adottak az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok. Az $\mathbf{uvw}$ vegyes szorzat alatt a $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ valós számot értjük.

A vegyes szorzat értéke tehát a skaláris szorzathoz hasonlóan egy valós szám, a neve pedig arra utal, hogy kiszámításához mindkét fajta vektorszorzás szükséges. A skaláris és a vektoriális szorzás tulajdonságait felhasználva felírhatnánk többféle azonosságot, ami a különböző vektorműveleteket és a vegyes szorzatot kapcsolja össze, mégis egy olyan összefüggés van csak, amit kiemelünk:

2.4.2 állítás: Adottak az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok. Ekkor

$$\mathbf{uvw} = \mathbf{vwu} = \mathbf{wuv} = -\mathbf{uwv} = -\mathbf{vuw} = -\mathbf{wvu}.$$

Míg vektoriális szorzás segítségével területet és párhuzamosságot, a vegyes szorzat segítségével egysíkúságot és térfogatot tudunk számolni az alábbi tételek szerint:

2.4.3 tétel: Adottak az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok.

a) $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ pontosan akkor egysíkú vektorok, ha $\mathbf{uvw} = 0$,

b) az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata egyenlő az $\mathbf{uvw}$ vegyes szorzat abszolút értékével:

$$V_p = |\mathbf{uvw}|,$$

c) az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ vektorok által kifeszített tetraéder térfogata egyenlő az $\mathbf{uvw}$ vegyes szorzat abszolút értékének a hatodával:

$$V_t = \frac{|\mathbf{uvw}|}{6}.$$

2.4.4 feladat: Tekintsük az $A(-1,-1,-1)$, $B(3,0,0)$, $C(0,3,0)$ és a $D(0,0,3)$ pontokat. Igazoljuk, hogy ezek tetraédet határoznak meg, illetve határozzuk meg D csúcshoz tartozó magasság hosszát!

Megoldás: Számoljuk ki először a tetraéder A csúcsból induló élvektorait: $\overrightarrow{AB} = (4,1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (1,4,1)$, $\overrightarrow{AD} = (1,1,4)$. A négy csúcs pontosan akkor nem alkot tetraédert, ha ez a három élvektor egy síkban van, vagyis a fenti tétel szerint a vegyesszorzatuk nulla.

Határozzuk meg először az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektoriális szorzatot:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-3,15).$$

Ebből az $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}$ vegyesszorzat abszolútértéke 54, vagyis a négy pont valóban tetraédert határoz meg, melynek térfogata:

$$V_t = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right|}{6} = 9.$$

A magasság meghatározásához használjuk fel a tetraéder (általánosan fogalmazva a csonkagúla) térfogatképletét, valamint azt, hogy a háromszög területét fel tudjuk írni a vektoriális szorzat hosszaként:

$$V_t = \frac{t_{ABC\triangle} \cdot m_D}{3} = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| \cdot m_D}{6}.$$

A vektoriális szorzatot már kiszámoltuk korábban, a hossza pedig $\sqrt{9+9+225} = \sqrt{243}$. Ebből a keresett magasság: $m_D = \dfrac{54}{\sqrt{243}} = 2\sqrt{3}$. ♣

3. Térbeli koordinátageomeria

3.1. Egyenesek egyenlete

Tekintsünk a térben egy $P(p_1, p_2, p_3)$ pontot és egy $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \mathbf{0}$ vektort. Ekkor pontosan egy olyan egyenes létezik, amely áthalad a P ponton, és párhuzamos a $\mathbf{v}$ vektorral. Ennek az egyenesnek a **paraméteres vektoregyenlet**e:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \mathbf{v}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ahol $\mathbf{r} = (x, y, z)$ az egyenes **futópontjá**nak a helyvektora, a t valós szám a **paraméter**, a $\mathbf{v}$ pedig az egyenes **irányvektora**. Ez azt jelenti, hogy ha t helyére egy tetszőleges valós számot írunk, akkor kapunk egy pontot az egyenesen, de fordítva is igaz a gondolatmenet, az egyenes minden pontja megkapható úgy, hogy a paraméter helyére egy alkalmas számot írunk.

A vektoregyenletben a bal és a jobb oldal egyenlősége azt jelenti, hogy a két vektor minden koordinátája megegyezik. Felírva a koordinátákra vonatkozó egyenleteket, az **egyenes paraméteres egyenletrendszeré**t kapjuk:

$$\begin{cases} x = p_1 + v_1 t \\ y = p_2 + v_2 t \\ z = p_3 + v_3 t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

A továbbiakban majdnem minden esetben ezzel a paraméteres egyenletrendszerrel fogunk dolgozni. Mivel egy egyenesnek végtelen sok pontja, és végtelen sok irányvektora is van, így ugyanaz az egyenes végtelen sokféleképpen írható fel paraméteres vektoregyenlet segítségével.

Abban az esetben, ha az irányvektor egyik koordinátája sem nulla, a paraméteres egyenletekből kifejezhetők a paraméterek, és mivel egy adott ugyanaz a t érték tartozik, ezeket egyenlővé tudjuk tenni:

$$t = \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3},$$

vagyis elmondhatjuk hogy az egyenes pontjai azok az (x, y, z) hármasok, amelyek kielégítik a következő háromismeretlenes, két egyenletből álló rendszert:

$$\begin{aligned} \frac{x - p_1}{v_1} &= \frac{y - p_2}{v_2}, \\ \frac{y - p_2}{v_2} &= \frac{z - p_3}{v_3}. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert az egyenes **paraméter nélküli egyenletrendszeré**nek nevezzük. Ha az irányvektor valamelyik koordinátája nulla, akkor is van paraméter nélküli egyenletrendszer, csak az alakja egy kissé elfajult.

3.1.1 feladat: Írjuk fel a $P(1, 2, 3)$ és a $Q(2, 1, 1)$ pontokon áthaladó egyenes paraméteres egyenletrendszerét! Adjunk meg egy olyan (P-n és Q-n kívüli) pontot ami rajta van az egyenesen, és egy olyat is, ami nincsen! Adjuk meg a nemparaméteres egyenletrendszert is!

MEGOLDÁS: Mivel a P és a Q pontok is rajta vannak az egyenesen, így a $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, -2)$ jó lesz irányvektornak. Választani kell egy pontot is, ami rajta van az egyenesen, legyen ez a P pont. Ekkor az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

A paramétert kifejezve az egyes egyenletekből, a kifejezéseket egyenlővé téve megkapjuk a nem paraméteres egyenletrendszert is:

$$\begin{aligned} x - 1 &= 2 - y, \\ 2 - y &= \frac{3 - z}{2}. \end{aligned}$$

A paraméteres egyenletreszer segítségével könnyen megadhatunk pontokat az egyenesen, illetve megállíthatjuk azt is, hogy egy pont rajta van-e az egyenesen. Ha $t = 0$, akkor megkapjuk a P pontot, ha $t = 1$ akkor Q-t. Tetszőleges egyéb paraméterérték esetén az egyenes egy újabb pontját kapjuk: ha $t = 3$, akkor $R(4, -1, -3)$ szintén rajta van az egyenesen.

Adott koordinátájú pontról is könnyen el tudjuk dönteni, hogy rajta van-e a PQ-n. Az $A(0, 3, 5)$ pont például rajta van, hiszen mindhárom koordináta alapján $t = -1$ a paraméter értéke. A $B(-1, 3, 7)$ azonban nincs rajta, mert ha az x koordinátát tekintjük, akkor $t = -2$ kellene, hogy legyen, az y koordináta alapján azonban $t = -1$, ami ellentmondás. ♣

3.1.2 feladat: Határozzuk meg a következő egyenesek metszéspontját:

$$e : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad f : \begin{cases} x = 4 + u \\ y = 1 + 3u \\ z = u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

MEGOLDÁS: Ha a két egyenesnek van metszéspontja, akkor az azt jelenti, hogy van olyan t és u paraméter, amelyek ugyanazt az (x, y, z) pontot határozzák meg. Ez azt jelenti hogy ennek a két paraméternek ki kell elégítenie a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2 + t &= 4 + u, \\ -1 - t &= 1 + 3u \\ 1 - 2t &= u. \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből megvan u, beírva az első egyenletbe $t = 1$, amiből $u = -1$. Megvizsgálva az értékeket ez valóban kielégíti mindhárom egyenletet, és az általuk meghatározott metszéspont koordinátái: $M(3, -2, -1)$. ♣

3.2. Síkok egyenlete

Síkbeli koordinátageometriában az egyenes **normálvektor**ának egy, az egyenesre merőleges vektort neveztünk. Térben (egyel magasabb dimenzióban) az egyenes esetén ez már nem egyértelmű, mert egy egyenesre merőleges vektorok egy síkot feszítenek ki. Három dimenzióban a sík lesz az az objektum, amit egyértelműen meghatároz a rá merőleges irány.

Vegyünk a térben egy $P(p_1, p_2, p_3)$ pontot, és egy $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \neq \mathbf{0}$ vektort. Ekkor pontosan egy olyan sík létezik, amelyik átmegy a P ponton, és merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra. Ennek a síknak a **normálegyenlet**e:

$$\langle \mathbf{r} - \overrightarrow{OP}, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

ahol $\mathbf{r} = (x, y, z)$ a sík **futópontjá**nak helyvektora, $\mathbf{n}$ pedig a sík **normálvektora**. A skalárszorzat koordinátákkal felírt kiszámolási képletét felhasználva megkapjuk a sík egyenletét:

$$n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0$$

ami rendezés után:

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = D$$

alakban írható. Minden olyan (x, y, z) pont, amelyik rajta van a síkon kielégíti ezt az egyenletet, és minden pont, amelynek a koordinátái kielégítik ezt az egyenletet a szóbanforgó sík egy pontja. Érdemes megjegyezni egyébként, hogy $D = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 = \langle \overrightarrow{OP}, \mathbf{n} \rangle$.

Az egyenes egyenlet(rendszer)ével ellentétben, a síkokra állítható valamiféle kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a sík és a sík egyenlete között. Az itt sem igaz, hogy különböző egyenletekhez különböző sík tartozik, mivel a normálvektor az irányvektorhoz hasonlóan ebben az esetben is csak skalárszorzó erejéig egyértelmű, de ezt a konstans szorzót leszámítva a síkhoz tartozó egyenlet egyértelmű.

Két egyenlet tehát pontosan akkor határozza meg ugyanazt a síkot, ha egymás számszorosai, és az egyenletben x, y és z együtthatói megadják a sík normálvektorát.

3.2.1 feladat: Legyen adva a következő egyenes, illetve sík:

$$e : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad S : x + y - 2z - 5 = 0.$$

Vizsgáljuk meg a térelemek egymáshoz viszonyított helyzetét, és ha metszik egymást, határozzuk meg a döféspont koordinátáit!

Megoldás: Egy egyenes és egy sík a térben vagy párhuzamos (speciális esetben az egyenes rajta van a síkon), vagy (egy pontban) metszik egymást. Egyenes akkor párhuzamos egy síkkal, ha irányvektora merőleges a sík normálvektorára, vagyis $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Jelen esetben ez a skaláris szorzat $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 4$ vagyis az egyenes metszi a síkot.

Hogyan határozzuk meg a metszéspontot? Egy P pont akkor van rajta az egyenesen, ha valamilyen t paraméterérték esetén $(2 - t, 1 + t, 1 - 2t)$ alakú. Egy ilyen alakú pont pedig akkor van rajta a síkon, ha:

$$\begin{aligned} 2-t+1+t-2(1-2t) &= 5,\\ 1+4t &= 5,\\ t &= 1. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti tehát, hogy az egyenes $t = 1$ paraméterértékhez tartozó pontja rajta van az S síkon, vagyis a metszéspont $M(1, 2, -1)$. ♣

3.2.2 feladat: Tekintsük a következő pontot és egyenest:

$$A(2,-1,3), \qquad\qquad e: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 5+6t \\ z = 4-2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vizsgáljuk meg a térelemek egymáshoz viszonyított helyzetét, majd határozzuk meg az A-t és e-t tartalmazó síkot!

Megoldás: Egy pont vagy rajta van egy egyenesen, vagy egyértelműen létezik a ponton átmenő, az egyenest tartalmazó sík. Mivel ebben az esetben a pont nincsen rajta az egyenesen, így a második eset áll fenn. Szükségünk van a keresett sík normálvektorára. A sík normálvektora merőleges a síkra, úgy kaphatjuk meg, ha vesszük két, a síkkal párhuzamos (de egymással nem) vektor vektoriális szorzatát. Az egyik ilyen vektornak jó lesz az egyenes $\mathbf{v} = (3, 6, -2)$ irányvektrora, a másik vektornak pedig az $\overrightarrow{PA}$ vektor, ahol a P rajta van az egyenesen. A $t = 0$ választással ilyen pont a $P(2, 5, 4)$.

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PA} \times \mathbf{v} = (18, -3, 18) \sim (6, -1, 6).$$

Ekkor a sík egyenlete:

$$6x - y + 6z = \langle \overrightarrow{OA}, \mathbf{n} \rangle = 31 \qquad ♣$$

3.2.3 feladat: Vegyük hozzá az előző feladatban megadott A ponthoz és e egyeneshez az

$$f: \begin{cases} x = -1-2t \\ y = 2-3t \\ z = 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

egyenest. Vizsgáljuk meg a térelemek egymáshoz viszonyított helyzetét, majd határozzuk meg az A-t tartalmazó, e-vel és f-el párhuzuamos síkot!

Megoldás: Az e egyenes irányvektora $\mathbf{v_e} = (3, 6, -2)$, az f egyenesé pedig $\mathbf{v_f} = (-2, -3, 5)$. Mivel a két irányvektor nem egymás számszorosa, így az egyenesek nem párhuzuamosak. Ezáltal egyértelműen létezik egy olyan sík, ami mindkét egyenessel párhuzuamos, és átmegy a ponton. Ezen sík normálvektorának merőlegesnek kell lennie mindkét egyenesre, vagyis úgy számolhatjuk ki, hogy a két irányvektort vektoriálisan szorozzuk:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v_e} \times \mathbf{v_f} = (36, -11, 3).$$

Ekkor a sík egyenlete:

$$36x - 11y + 3z = \langle \overrightarrow{OA}, \mathbf{n} \rangle = 92 \qquad ♣$$

3.2.4 feladat: Tekintsük a következő egyenest illetve síkot:

$$e : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad\qquad S_1 : x - y + 2z = 6.$$

Határozzuk meg a sík és az egyenes egymáshoz viszonyított helyzetét, és határozzuk meg az egyenes síkra vett merőleges vetületét!

MEGOLDÁS: Egy sík és egy egyenes vagy párhuzamos egymással, vagy metszők. Párhuzamosság pontosan akkor áll fenn, ha az irányvektor és a normálvektor skaláris szorzata nulla. Mivel $\mathbf{v} = (3, -1, 1)$ és $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$, így ebben az esetben ez nem teljesül, így az egyenesek metszők. Ellenőriznünk kell azt is, hogy az egyenes merőleges-e a síkra (az irányvektor a normálvektor skalárszorosa) ekkor ugyanis a merőleges vetület egyetlen pont, a metszéspont. Mivel jelen pillanatban ez az eset sem áll fenn, így a vetület egy egyenes. Az egyenlet meghatározására kétféle lehetőséget is ismertetünk.

Mindkét megoldási módszer esetében szükségünk van az egyenes és a sík metszéspontjára. Beírva az egyenesből kapott koordinátákat a sík egyenletébe:

$$\begin{gathered} 2 + 3t + t + 2(-1 + t) = 6, \\ 6t = 6, \\ t = 1, \end{gathered}$$

vagyis a metszéspont $M(5, -1, 0)$.

A továbbiakban az egyik megoldás az, hogy meghatározzuk a vetület irányvektorát. Ez az eredeti irányvektor normálvektorra merőleges komponense:

$$\mathbf{v_p} = \left(\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{n}\|^2} \right) \cdot \mathbf{n} = (1, -1, 2).$$

amiből $\mathbf{v_m} = \mathbf{v} - \mathbf{v_p} = (2, 0, -1)$, amiből a vetület egyenlete:

$$e_m : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Egy másik lehetőség az, hogy meghatározzuk a vetület egy másik pontját, és felírjuk a két ponton átmenő egyenes egyenletét. Egy másik pontot úgy kaphatunk, hogy az e egyenes egy M-től különböző pontját levetítjük a síkra. A $t = 0$ paraméter választása mellett legyen ez a pont $P(2, 0, -1)$.

Ennek a pontnak a merőleges vetülete pedig előáll úgy, mint a ponton átmenő $\mathbf{n}$ irányvektorú egyenes S_1-el való metszőspontja (a merőleges vetítés iránya a sík normálvektora). Ennek az egyenesnek az egyenlete (a merőleges vetületet P_m-el jelölve):

$$PP_m : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

amiből a P_m metszéspontra:

$$2 + t + t + 2(-1 + 2t) = 6,$$
$$t = 1,$$

vagyis $P_m(3, -1, 1)$. Ekkor az irányvektor $\overrightarrow{MP_m} = (-2, 0, 1)$, ami ugyanazt adja, mint az előző számolás. ♣

3.2.5 megjegyzés: Ha kezdetben az derült volna ki, hogy a sík és az egyenes párhuzamosak, akkor ez a megoldási menet nem lett volna jó, némi módosításra szorul. A második gondolatmenet majdnem úgyanúgy működik, csak mivel nincsen metszéspont, két pontot kell levetítenünk. Az első megoldás már nem vihető át egyszerűen. Mivel az egyenes párhuzamos a síkkal, így a vetület irányvektora azonos az eredeti egyenes irányvektorával. A vetület egy pontját meg úgy kaphatjuk meg, hogy egy tetszőleges pontot levetítünk.

3.2.6 feladat: Vegyük a következő síkot:

$$S_2 : 2x - y = z + 3.$$

Határozzuk meg az előző S_2 és az előző feladatbeli S_1 egymáshoz viszonyított helyzetét, és a metszésvonaluk egyenletét!

Megoldás: Mivel a két normálvektor nem egymás skalárszorosa, így a síkok nem párhuzamosak, vagyis pontosan egy egyenesben metszik egymást. A két egyenletből közvetlenül is megkapható lenne a paraméter nélküli egyenlet, a legegyszerűbb azonban, ha megadunk két olyan pontot, amely mindkét síkon rajta van. Ez azt jelenti, hogy kell egy olyan (x, y, z) hármas, amely mindkét egyenletet kielégíti. Ekkor a metszésvonal a két pontot összekötő egyenes.

S_1-ből kifejezve x-et, $x = y - 2z + 6$. Ezt beírva S_2-be:

$$2(y - 2z + 6) - y = z + 3,$$
$$y = 5z - 9.$$

Ha z-t nullának választanánk, ekkor $y = -9$ és $x = -3$, vagyis a $P(-3, -9, 0)$ pont rajta van mindkét síkon, és így a metszésponton is. $z = 1$ esetén pedig $Q(0, -4, 1)$ adódik. Ebből az irányvektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (3, 5, 1)$, amiből a metszésvonal egyenlete:

$$S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -9 + 5t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad ♣$$

3.2.7 megjegyzés: Általánosan megoldva az egyenletet, éppen a paraméteres egyenletrendszert kapjuk. Az megoldás során a rendezéskor az $y = 5z - 9$ alakhoz jutottunk. Ha z értékét paraméternek választjuk, (legyen $z = t$) akkor $y = -9 + 5t$, valamint $x = y - 2z + 6 = -3 + 3t$, ami éppen az egyenlet paraméteres egyenletrendszerét adná.

3.3. Térelemek távolsága

Három dimenzióban a pontot, az egyenest és a síkot térelemeknek nevezzük. Definiálni fogjuk térelemek távolságát, és meg fogjuk mutatni, hogy a korábban tanultak segítségével hogyan számolhatóak ki.

Általános esetben két térbeli ponthalmaz távolságán a ponthalmazok között fellépő távolságok minimumát értjük. Abban a speciális esetben, ha a ponthalmazok a korábban felsorolt három térelem közül kerül ki, meg is tudjuk mondani, hogy melyik ez a távolság. Mivel ez függ a térelemek egymáshoz viszonyított helyzetétől, így szépen sorban végigvesszük a lehetőségeket. Amennyiben két térelemnek van közös pontja, a távolságuk nulla:

3.3.1 definíció: Két térelem **illeszkedő**, ha egyik részhalmaza a másiknak. Két térelem **metsző**, ha nem illeszkedő, de van közös pontjuk.

3.3.2 állítás: Illeszkedő illetve metsző térelemek távolsága nulla.

A legegyszerűbb esetben az egyik térelem egy pont:

3.3.3 definíció: Két pont távolsága az őket összekötő szakasz hossza.

3.3.4 definíció: Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre bocsájtott merőleges szakasz hossza.

Az eddig tanultak alapján ezt a távolságot ki is tudnánk számolni: a merőleges szakasz talppontja megkapható úgy, hogy felírjuk az egyenes irányvektorával mint normálvektorral a ponton áthaladó sík egyenletét. A talppont ennek a síknak és az egyenesnek a metszéspontja. Ennél azonban egyszerűbb lehetőséget biztosít a következő állítás:

3.3.5 állítás: Legyen adott a P pont, és a $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes. Ekkor:

$$d_{Pe} = \frac{\|\overrightarrow{RP} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|},$$

ahol R az e egyenes tetszőleges pontja.

3.3.6 definíció: Pont és sík távolsága a pontból a síkra bocsájtott merőleges szakasz hossza.

Ez a távolság is meghatározható az eddig szerzett ismeretek segítségével: a merőleges szakasz talppontja megkapható úgy, hogy felírjuk a sík normálvektorával mint irányvektorral a ponton áthaladó egyenes egyenletét. A talppont ennek az egyenesnek és a síknak a metszéspontja. Az előző esethez hasonlóan azonban most is van kész képlet a távolság meghatározására:

3.3.7 állítás: Legyen adott a P pont, és az $\mathbf{n}$ normálvektorú S sík. Ekkor:

$$d_{PS} = \frac{|\langle\overrightarrow{RP}, \mathbf{n}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|},$$

ahol R az S sík tetszőleges pontja.

3.3.8 feladat: Legyen adott a következő pont, egyenes és sík:

$$P(2,3,-1), \qquad e : \begin{cases} x = 3-2t \\ y = -2+t \\ z = 5 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad S : 2x - y + 4z - 5 = 0.$$

Vizsgáljuk meg a P-nak az e-hez és S-hez viszonyított helyzetét, és határozzuk meg a d_{Pe}, d_{PS} távolságokat!

Megoldás: Látható, hogy a P pont nincsen rajta sem az egyenesen, sem pedig a síkon, így a keresett távolságokat a fenti képletek alapján számoljuk.

P-nek az e-től vett távolságához szükségünk van e irányvektorára, valamint egy R pontjára. Az egyenes irányvektora a paraméteres egyenletrendszerből $\mathbf{v} = (-2,1,0)$, a $t = 0$ választás mellett pedig $(3,-2,5)$ jó lesz R-nek. Ekkor $\overrightarrow{RP} = (-1,5,-6)$, amiből a távolság:

$$d_{Pe} = \frac{\|\overrightarrow{RP} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|(6,12,9)\|}{\|(-2,1,0)\|} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{5}}.$$

Hasonlóképpen a síktól vett távolság kiszámításához szükségünk van a sík normálvektorára, valamint egy R pontjára. Az egyenletből $\mathbf{n} = (2,-1,4)$. Ahhoz, hogy megadjuk a sík egy pontját, nem kell mást csinálnunk, mint találni egy (x,y,z) hármast, ami kielégíti az $2x - y + 4z - 5 = 0$ egyenletet. Egy ilyen pont például az $R(0,-5,0)$. Ekkor $\overrightarrow{RP} = (2,8,-1)$, vagyis a távolság:

$$d_{PS} = \frac{|\langle \overrightarrow{RP}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{8}{\sqrt{21}}.$$

Ellenőrzésképpen kiszámolhatjuk mindkét távolságot egy másik R pontra. Ha ugyanazt az eredményt kapjuk, akkor valószínűleg jól számoltunk. ♣

Egyenesek és síkok távolsága függ az egymáshoz viszonyított helyzetüktől. Ha a térelemeknek van közös pontjuk, vagyis metszők vagy illeszkedők, akkor a távolságuk nulla. Ellenkező esetben vagy párhuzamosak, vagy két egyenes esetén lehetnek még kitérőek is.

3.3.9 definíció:

- **Párhuzamos egyenesek távolsága**: bármelyik egyenes egy tetszőleges pontjának a másik egyenestől mért távolsága, azaz a két egyenest összekötő, mindkettőre merőleges szakasz hossza.
- **Kitérő egyenesek távolsága:** az őket összekötő, mindkettőre merőleges szakasz hossza. Egy egyenes és egy vele párhuzamos sík távolsága az egyenes tetszőleges pontjának a síktól mért távolsága.
- Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík tetszőleges pontjának a másik síktól mért távolsága.
- Két kitérő egyenes távolsága az egyeneseket tartalmazó párhuzamos síkok távolsága.

3.3.10 feladat: Tekintsük a következő két egyenest:

$$e: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2t \\ z = -2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad f: \begin{cases} x = -2 - 3u \\ y = 2 + u \\ z = 4 + u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Vizsgáljuk meg a két egyenes egymáshoz viszonyított helyzetét, és határozzuk meg a távolságukat!

Megoldás: Nézzük meg először, hogy a két egyenletnek van-e metszéspontja. A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 3 + 2t &= -2 - 3u, \\ -2t &= 2 + u, \\ -2 - t &= 4 + u. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből kivonva a felette lévőt $t-2 = 2$, $t = 4$. Ezt visszaírva az utolsóba $u = -10$, viszont ilyen értékekkel az első egyenlet nem teljesül, vagyis a két egyenesnek nincsen közös pontja. A paraméteres egyenletrendszerekből az egyenesek irányvektorai: $\mathbf{v_e} = (2, -2, -1)$, $\mathbf{v_f} = (-3, 1, 1)$. Mivel ezek nem egymás számszorosai, így az egyenesek nem párhuzamosak, vagyis kitérőek. Egy korábbi feladat szerint ekkor minden ponton át egyértelműen létezik olyan sík, amely mindkét egyenessel párhuzamos, és ezen síkok közös normálvektora a két irányvektor vektoriális szorzata:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v_e} \times \mathbf{v_f} = (-1, 1, -4).$$

Ekkor egyértelműen van egy olyan S_1 és S_2 sík, amelyek normálvektora $\mathbf{n}$, és tartalmazzák az e illetve f egyeneseket. Ezek a síkok párhuzamosak, és párhuzuamos síkok távolságát úgy kapjuk meg, hogy veszünk egy P pontot S_1-ről, és meghatározzuk a d_{PS_2} távolságot. Ez pedig képlet alapján:

$$\frac{|\langle \overrightarrow{RP}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|},$$

ahol $R \in S_2$. A P és R pontokat a legegyszerűbben a $t = u = 0$ paraméter választással kapjuk. Ekkor $P(3, 0, -2)$, $R(-2, 2, 4)$ amiből $\overrightarrow{RP} = (5, -2, -6)$, vagyis a keresett távolság:

$$d_{ef} = d_{S_1S_2} = \frac{|\langle \overrightarrow{RP}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{17}{\sqrt{18}}.$$

ezzel a keresett távolságot meghatároztuk. ♣

3.3.11 megjegyzés: Ha az előző számolást áttekintjük, akkor láthatjuk, hogy általános esetben két kitérő egyenes egyenes távolságát hogyan kapjuk: vegyünk a két egyenesen egy-egy pontot P-t és R-t, valamint az irányvektorok vektoriális szorzataként kapott $\mathbf{n}$-t, és ekkor a helyes képlet:

$$d_{ef} = \frac{|\langle \overrightarrow{RP}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

3.4. Térelemek szöge

A térelemek távolsága mellett számolni fogunk térelemek szögével is. Értelemszerűen egy pont nem zár be szöget más térelemekkel, így két egyenes, két sík, valamint egyenes és sík által bezárt szöget kell definiálnunk.

Ha visszagondolunk a két dimenziós esetre, a síkban két metsző egyenes négy szöget zár be, amelyek ugyan páronként egyenlőek, de a négy szög közül kettő különböző. Mivel ez a két szög 180°-ra egészíti ki egymást, így (ha csak nem mind a négy szög derékszög) az egyik szög hegyes, a másik pedig tompa. Definíció szerint a hegyesszöget választjuk a két egyenes szögének. Hasonló a helyzet a térben is, mindhárom esetben két szóbajövő szög van, de a térelemek szöge mindig legfeljebb 90°.

3.4.1 definíció: Koordinátákkal adott vektorok szögét ki tudjuk számolni a korábban tanult:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}$$

képlet alapján, így tudunk beszélni irány és normálvektorok szögéről. Ekkor:

- Két egyenes szöge az irányvektoraik szöge, ha ez a szög hegyesszög. Ha tompaszög, akkor 180°-ból kivonva őt kapjuk meg az egyenesek szögét.
- Egy egyenes és egy sík szöge 90°-ból kivonva az irány és a normálvektoraik szöge, ha ez a szög hegyesszög. Ha tompaszög, akkor belőle kivonva 90°-ot kapjuk az egyenes és a sík szögét.
- Két sík szöge a normálvektoraik szöge, ha ez hegyesszög. Ha tompaszög, akkor 180°-ból kivonva őt kapjuk meg a síkok szögét.

3.4.2 feladat: Tekintsük az alábbi egyeneseket és síkokat:

$$e : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad f : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$S_1 : x - y + 2z = 6, \qquad S_2 : 2x - y = z + 3.$$

Határozzuk meg az e, f egyenesek, S_1, S_2 síkok, valamint az e egyenes és az S_1 sík szögét!

Megoldás: A korábbi képletek alkalmazásához szükségünk van a két irány és a két normálvektorra. Az egyetlen dolog, amire ügyelnünk kell, hogy S_2 egyenletében a normálvektor harmadik koordinátájához a z-t át kell vinnünk a másik oldalra. Ekkor a keresett vektorok:

$$\mathbf{v_e} = (3, -1, 1), \quad \mathbf{v_f} = (-1, 2, -1), \quad \mathbf{n_1} = (1, -1, 2), \quad \mathbf{n_2} = (2, -1, -1).$$

A keresett szögek meghatározásához szükségünk van a $(\mathbf{v_e}, \mathbf{v_f})$; $(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})$ és $(\mathbf{v_e}, \mathbf{n_1})$ párok által bezárt szögekre:

$$\cos(\varphi^\star_{e,f}) = \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{v_f}\rangle}{\|\mathbf{v_e}\|\cdot\|\mathbf{v_f}\|} = \frac{-6}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}} \Longrightarrow \varphi^\star_{e,f} = 137,6^\circ,$$
$$\cos(\varphi^\star_{S_1,S_2}) = \frac{\langle \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}\rangle}{\|\mathbf{n_1}\|\cdot\|\mathbf{n_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} \Longrightarrow \varphi^\star_{S_1,S_2} = 80,4^\circ,$$
$$\cos(\varphi^\star_{e,S_1}) = \frac{\langle \mathbf{v_e}, \mathbf{n_1}\rangle}{\|\mathbf{v_e}\|\cdot\|\mathbf{n_1}\|} = \frac{6}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}} \Longrightarrow \varphi^\star_{e,S_1} = 42,4^\circ.$$

Ekkor a definíció alapján megvizsgálva a kapott értékeket adódnak a keresett szögek:

$$\varphi_{e,f} = 180^\circ - \varphi^\star_{e,f} = 42,4^\circ, \quad \varphi_{S_1,S_2} = \varphi^\star_{S_1,S_2} = 80,4^\circ, \quad \varphi_{e,S_1} = 90^\circ - \varphi^\star_{e,S_1} = 47,6^\circ. \quad \clubsuit$$

4. Lineáris algebra

4.1. Mátrixok

4.1.1 definíció: (mátrix) Egy téglalapba rendezett számtáblázatot **mátrix**nak nevezünk. A mátrix legfontosabb jellemzője a sorainak (n) illetve oszlopainak (m) száma. Az A mátrix i-dik sorának j-dik elemét a_{ij} jelöli. Az összes olyan mátrixnak a halmazát, amelynek n sora és m oszlopa van és elemei valós számok $\mathbb{R}^{n\times m}$ jelöli.

Mátrix tehát a következő alakú számtáblázat:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Ha a mátrix valamelyik dimenziója nagyobb mint 9, akkor a két indexet vesszővel választjuk el a félreértések elkerülése végett (de ilyen nagy méretű mátrixokkal nem fogunk számolni).

Egy mátrixot vagy úgy adunk meg, hogy felírjuk a teljes mátrixot, vagy megadjuk a típusát, (méretét) és valamilyen formulát, amellyel az elemei kiszámolhatóak. Egy ilyen esetre példa, ha azt mondjuk, hogy A az a 2×3-as mátrix, amelyre $a_{ij} = i^2 - j$. Ez a mátrix pedig nem más mint:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiálnunk kell, hogy hogyan végzünk műveleteket mátrixokkal. Ha belegondolunk, mátrixokra tulajdonképpen eddig is láttunk példát: minden korábbi (n-hosszú) vektorra tekinthetünk úgy, mint egy olyan mátrixra, amelynek 1 sora és n oszlopa van. Ekkor értelemszerűen adódik a definíció a mátrixok összegére, különbségére és számszorosára:

4.1.2 definíció: (műveletek mátrixokkal) Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Ekkor:

- A és B összege az az $n\times m$-es C mátrix, amelyre minden i, j esetén $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Jelölése $C = A + B$.
- A és B különbsége az az $n\times m$-es C mátrix, amelyre minden i, j esetén $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. Jelölése $C = A - B$.
- Ha α tetszőleges valós szám, akkor A α-szorosa az az $n\times m$-es C mátrix, amelyre minden i, j esetén $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. Jelölése $C = \alpha A$.

Összeadni és kivonni tehát csak azonos méretű mátrixokat tudunk, a műveleteket koordinátánként végezzük, és a műveletek eredménye mindig az eredetivel azonos méretű mátrix lesz.

4.1.3 definíció: (nullmátrix) Tetszőleges típus esetén **nullmátrix**nak hívjuk azt a mátrixot, amelynek minden eleme nulla.

Akárcsak a vektorműveletek esetén itt is teljesülnek a műveletekre a sima valós számoknál megismert tulajdonságok:

4.1.4 állítás: Legyen $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $A + B = B + A$, az összeadás kommutatív,
- $A + (B + C) = (A + B) + C$, az összeadás asszociatív,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, az összeadás a valós számmal való szorzásra nézve disztributív,
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, a valós számok összeadása a mátrixszal való szorzásra nézve disztributív,
- $A + 0 = A$, $A + (-A) = 0$, $0A = 0$.

ahol az utolsó egyenlőségben az első nulla a számot, a második pedig a nullmátrixot jelöli.

4.1.5 feladat: Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg a $2A - 3B$ mátrixot!

Megoldás: A definíció szerint a számmal való szorzást és a kivonást is koordinátánként végezzük, tehát az eredmény: $2A - 3B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -5 & -12 & 3 \end{pmatrix}$. ♣

A vektorokhoz képest a mátrixoknál két új műveletet definiálunk. Az első a transzponálás, a második a mátrixok egymással való szorzása. A transzponálás egy adott mátrixhoz rendel egy másikat, míg a szorzás két mátrixhoz rendel egy harmadikat.

4.1.6 definíció: (transzponálás) Az A $n \times m$ típusú mátrix **transzponált**ja az az $m \times n$ típusú $A^\top$ mátrix, amelyre minden i, j esetén $a^\top_{ij} = a_{ji}$.

A transzponálás során tehát az eredeti mátrix soraiból oszlopok, az oszlopokból pedig sorok lesznek. A transzponálásra teljesülnek az alábbi igen egyszerű azonosságok:

4.1.7 állítás: Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $(A^\top)^\top = A$, kétszeri transzponálás visszaadja az eredeti mátrixot,
- $(\alpha A)^\top = \alpha(A^\top)$, a transzponálás és a valós valós számmal való szorzás felcserélhető,
- $(A \pm B)^\top = A^\top \pm B^\top$, az összeadás (kivonás) és a transzponálás felcserélhető.

Az utolsó művelet amit definiálunk, az két mátrix szorzata lesz:

4.1.8 definíció: (mátrixok szorzása) Legyen az A mátrix $n \times k$, a B mátrix pedig $k \times m$ típusú. Ekkor az A és B mátrixok AB szorzata az az $n \times m$ típusú C mátrix, amelyre minden i, j esetén:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj}.$$

Látható, hogy a szorzás messze a legbonyolultabb mátrixművelet. A definíció szerint nem lehet bármilyen típusú mátrixokat összeszorozni. A szorzatban első helyen álló mátrix oszlopainak száma megegyezik a szorzatban második helyen álló mátrix sorainak számával. Ezt a feltételt **kompatibilitási feltétel**nek nevezzük. A definíciót úgy jegyezhetjük meg a legkönnyebben, hogy *a szorzatmátrix c_{ij} eleme nem más mint az A mátrix i-dik sorának, és a B mátrix j-dik oszlopának skaláris szorzata.*

4.1.9 feladat: Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg a AB szorzatot!

MEGOLDÁS: A kompatibilitási feltétel teljesül, hiszen az A mátrixnak három oszlopa, B-nek pedig ugyanennyi sora van. Az eredmény tehát egy 2×1-es mátrix lesz. A definíció szerint ekkor $C = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$. ♣

A szorzás leginkább szembetűnő tulajdonsága, hogy egyáltalán **nem kommutatív**. Olyannyira nem, hogy az előző feladatban szereplő esetben az AB szorzat eredménye a fenti 2×1-es mátrix, míg a BA szorzat nem is értelmezhető, hiszen nem teljesül a kompatibilitási feltétel.

Elképzelhető az is, hogy mindkét irányú szorzás értelmes, az eredmény mégsem azonos. Ha például A egy $1 \times n$-es, B pedig egy $n \times 1$-es mátrix, akkor AB és BA is definiálva van, de nem egyenlők, hiszen AB típusa 1×1-es, BA típusa pedig $n \times n$-es.

Ha mindkét tényező $n \times n$-es, akkor a szorzat mindkét irányban elvégezhető, és az eredmény szintén $n \times n$-es mátrix lesz, a kommutativitás az esetek túlnyomó többségében azonban ekkor sem teljesül. Az $n \times n$ típusú mátrixoknak külön nevük van, **négyzetes mátrix**oknak nevezzük őket. A mátrixok szorzására a következő tulajdonságok teljesülnek:

- $AB \neq BA$, azaz a mátrixszorzás nem kommutatív,
- $A(BC) = (AB)C$, azaz a mátrixszorzás asszociatív,
- $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$, azaz a mátrixok összeadása a mátrixszal való szorzásra nézve disztributív,
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

A fenti azonosságok úgy kell érteni, hogy ha a bal oldalon lévő művelet elvégezhető és értelmes, akkor a jobb oldal is elvégezhető, és a két oldal eredménye ugyanaz minden ilyen esetben.

4.2. Determináns

Minden $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrixhoz hozzárendelhető egy szám, amelyet a mátrix determinánsának nevezünk, és $\det(A)$-val vagy $|A|$-val jelöljük. Az alábbiakban a determináns rekurzív definícióját ismertetjük:

4.2.1 definíció: (determináns) Az $n \times n$-es A mátrix determinánsa az első sor szerint kifejtve:

$$\det(A) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n}$$

Ahol A_{ik} az a_{1k} elemhez tartozó aldetermináns. Ezt úgy kapjuk, hogy az eredeti mátrixból elhagyjuk az első sort és a k-dik oszlopot, és tekintjük a megmaradó $(n-1)\times(n-1)$-es mátrixhoz tartózó determinánst. Az A_{1k} aldeterminánsokat ugyanígy visszavezethetjük $(n-2)\times(n-2)$ típusú mátrixok determinánsára, és így tovább, amíg végül oda jutunk, hogy csupa 1×1 típusú mátrix determinánsát kell kiszámolnunk. Ez definíció szerint legyen a mátrix egyetlen eleme.

4.2.2 megjegyzés: A 2×2-es mátrix determinánsa ekkor:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

4.2.3 feladat: Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát!

Megoldás: Definíció szerint:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 10 - 4,$$

vagyis a keresett determináns értéke 5. ♣

A definíció szerint kiszámolt determinánsra azt mondjuk, hogy a determinánst *kifejtettük az első sora szerint.* Természetesen a determinánst nem csak az első sora szerint lehet kifejteni, hanem bármely sora vagy oszlopa szerint is. Az első sor szerinti kifejtés során a tagok előjelei úgy jöttek sorba, hogy $+, -, +, -, \ldots$. Általános esetben:

- Páratlanadik sor/oszlop szerint kifejtve a determinánst a tagok előjelei $+, -, +, -, \ldots,$
- Párosadik sor/oszlop szerint kifejtve a determinánst a tagok előjelei $-, +, -, +, \ldots$.

4.2.4 feladat: Határozzuk meg az előző feladatban szereplő A mátrix determinánsát úgy, hogy azt a második oszlopa szerint fejtjük ki!

Megoldás: Definíció szerint a második oszlop szerint a kifejtés a következő:

$$\det(A) = -a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} - a_{32}A_{32},$$

ahol értelemszerűen a A_{22} például azt az aldeterminánst jelöli, hogy elhagyjuk a mátrix második sorát és oszlopát. Ekkor felírva a kifejtést:

$$\det(A) = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 0 - 5 = 5,$$

vagyis eszerint a kifejtés szerint is 5 a determináns értéke. ♣

Definíció szerint számolni egy mátrix determinánsát már 3×3-as esetben sem rövid, nagyméretű mátrixok esetén viszont már kifejezetten hosszadalmas folyamat.

Egy 4×4-es determináns definíció szerinti kifejtésében például (ha a mátrixban nincsen 0 elem) négy darab 3×3-as aldetermináns van, amelyek mindegyike három további 2×2-es determinánst tartalmaz. Ez összesen 24 tagot jelent. Szerencsére a determinánsok kiszámolására számos tétel áll rendelkezésre, amelyek megkönnyítik ezt a számolást. Először néhány egyszerűbb állítást ismertetünk:

- Mátrix determinánsa nem változik ha a mátrixot transzponáljuk.
- Ha a mátrixban két sort vagy oszlopot felcserélünk, akkor a determináns az ellentettjére változik.
- Ha a mátrix két sora vagy oszlopa megegyezik, akkor a determinánsa nulla.
- Ha a mátrixban van csupa nullából álló sor vagy oszlop, akkor a determináns szintén nulla.
- Alsó vagy első háromszögmátrix determinánsa a főátlóban szereplő elemek szorzata.
- Ha egy mátrix valamely sorát vagy oszlopát megszorozzuk egy α valós számmal, akkor a determinánsa is az α-szorosa lesz.

Az ötödik állítás mutatja a determináns egy jellemző tulajdonságát. Ha a mátrixban kellően sok nulla van (a főátló alatti összes elem nulla) akkor a kifejtésben egyetlen tag szerepel, ez a főátlóbeli elemek szorzata. Nullákat pedig a következő alapvető tétel segítségével hozhatunk létre:

4.2.5 tétel: Mátrix determinánsának az értéke nem változik, ha valamelyik sorához (vagy oszlopához) elemenként hozzáadjuk egy másik sor (vagy oszlop) tetszőleges számszorosát.

Az fenti feladatban például az A mátrix determinánsa nem változik, ha a harmadik oszlopához hozzáadjuk az első oszlopát, amit a harmadik oszlop szerint kifejtve újra megkapjuk az 5-öt mint végeredményt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Általános esetben mindig ezen tétel segítségével fogunk elemeket kinullázni, és csak olyan sor (vagy oszlop) szerint fogunk determinánst kifejteni, aminek csak egyetlen nem nulla eleme van.

4.2.6 feladat: Milyen x értéke esetén lesz az alábbi determináns értéke 0:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

MEGOLDÁS: Tekintsük a második oszlopot. Ott már szerepel egy nulla, és szerepel egyes is. Mivel a determináns az előző tétel szerint nem változik ha sorhoz, (vagy oszlophoz) hozzáadjuk egy másik sor (oszlop) számszorosát, így könnyedék ki tudjuk nullázni az oszlopban szereplő kettest: vonjuk ki az első sorból a harmadik kétszeresét. Ezután fejtsük is ki a determinánst a második oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1-2x \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 6 & -1-2x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 2(-1-2x) = -4x - 8,$$

vagyis a determináns akkor nulla, ha $-4x - 8 = 0$, tehát $x = -2$. ♣

4.2.7 feladat: Határozzuk meg az alábbi 4×4-es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

MEGOLDÁS: Meg kell választanunk, hogy melyik sor vagy oszlop szerint fejtsük ki a determinánst, eszerint végezzük az elemek kinullázását. Sokféleképpen tehetjük ezt meg, szembetűnő, hogy a harmadik sor második eleme 0. Mivel ennek a nullának a sorában és oszlopában is van egyes, így a legcélszerűbb ezt a sort vagy oszlopot kinullázni.

Adjuk tehát hozzá az első sorhoz a második kétszeresét, a negyedikhez pedig a háromszorosát, és fejtsük ki a második oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \\ 11 & 0 & 8 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 & -7 \\ -3 & 1 & 5 \\ 11 & 8 & -11 \end{vmatrix}.$$

Az így kapott mátrixban nulla ugyan nincsen, de a második sor második eleme egyes. Ezzel az egyessel ki tudjuk nullázni a megfelelő sort vagy oszlopot, nullázzuk ki most a második sort. Ennek érdekében az első oszlophoz adjuk hozzá a második háromszorosát, a harmadikból meg vonjuk le az ötszörösét, és fejtsük ki a determinánst a második sor szerint:

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & -7 \\ -3 & 1 & 5 \\ 11 & 8 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29 & 7 & -42 \\ 0 & 1 & 0 \\ 35 & 8 & -51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29 & -42 \\ 35 & -51 \end{vmatrix}$$

ami a definíció szerint $29 \cdot (-51) - (-42) \cdot 35 = -9$, vagyis a determináns értéke -9. ♣

Látható, hogy a fenti tétel segítségével $2-3$ kivonás segítségével elég gyorsan csökkenthető a determináns mérete, így rövid számolás után egyetlen 2×2-es determinánst kaptuk. A definíció szerinti kifejtés ennél sokkal hosszabb lett volna. Még egy tételt említünk meg a determinásnok témaköréből:

4.2.8 tétel: (determinánsok szorzástétele) Legyen A és B két $n \times n$-es mátrix. Ekkor értelmes az AB szorzat, és teljesül a $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ összefüggés.

Tudjuk, hogy a mátrixok szorzása még azonos méretű négyzetes mátrixok esetén sem kommutatív, vagyis $AB \neq BA$, de a fenti tétel egyszerű következménye, hogy $\det(AB) = \det(BA)$.

4.3. Vektorterek

Ebben a fejezetben a vektortér absztrakt fogalmát, és pár egyszerűbb tulajdonságát tárgyaljuk, aminek a három dimenziós vektorok egy speciális esete volt.

4.3.1 definíció: (vektortér) Legyen V egy tetszőleges halmaz. V-t valós vektortérnek hívjuk, ha:

- V bármely két a és b eleméhez hozzá van rendelve egy $a+b$-vel jelölt eleme V-nek, amelyet a és b összegének nevezünk, és erre az összeadásra teljesülnek a következő tulajdonságok:
  - $a+b=b+a$,
  - $(a+b)+c=a+(b+c)$,
  - létezik egy 0-val jelölt zéruseleme V-nek úgy, hogy minden $a \in V$-re $a+0=a$,
  - minden $a \in V$-re létezik egy $-a$-val jelölt eleme V-nek, amelyet a ellentettjének hívunk, és $a+(-a)=0$.
- minden $\alpha \in \mathbb{R}$-hez és $a \in V$-hez hozzá van rendelve egy $\alpha a \in V$ elem, amit α és a szorzatának hívunk, és erre a szorzásra teljesül, hogy:
  - $1a=a$,
  - $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$,
- minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$ esetén:
  - $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$,
  - $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$.

Vektorteret alkotnak a következő V halmazok:

- a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza,
- a komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza,
- a sík irányított szakaszai,
- a tér irányított szakaszai,
- $\mathbb{R}^{n\times m}$, vagyis az összes $n \times m$ típusú valós mátrix,
- a rendezett valós szám n-esek $\mathbb{R}^n$ halmaza,
- az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények halmaza.

Érdemes végiggondolni, hogy az egyes halmazok elemeire tényleg teljesülnek a fenti tulajdonságok. A legérdekesebb az utolsó példa. Mivel folytonos függvények összege is folytonos, így értelmes az összeadás ezen a halmazon. Ez a művelet kommutatív és asszociatív, és az azonosan nulla függvény lesz a vektortér nulleleme, a (-1)-szerese pedig az ellentettje. A többi tulajdonság is teljesül.

A vektorterekben három (négy) alapvető fogalmaz fogunk bevezetni, mind a három fogalom vektorok egy halmazára vonatkozik. A vektortér elemeit absztrakt értelemben vektornak fogjuk nevezni, így ezzel a szóhasználattal élve a mátrixok és a függvények is „vektorok”.

4.3.2 definíció: (lineáris kombináció) Adottak a $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ vektorok, valamint az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \mathbb{R}$ valós számok. Ekkor a $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n$ vektort a v_i vektorok α_i együtthatókkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

4.3.3 definíció: (lineáris függetlenség) Vektorok egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ halmazát lineárisan függetlennek nevezzük, ha egy lineáris kombinációjuk akkor és csak akkor lehet nulla, ha minden együttható nulla, vagyis $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$-ból következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

4.3.4 definíció: (generátorrendszer) Vektorok egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ halmazát generátorrendszernek nevezzük, ha a vektortér minden v eleme előáll ezen vektorok egy lineáris kombinációjaként, vagyis minden v-re vannak olyan α_i együtthatók, amelyre $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.

4.3.5 definíció: (bázis) Vektorok egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ halmazát bázisnak nevezzük, ha lineárisan függetlenek és generátorrendszert alkotnak.

4.3.6 feladat: Tekintsük a szokásos térbeli vektorainkat, vagyis a három hosszú számhármasokat, ezek vektorteret alkotnak. Legyen adott ebben a vektortérben a következő négy vektor:

$$v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, 0),\ v_3 = (0, 0, 1),\ v_4 = (1, 1, 0).$$

és tekintsük a következő halmazokat:

$$H_1 = \{v_1, v_2\},\ H_2 = \{v_1, v_2, v_3\},\ H_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

A fentiek közül melyik halmaz vektorai lineárisan függetlenek, melyek alkotnak generátorrendszert illetve bázist?

Megoldás: Felírva a lineáris függetlenség definícióját belátható, hogy H_1 és H_2 elemei lineárisan függetlenek, H_3 viszont nem, mivel a $v_1 + v_2 - v_4$ nem triviális lineáris kombináció eredménye nullvektor.

H_1 elemei nem alkotnak generátorrendszert, hiszen az ő összes lineáris kombinációjuk harmadik koordinátája nulla, viszont H_2 elemeiből már minden vektor előáll. Ekkor H_3 - mivel bővebb H_2-nél - szintén generátorrendszert alkot.

Ebből pedig következik, hogy H_1 és H_3 nem bázis, hiszen az előbbi nem generátorrendszer, utóbbi nem független, H_2 viszont bázis a térbeli vektorok terében. ♣

A definíciók egyszerű következménye az alábbi két állítás:

4.3.7 állítás: Adott vektorok egy H halmaza. Ha H elemei lineárisan függetlenek, akkor H minden részhalmaza is lineárisan független.
Ha H elemei generátorrendszert alkotnak, akkor minden H-nál bővebb halmaz is generátorrendszert alkot.

Minden valós vektortérben végtelen sok bázis van. Így a bázis nem egyértelmű, viszont igaz a következő két tétel:

4.3.8 tétel: (dimenzió) Adott egy V valós vektortér, ekkor minden bázis azonos elemszámú (ugyanannyi vektorból áll). Ezt a közös elemszámot nevezzük a vektortér dimenziójának.

4.3.9 tétel: Ha adott a vektortérben egy rögzített bázis, akkor minden vektor egyértelműen áll elő ezen vektorok lineáris kombinációjaként (vagyis az α_i együtthatók egyértelműek).

Ez a tétel általánosítása a térbeli koordinátageometriában ismertetett tételnek. Ott azt mondtuk, hogy ha három vektor $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ nincsen egy síkban, akkor minden vektor egyértelműen előáll $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ alakban, és ezt az (α, β, γ) hármast neveztük a vektor koordinátáinak.

Az, hogy a térben három vektor nincsen egy síkban éppen azt jelenti, hogy lineárisan függetlenek, és mivel a tér három dimenziós, így ott három lineárisan független vektor egyben generátorrendszer, vagyis bázis is. Ekkor pedig a koordináták a fenti tétel következtében egyértelműek. A mi konkrét esetünkben az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ hármast rögzítettük bázisnak és abban írtuk fel a koordinátákat.

Fontos megjegyezni, hogy egy vektor koordinátái tehát nem magához a vektorhoz, hanem a rögzített bázishoz kapcsolódnak, tőle függenek. Más bázis esetén mások a vektor koordinátái is.

4.3.10 feladat: Tekintsük a következő három vektort:

$$v_1 = (2, -1, 3),\ v_2 = (0, 4, -1),\ v_3 = (3, 2, 0).$$

Lineárisan függetlenek-e ezek a vektorok? Bázist alkotnak-e? Ha igen, határozzuk meg a $v = (1, 4, 4)$ vektor koordinátáit ebben a bázisban!

MEGOLDÁS: Mivel három dimenziós térben vagyunk, így ha ezek a vektorok lineárisan függetleek akkor bázist is alkotnak. Határozzuk meg, hogy mi ennek a három vektornak egy általános lineáris kombinációja:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (2\alpha_1, -\alpha_1, 3\alpha_1) + (0, 4\alpha_2, -\alpha_2) + (3\alpha_3, 2\alpha_3, 0) =$$
$$(2\alpha_1 + 3\alpha_3, -\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, 3\alpha_1 - \alpha_2),$$

ami csak akkor nullvektor, ha mind a három koordináta nulla, vagyis:

$$\begin{array}{rcrcrl} 2\alpha_1 & & & + & 3\alpha_3 & = 0, \\ -\alpha_1 & + & 4\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = 0, \\ 3\alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = 0. \end{array}$$

Ezt pedig megoldjuk a szokásos módszerrel. A harmadik egyenletből kifejezhetjük α_2-t, beírva az első kettőbe:

$$\begin{array}{rcrl} 2\alpha_1 & + & 3\alpha_3 & = 0, \\ 11\alpha_1 & + & 2\alpha_3 & = 0, \end{array}$$

a második egyenlet háromszorosából kivonva az első egyenlet kétszeresét pedig $29\alpha_1 = 0$ adódik. Ebből visszaírva kapjuk, hogy az egyenletrendszer egyetlen megoldása, hogy mindhárom együttható 0.

A fenti három vektor tehát bázist alkot a tér vektorai között. Ha a $v = (1, 4, 4)$ koordinátáit akarjuk megkapni, akkor meg kell határoznunk, hogy milyen α_i értékek mellett adja a lineáris kombináció éppen a v vektort. Ez pedig ugyanahhoz az egyenletrendszerhez vezet, a különbség csak annyi, hogy a jobb oldalon nem nullák állnak, hanem 1, 4 és 4. Ennek a megoldása $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$ és $\alpha_3 = -1$, vagyis a koordináták $(2, 2, -1)$. ♣

Láthatjuk tehát, hogy a vektorterekben a koordinátákkal való számolások lineáris egyenletrendszerekhez vezetnek. Ezért a továbbiakban a lineáris egyenletrendszerek megoldási módszereivel foglalkozunk.

4.4. Lineáris egyenletrendszerek

Az m ismeretlent és n egyenletet tartalmazó lineáris egyenletrendszer általános alakja a következő:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n, \end{array}$$

ahol $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ adott konstansok, x_i-k pedig az ismeretlenek. Ha bevezetjük az:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

mátrixokat, akkor ezt az egyenletrendszert tömören $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakban írhatjuk fel. A az egyenletrendszer együtthatatómátrixa, $\mathbf{b}$ pedig az egyenletrendszer jobb oldala.

Megjegyezzük, hogy ha az A mátrix oszlopait rendre $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots \mathbf{a_m}$ jelöli, akkor az egyenletrendszer olyan alakban is írható, hogy

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \dots + x_m\mathbf{a_m} = \mathbf{b}.$$

Lényegében tehát nekünk csak az A mátrixra és a $\mathbf{b}$ vektorra van szükségünk, ezért bevezetjük a kibővített mátrix fogalmát, amikor az A mellé odaírjuk egy vonal mögé a $\mathbf{b}$ vektort is:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Ez a kibővített mátrix tehát egyértelműen reprezentálja az egyenletrendszert. Vizsgáljuk meg, hogy az egyenletrendszeren végzett ekvivalens átalakításokat hogyan fordíthatjuk le a mátrixok nyelvére:

- *A mátrix bármelyik két sorát felcserélhetjük*, hiszen az egyenletek sorrendje nem számít.
- *Bármely sort megszorozhatjuk vagy eloszthatjuk egy nem nulla számmal*, hiszen az egyenletekkel is csinálhatjuk ugyanezt.
- *Bármely sorhoz hozzáadhatjuk egy sor számszorosát* mert az egyenleteknél ez ekvivalens átalakításnak számít.

Ezek a lépések nagyon hasonlóak a determináns átalakításának a lépéseihez, a legfontosabb különbség azonban, hogy itt csak sorokkal végezhetünk műveleteket. Ezek a *Gauss elimináció* lépései.

A célunk is nagyon hasonló a determináns kifejtésénél kitűzött célokhoz. A harmadik lépés segítségével tudunk a mátrixban nullákat létrehozni, ami éppen annak felel meg, hogy az egyik egyenletből kifejezzük az egyik változót és behelyettesítjük a másikba. Az egyenletrendszer típusától függően a Gauss eliminációnak többféle végkimenetele lehet, így precíz definíció helyett egy feladaton keresztül mutatjuk be az algoritmust:

4.4.1 feladat: Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a Gauss elimináció segítségével:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & + & 4w & = & 10 \\ -x & + & y & + & 2z & + & w & = & 1 \\ & & y & & & + & w & = & 3 \end{array}$$

MEGOLDÁS: Négy egyenletünk és négy ismeretlenünk van, a kibővített mátrix a következőképpen néz ki:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 10 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Mi a Gauss elimináció célja? Ha a kibővített mátrix olyan lenne, hogy a bal oldalon az egységmátrix állna, akkor készen lennénk, hiszen akkor a jobb oldalon éppen a keresett megoldás állna. Persze nem biztos, hogy ez megvalósítható, mert az egyenletnek nincsen, vagy végtelen sok megoldása van, de ez a motiváció. Először arra törekszünk, hogy *felső háromszögmátrix*unk legyen. Szeretnénk tehát sorban kinullázni az főátló alatti elemeket:

A bal felső elem már 1-es, így azzal nem kell foglalkoznunk. *Vonjuk ki az első sort a másodikból, és adjuk hozzá a harmadikhoz*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Az első oszlopot tehát kinulláztuk, így a továbbiakban az első sorral nem is törődünk. Ha ugyanis az első sort hozzáadnánk vagy kivonnánk valamelyik másikból az elrontaná a kinullázott első oszlopot. Tekintsük a második oszlop utolsó három elemét. Az a_{22} helyen szeretnénk egy egyest, a másik kettőn meg nullát. Ezt többféleképpen is megtehetjük, annak érdekében azonban, hogy elkerüljük a törtszámokat, ezt a sorcserével a legkönnyebb elérni. *Cseréljük fel a második és a negyedik sort, majd az új második sor kétszeresét vonjuk ki a harmadikból és a negyedikből*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Mivel a_{43} már nulla, így megkaptuk a felső háromszögmátrixot, az egységmátrixhoz már csak egy lépés kell, *eloszjuk a harmadik sort hárommal*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ezzel a lépéssel a **Gauss elimináció** végére értünk. Az utolsó egyenletből megvan w értéke, és így a harmadik egyenletből adódik z, majd a másodikból kifejezhetjük y-t, az elsőből pedig x-et. Megtehetjük azonban, hogy az eliminációt végigvisszük, egészen addig míg a bal oldalon megkapjuk az egységmátrixot. Ennek az algoritmusnak a neve **Gauss-Jordán elimináció**.

Vonjuk ki tehát a második sorból a negyediket:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

majd *vonjuk ki az első sorból a másik hármat*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

vagyis az egyenletrendszer megoldása $x = 0$, $y = 1$, $z = -1$ és $w = 2$. Ellenőrzés után kapjuk, hogy ez valóban megfelelő. ♣

A Gauss elimináció tehát egy eljárás, amely segítségével nagyobb méretű egyenletrenszert is meg tudunk oldani lényegesen átláthatóbb módon. A cél az, hogy a bal oldalon egységmátrixot hozzunk ki. Ez azonban csak akkor teljesíthető, ha az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.

Elképzelhető azonban, hogy az eredeti egyenletnek nem volt megoldása. Ez a fenti algoritmus során úgy jelenik meg a mátrixban, hogy az eljárás során kapunk egy olyan sort, amelyben minden együttható 0, de a hozzá tartozó b_i nem nulla. Mivel ez nem ellentmondás, így az egyenletrendszernek nem volt megoldása. Egy ilyenre is mutatunk egy rövid példát:

4.4.2 feladat: Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a Gauss elimináció segítségével:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 3y & = & 5 \\ 3x & + & 5y & = & 6 \end{array}$$

Megoldás: Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

Elkezdve az eliminációt a második és a harmadik sorból vonjuk ki az első kétszeresét illetve háromszorosát:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Ekkor pedig a harmadik sorból kivonva a második kétszeresét

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

kapunk egy olyan sort ami azt jelentené, hogy $0x + 0y = -2$, ami ellentmondás. Ez jelenti azt, hogy az egyenletrendszernek nincsen megoldása. ♣

Olyan eset is elképzelhető, hogy végtelen a megoldás nem egyértelmű, ilyenkor végtelen sok megoldás van. Ha az elimináció során kapunk egy olyan sort, amelynek minden eleme (beleértve a hozzá tartozó b_i-t is) akkor az a sor nem hordoz lényeges információt, a neki megfelelő egyenlet függött a többitől, azt el is hagyhatjuk. Végezetül lássunk erre is egy példát:

4.4.3 feladat: Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a Gauss elimináció segítségével:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 7y & + & 5z & = & 2 \\ 2x & - & 7y & + & 6z & = & 4 \\ 3x & - & 14y & + & 11z & = & 6 \end{array}$$

Megoldás: Írjuk fel a szokásos módon a kibővített mátrixot:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 6 & 4 \\ 3 & -14 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

A bal felső sarokban szereplő egyes megfelelő a kinullázásra, vonjuk ki a második és a harmadik sorból az első sor kétszeresét illetve háromszorosát:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

A második és a harmadik sor azonos, így a harmadik sorból kivonva a másodikat csupa nullát kapunk, amit el is hagyhatunk. Az elimináció így a következő (nem négyzetes) felső háromszögmátrixhoz vezetett:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Ilyen esetben a Gauss-Jordan eliminációt nem tudjuk folytatni, visszahelyettesítéssel kapjuk meg a megoldást: az utolsó egyenlettől haladunk visszafelé. Ez alapján $7y - 4z = 0$, ami egy egyenletet és két ismeretlent jelent. Látható, hogy z-t bárminek választhatjuk, vele kifejezhető y. Legyen z értéke egy t paraméter. Ekkor:

$$z = t,$$
$$y = \frac{4}{7}t.$$

Az első egyenletből pedig:

$$x = 2 + 7y - 5z = 2 - t.$$

Ez azt jelenti tehát, hogy az egyenlet megoldásai az

$$(x, y, z) = \left(2 - t, \frac{4}{7}t, t\right)$$

alakú hármasok, ahol t tetszőleges valós paraméter. A paraméteres megoldáshalmazt is le tudjuk ellenőrizni, az ellenőrzés úgy történik, hogy paraméteresen visszaírjuk a kapott értékeket a három egyenletbe. Ha mind a három egyenletben azonosságot kapunk (kiesnek a paraméterek és mindkét oldalon ugyanaz a szám marad) akkor jól számoltunk. ♣

4.4.4 megjegyzés: Az előző feladatnál z értékét szabadon választottuk. Mondhattuk volna azt is, hogy legyen $z = 7t$. Ez annyiból előnyös, hogy a végeredményben nem lesznek törtszámok. A megoldás ekkor $(x, y, z) = (2 - 7t, 4t, 7t)$ alakban írható fel. A kétféle eredmény valójában csak formailag különbözik, de ugyanazt a halmazt alkotják.

4.4.5 megjegyzés: Érdemes azt is látni, hogy ebben az esetben (3 változó esetén) a megoldásokat térben ábrázolva épp egy egyenes pontjait kaptuk. A megoldás az egyenes paraméteres egyenletrendszere. A két különböző alak ennek a két egyenesnek a két különböző felírása.

Azt kaptuk tehát, hogy egy lineáris egyenletrendszernek vagy nincs, vagy egyértelmű, vagy végtelen sok megoldása van. Érdemes átgondolni, hogy mikor teljesül az, hogy a megoldás egyértelmű, erre ugyanis szükségünk lesz a továbbiakban.

Precíz bizonyítás nélkül az algoritmusból látszik, hogy ha (kezdetben) az egyenletek száma több, mint az ismeretleneké, akkor kapni fogunk csupa nulla sorokat, vagyis vagy nincsen megoldás, vagy valamely egyenletek feleslegesek, ezzel az esettel nem foglalkozunk. Az is adódik, hogy ha több ismeretlenünk van, mint egyenlet, akkor a megoldás nem lehet egyértelmű. Így csak azt az esetet tárgyaljuk, amikor $n = m$, vagyis az együtthatómátrix négyzetes.

Láttuk, hogy a lineáris egyenletrendszer olyan alakban is írható, hogy:

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \ldots + x_m\mathbf{a_m} = \mathbf{b}.$$

Ha egyértelmű a megoldás, akkor a ineáris terek nyelvén ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{b}$ vektor egyértelműen áll elő az A mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként. Ez pedig szükségszerűen azt jelenti, hogy az oszlopvektorok lineárisan függetlenek. Négyzetes mátrix esetén ezt úgy lehet megfogalmazni, hogy az együtthatómátrix determinánsa nem nulla. Ezt érdemes tételként is megfogalmazni. Külön-külön is megfogalmazzuk a lineáris egyenletrendszerek és a vektorterek nyelvén.

4.4.6 tétel: Adott n darab $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Ez a vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független (és ekkor bázis is) ha a vektorokat egy mátrixba rendezve a kapott mátrix determinánsa nem nulla.

4.4.7 tétel: Egy n egyenletből és n ismeretlenből álló egyenletrendszer megoldása akkor és csak akkor egyértelmű, ha az egyenletrendszer együtthatómátrixának a determinánsa nem nulla.

4.5. Mátrixok inverze

4.5.1 definíció: (egységmátrix) Az olyan négyzetes mátrixokat, amelyeknek a főátlójában csupa egyes áll, mindenhol máshol pedig 0 egységmátrixnak nevezzük, és I-vel jelöljük. Minden n esetén vagy $n \times n$ típusú egységmátrix.

4.5.2 definíció: (inverz) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix. Ekkor azt a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot, amelyre teljesül az $AB = I$ összefüggés az A mátrix inverzének nevezzük, és A^{-1}-el jelöljük.

Könnyen látható, hogy nem minden mátrixnak létezik inverze. Például a nullmátrixot bármivel is szoroznánk nullmátrixot fogunk kapni, így nincsen a definíciónak megfelelő B. A determinánsok szorzástételéből azonban több is következik:

4.5.3 tétel: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha a determinánsa nem nulla. Ez az inverz egyértelmű, és igaz rá, hogy $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

A tétel kimondja tehát, hogy ha a determináns nem nulla akkor létezik inverz, egyetlen olyan mátrix van, amire teljesül a kívánt összefüggés, és ezzel a mátrixszal bármelyik irányból is szorozzuk meg A-t egységmátrixot kapunk.

Vizsgáljuk meg, hogy mi köze van a mátrixok inverzének a lineáris egyenletrendszerekhez. A Gauss(-Jordan) eliminációhoz hasonlóan ezt is egy feladaton keresztül mutatjuk be:

4.5.4 feladat: Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét. Keresünk tehát

Megoldás: Keressük tehát azt a

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

mátrixot, amelyre $AB = I$. Vegyük észre, hogy ez azt jelenti, hogy az A mátrixot beszorozva B oszlopaival, az egységmátrix oszlopait kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vagyis a keresett mátrix 9 elemét megkaphatjuk úgy, mint 3 olyan egyenletrendszer megoldása, amelynek az együtthatómátrixa minden esetben A, a jobb oldalai pedig az egységmátrix oszlopai.

B elemeit tehát megkaphatnánk mint a 3 kibővített mátrix Gauss-Jordan eliminációjának jobb oldala, nekünk azonban ebben a speciális esetben az A mindhárom esetben ugyanaz. Ez pedig azt jelenti, hogy az eliminációt végezhetjük egyben: írjuk a mátrixunk mögé egy vonallal elválasztva az egységmátrixot (a három egyenletrendszer jobb oldalát) és végezzük el az eliminációt úgy, hogy az A-ból egységmátrix legyen. Ekkor az egységmátrix helyén kapott mátrix lesz a keresett inverz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Az elimináció lépéseit pedig már ismerjük. Szorozzuk be a harmadik sort (-1)-el, és cseréljük ki az elsővel (hogy a bal felső sarokban egyes legyen):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az első oszlop „kinullázása” érdekében pedig vonjuk ki a második és harmadik sorból első sor háromszorosát és kétszeresét:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Ezek után a második oszloppal kell foglalkoznunk. Szorozzuk meg a második sort is (-1)-el, majd vonjuk ki a harmadik sorból. Ekkor már felső háromszögmátrixot kapunk:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

A felső háromszögmátrixunk már készen van. Szorozzuk meg a harmadik sort (-1)-el, hogy a főátló utolsó eleme is 1 legyen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right),$$

majd a Gauss-Jordan elimináció befejezéseként vonjuk ki az első sorból a másodikat és a harmadikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right).$$

Ez azt jelenti tehát, hogy a keresett inverz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Visszaszorzással érdemes ellenőrizni az eredményt. ♣

4.6. Mátrixok sajátértéke

A lineáris algebra utolsó fejezeteként a mátrixok sajátértékének és sajátvektorának fogalmát ismertetjük. Ehhez előbb szükség van némi kitérőre.

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$), v pedig egy n hosszú (oszlop)vektor ($v \in \mathbb{R}^n$). Ekkor az Av szorzat (mint mátrixszorzás) értelmes, és eredménye egy szintén n hosszú (oszlop)vektor. Ennek alapján a vektorok között definiálhatunk egy leképzést az A mátrix segítségével:

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad v \mapsto Av.$$

Egyszerűen látható, hogy az ilyen leképzésekre teljesül a következő két összefüggés:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathcal{A}\mathbf{v} + \mathcal{A}\mathbf{w},$$
$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathcal{A}\mathbf{v}.$$

Az ilyen leképzéseket úgy hívjuk, hogy *lineáris leképzések*. Jelen esetben azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy lineáris leképzés $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be.

Az egyszerűbb megértés érdekében tekintsük a sík vektorait ($\mathbb{R}^2$) és az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Elvégezve a szorzást kapjuk, hogy ebben az esetben a következő leképzés a következőképpen néz ki:

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = A\mathbf{v}.$$

Ez a leképzés tehát minden vektorhoz hozzárendel egy másik vektort oly módon, hogy az első koordinátáját változatlanul hagyja, a másodikat pedig az ellentettjére változtatja. Ha a vektorokat a sík pontjainak a helyvektorának tekintjük, akkor ez éppen az x tengelyre való tükrözésnek felel meg.

Felmerül a kérdés: van-e olyan vektor, aminek a képe párhuzamos az eredeti vektorral? Rövid gondolkodás után kapjuk, hogy kétféle vektor is van, amire ez a tulajdonság teljesül:

- a tükrözés az x tengely pontjait helybenhagyja, így ezen vektorokra $\mathcal{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}$,
- a tükrözés az y tengely pontjait a tengely másik oldalára képzi, így ezen vektorokra $\mathcal{A}\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

A sík többi vektora nem lesz párhuzamos a képével. Ennek a kérdésnek az általánosítása a sajátérték és a sajátvektor fogalma.

4.6.1 definíció: (sajátérték/sajátvektor) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az A mátrixnak a $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám a **sajátérték**e, ha van olyan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektor, amelyre $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Ezt a $\mathbf{v}$-t pedig a mátrix λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektor**ának nevezzük.

4.6.2 megjegyzés: Fontos kikötni, hogy a $\mathbf{v}$ nem lehet nulla, hiszen különben az $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ egyenlőség miatt minden valós szám sajátérték lenne a nullvektorral.

Hogyan lehet megtalálni egy mátrix sajátértékeit? Definíció szerint ez egy olyan lamda, amelyre van olyan nem nulla vektor, hogy $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vegyük észre, hogy ezt az összefüggést át lehet alakítani. Mivel az egységmátrixot bármilyen vektorral szorozva önmagát kapjuk, így:

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v}, \\ A\mathbf{v} &= \lambda I\mathbf{v}, \\ A\mathbf{v} - \lambda I\mathbf{v} &= \mathbf{0}, \\ (A - \lambda I)\mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ekvivalens átalakításokkal oda jutottunk, hogy λ pontosan akkor sajátérték, ha annak az egyenletrendszernek, amelynek a jobb oldala nullvektor, együtthatómátrixa pedig $(A - \lambda I)$ van nem triviális (csupa nulla) megoldása. Ez pedig akkor teljesül, ha az együtthatómátrix determinánsa 0. Ezt először egy tételben is megfogalmazzuk, majd példán keresztül tesszük láthatóbbá:

4.6.3 tétel: A λ valós szám akkor és csak akkor sajátértéke az A mátrixnak, ha $\det(A - \lambda I) = 0$. Ekkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok az $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ egyenletrendszer nem nulla megoldásai.

4.6.4 példa: Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás: Számoljuk ki a szükséges determinánst:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12$$

ami a másodfokú egyenlet megoldása alapján akkor nulla, ha $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$. A megfelelő sajátvektorok:

$\lambda_1 = 3$: a megoldandó egyenletrendszer:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Látható, hogy a két egyenlet egymás számszorosa, így az általános megoldás az első egyenletből:

$$-2x + 2y = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = y = c \quad\Longrightarrow\quad v_1 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -4$: a megoldandó egyenletrendszer:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

az általános megoldás pedig:

$$5x + 2y = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = -2c,\ y = 5c \quad\Longrightarrow\quad v_1 = \begin{pmatrix} -2c \\ 5c \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ezzel a keresett sajátértékeket és sajátvektorokat meghatároztuk. Általános esetben minden sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik, ha egy vektor jó, akkor annak minden számszorosa is jó. ♣

5. Többváltozós függvények

5.1. Alapfogalmak

Eddigi tanulmányaink során csak olyan függvényekkel foglalkoztunk, amelyek valós számokhoz rendeltek valós számokat. Ezeket egyváltozós függvényeknek neveztük. A függvények azonban lehetnek olyanok, hogy rendezett számpárokhoz, vagy számhármasokhoz, általános esetben szám n-esekhez rendelnek valós számokat:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \to y.$$

Az ilyen függvényeket n változós függvényeknek nevezzük. Egy egyszerű példa az a függvény amely minden rendezett szám n-eshez hozzárendeli a neki megfelelő vektor hosszát.

A félév hátralévő részében kétváltozós függvényekkel foglalkozunk. A kétváltozós függvények nagy előnye, hogy könnyen ábrázolhatóak térben. Ennek köszönhetően minden olyan, a későbbiekben tárgyalt fogalom, amely egyszerűen vihető át három, vagy még több változó esetére, könnyen elképzelhető szemléletes geometriai jelentéssel bír.

5.1.1 definíció: Legyen $\mathbb{R}^2$ a valós számokból álló rendezett (x, y) párok halmaza, $D \subset \mathbb{R}^2$ pedig ennek egy részhalmaza. Kétváltozós függvényeknek az

$$f : D \to \mathbb{R},\ (x, y) \to f(x, y)$$

típusú függvényeket nevezzük.

Mivel a rendezett (x, y) tekinthetünk úgy, mint a sík pontjai, így a kétváltozós függvényekre mondhatjuk azt, hogy a sík egy D részhalmazához rendel valós számokat. Függvényeket tehát az értelmezési tartományukkal és a hozzárendelési szabályukkal adhatunk meg:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}, \qquad f(x, y) = x^2 + y^3.$$

Ez a függvény tehát az első síknegyed belsejében van értelmezve, és minden ponthoz hozzárendeli az x koordináta négyzetének és az y koordináta köbének az összegét. Hasonlóan azonban az egyváltozós esethez általában itt sem adjuk meg az értelmezési tartományt, hanem azt a legbővebb D halmazt tekintjük a síkon, amelyen a hozzárendelési utasítás értelmezhető. Bonyoult szerkezetű függvényeknél, persze nagyon bonyolult lehet ennek a halmaznak a meghatározása. Egyszerűbb esetekben nézzük meg erre pár példát:

5.1.2 feladat: Határozzuk meg és rajzoljuk fel az $f(x, y) = \ln(x - 3y + 1) + \sqrt{y - x^2 - 1}$ függvény értelmezési tartományát!

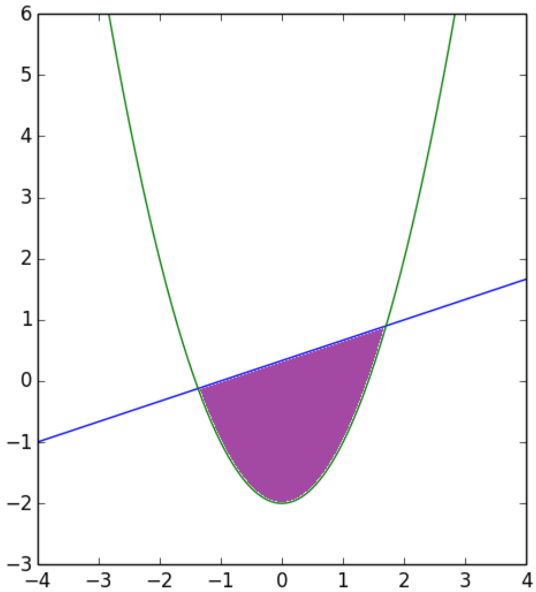
Megoldás: A szükséges kikötések ugyanazok, mint amelyeket egyváltozós esetben felírnánk:

- csak pozitív számnak van logaritmusa: $x - 3y + 1 > 0$,
- csak nemnegatív számból lehet gyököt vonni. $y - x^2 + 2 \geq 0$.

Keressük tehát a síknak azon (x, y) pontjait, amelyekre ez a két feltétel teljesül. y-ra rendezve mindkét egyenletet adódik:

$$y < \frac{1}{3}x + \frac{1}{3},$$
$$y \geq x^2 - 2.$$

Az első kikötés egy zárt félsíkot határoz meg, a második pedig egy normálparabola alatti területet. Mivel mindkét kikötésnek teljesülnie kell, így az értelmezési tartomány ezen területek metszete lesz:



1. ábra. Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartománya

ahol az egyenenes pontjai nem, a parabola pontjai pedig beletartoznak az értelmezési tartományba (a metszéspontok sem!). ♣

5.1.3 feladat: Határozzuk meg és rajzoljuk fel az $f(x, y) = \arcsin(x^2+y^2-4y-4)+\frac{1}{\sqrt{x-y+1}}$ függvény értelmezési tartományát!

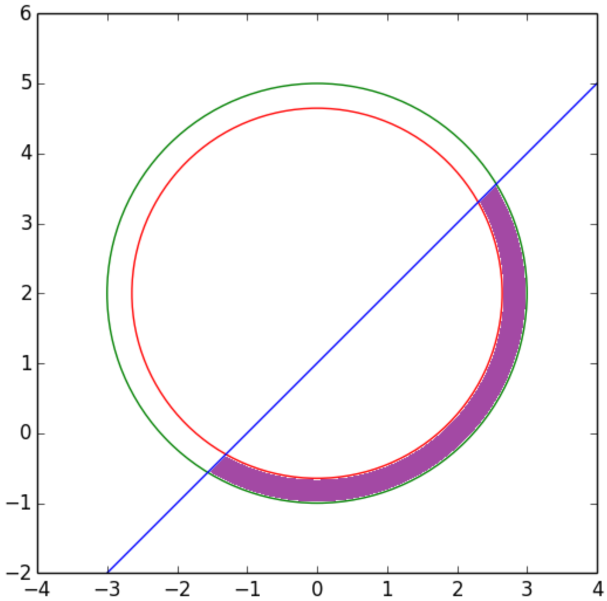
MEGOLDÁS: Mivel az arcsin függvény értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ zárt intervallum, a következő kikötések adódnak:

- $-1 \leq x^2 + y^2 - 4y - 4 \leq 1,$
- $x - y + 1 \geq 0,$
- $\sqrt{x - y + 1} \neq 0.$

Vegyük észre, hogy az utolsó két feltétel összevonható $x-y+1 > 0$ alakúra ami egy nyílt félsík. Az első feltétel rendezése pedig két koncentrikus (azonos középpontú) kört határoz meg:

$$-1 \leq x^2 + y^2 - 4y - 4 \leq 1,$$
$$-1 \leq x^2 + (y - 2)^2 - 8 \leq 1,$$
$$7 \leq x^2 + (y - 2)^2 \leq 9.$$

A középiskolában tanultak alapján tudjuk, hogy az (u, v) középpontú r sugarú kör egyenlete $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$. Ez pedig azt jelenti, hogy ennek a kikötésnek a megoldása a $(0, 2)$ középpontú $\sqrt{7}$ és $\sqrt{9} = 3$ sugarú körök által közrefogott zárt (a határoló köröket tartalmazó) körgyűrű lesz. Ezt kell elmetszenünk a fenti nyílt félsíkkal:



2. ábra. Az $f(x, y)$ függvény értelmezési tartománya

ahol az körvonalak igen, de az egyenes pontjai nem tartoznak bele az értelmezési tartományba (a metszéspontok sem!). ♣

Akárcsak egyváltozós esetben, kétváltozós függvények esetén is beszélhetünk függvények grafikonjáról:

5.1.4 definíció: Legyen $f(x, y)$ egy kétváltozós függvény, ekkor f grafikonja alatt a következő halmazt értjük:

$$graph(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D_f,\ z = f(x, y)\}.$$

A grafikon tehát egy olyan felület a háromdimenziós térben, amely az értelmezési tartomány összes pontja felett $z = f(x, y)$ magasan tartalmaz egy pontot.

A kétváltozós differenciál és integrálszámítás bevezetése előtt még két fogalommal fogunk megismerkedni. Ahhoz, hogy a kétváltozós függvények grafikonját el tudjuk képzelni a térben hasznos megnézni, hogy mit kapunk, ha a felületet elmetsszük az egyes kooordinátasíkokkal párhuzamosan. Mivel ezek a metszésvonalak igen fontosak, külön nevük is van:

5.1.5 definíció: Egy adott $f(x, y)$ kétváltozós függvény $z = c$ síkokkal vett metszésvonalait a függvény **szint**, az $x = c$, $y = c$ síkokkal vett metszésvonalait pedig a függvény**rétegvonal**ainak nevezzük.

5.1.6 feladat: Határozzuk meg és rajzoljuk fel az $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2$ függvény szint és rétegvonalait, majd próbáljuk meg meghatározni, hogy a függvény felületének az alakját!

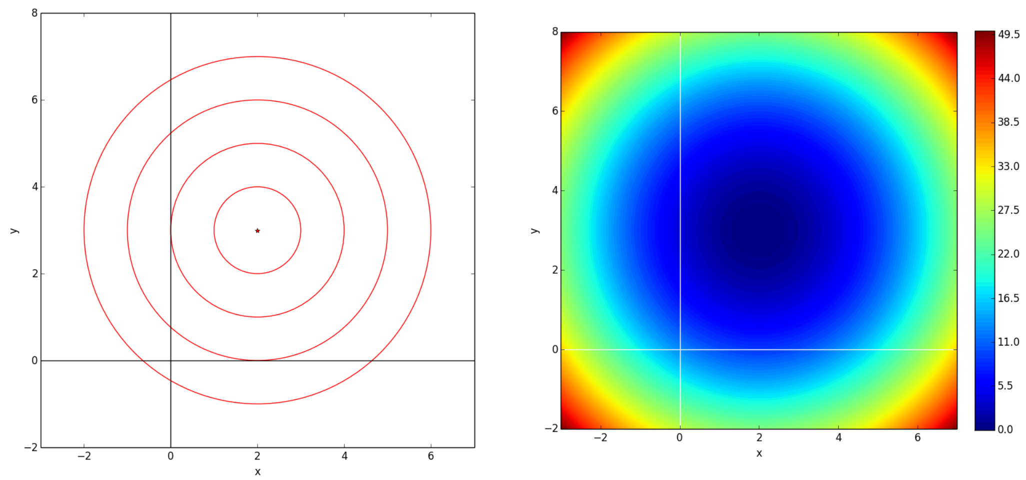
Megoldás:

Szintvonalak:

Mivel a függvény két kifejezés négyzetének az összege, így az függvény értékkészlete csak nemnegatív számokból állhat (és minden nemnegatív szám valóban benne is van R_f-ben). Ez azt jelenti, hogy szintvonalak csak $c \geq 0$ esetén vannak. A $z = c$ egyenletek megoldásai pedig koncentrikus körök:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = c.$$

melyek középpontjai az $O(2,3)$ pont, sugara pedig $r = \sqrt{c}$. $c = 0$ esetén a szintvonal egy elfajult (0 sugarú) kör, vagyis éppen az O pont:



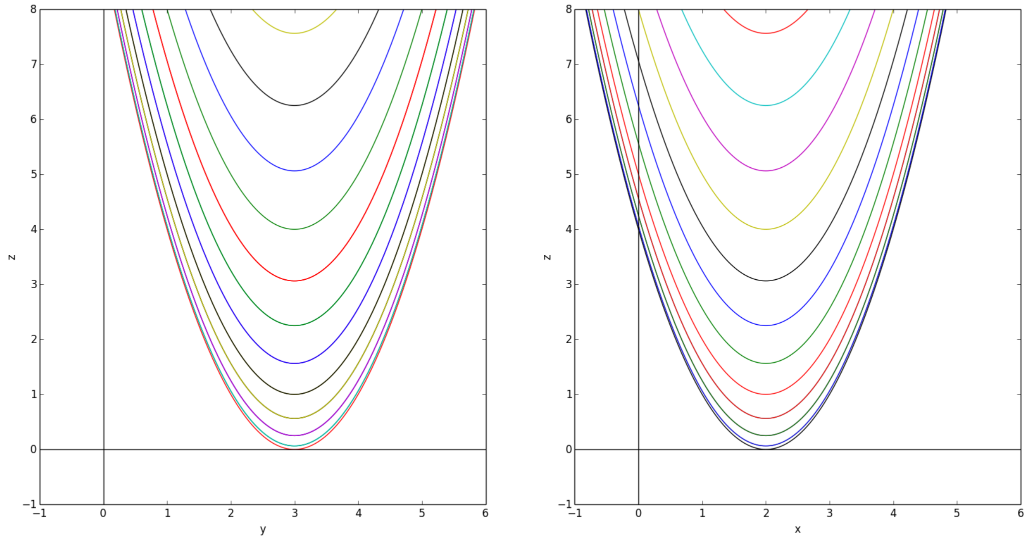
3. ábra. Az $f(x,y)$ függvény szintvonalai

Mit tudunk mondani eddig ezek alapján a függvény grafikonjáról? Olyan nemnegatív függvényt, melynek a szintvonalai minden c magasságban egy - $\sqrt{c}$ sugarú - kör. Az ilyen felületek egy függvény $x = 2$, $y = 3$ egyenes körüli forgatásával kaphatók. Szóbajön a forgáshenger, forgásparaboloid, forgáskúp vagy akár a gömb is. Némi gondolkodás után a gömb kiesik (hiszen a függvény felülről nem korlátos) valamint a henger sem jön szóba, hiszen a szintvonalak egyre nagyobb sugarú körök. Ahhoz, hogy a $(2,3)$ csúcsú körkúp és forgásparaboloid közül választani tudjunk, szükségünk van a rétegvonalakra is.

Rétegvonalak:

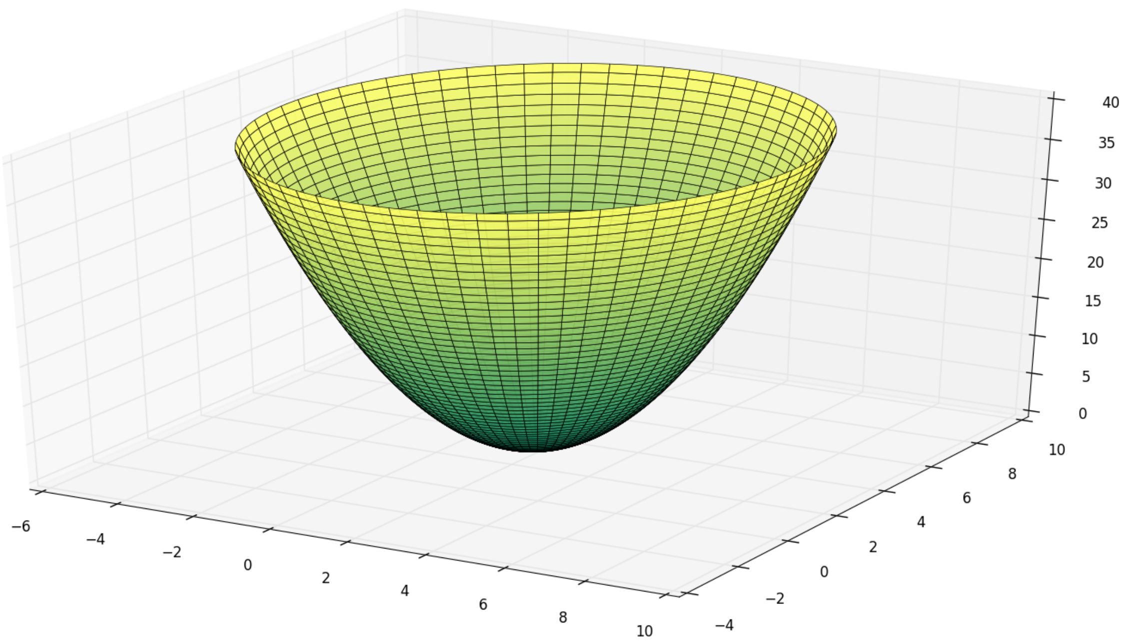
A rétegvonalak ábrázolása egyszerűbb, hiszen az $x = c$ és $y = c$ síkokkal való metszet csak egy helyettesítést jelent a függvény képletében:

$$x = c: \qquad z = f(c,y) = (c-2)^2 + (y-3)^2,$$
$$y = c: \qquad z = f(x,c) = (x-2)^2 + (c-3)^2.$$



4. ábra. Az $f(x, y)$ függvény rétegvonalai

Mindkét változó szerint a rétegvonalak egy parabolasereget alkotnak, amelyek minimuma az $y = 3$ illetve $x = 2$ pontokban vannak. A rétegvonalak alapján már látható, hogy forgáskúp nem jön szóba mint grafikon, hiszen annak két rétegvonala (az $x = 2$ és az $y = 3$ nem parabola, hanem egy egyenespár.



5. ábra. Az $f(x, y)$ függvény grafikonja

Ennek a felületnek a neve FORGÁSPARABOLOID. ♣

5.2. Differenciálszámítás

Ebben a fejezetben a kétváltozós függvények differenciálszámításával foglalkozunk, azon belül is a parciális deriváltak fogalmával. Mindenekelőtt emlékeztetőül felírjuk az egyváltozós függvényekre vonatkozó három (szorzat, hányados, összetett függvény) deriválási szabályt:

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x),\\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)},\\
(f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Az előző fejezetben ismertettük a rétegvonalak definícióját, amelyek az x vagy az y változók értékének rögzítésével állítanak elő egyváltozós függvényeket. Ezen függvények deriváltjai a rétegvonalakhoz húzott érintők meredekségét adják meg:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x_0, y_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},\\
\partial_y f(x_0, y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.
\end{aligned}$$

A parciális deriválást folyamatát egy konkrét példán mutatjuk meg:

5.2.1 feladat: Határozzuk meg az $f(x,y) = \dfrac{3x \cdot \sqrt{x^2 - 2y + 4}}{e^{2y-4}}$ függvény parciális deriváltfüggvényeit, valamint a parciális deriváltak értékét a $P(1,2)$ pontban!

Megoldás: A parciális deriválás szemléletes jelentése tehát nem más, mint a rétegvonalak deriváltja, ami azt jelenti, hogy az x szerinti parciális deriválás során y-t, az y szerinti parciális deriválás során pedig x-et konstansként kezeljük.

Ha f-re x függvényeként tekintünk, az azt jelenti, hogy a nevező konstans, a számláló pedig egy olyan szorzat, amelynek egyik tagja egy összetett függvény. Ha y szerint deriválunk, akkor a $3x$ tekinthető konstansnak, vagyis a függvény egy olyan hányados, melynek a számlálója egy összetett függvény. Ennek alapján az f függvény parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= \frac{3 \cdot (x^2 - 2y + 4)^{\frac{1}{2}} + 3x \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 2y + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{e^{2y-4}},\\
\partial_y f(x,y) &= 3x \cdot \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 2y + 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) \cdot e^{2y-4} - 2 \cdot e^{2y-4} \cdot (x^2 - 2y + 4)^{\frac{1}{2}}}{(e^{2y-4})^2}.
\end{aligned}$$

A parciális deriváltak tehát ugyanúgy kétváltozós függvények, amelyek értéke egy adott P pontban egy szám. Az $(1,2)$ pontban a deriváltak értéke:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= 6,\\
\partial_y f(x,y) &= -9.
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti tehát, hogy a $P(1,2)$ pontban húzott két érintő meredeksége 6 illetve -9. ♣

5.2.2 megjegyzés: Az parciális deriváltfüggvények írásakor szokásos még az f_x, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ valamint a $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ jelölések is.

A továbbiakban néhány ismertetünk néhány, a parciális deriváláshoz köthető fogalmat és állítást:

5.2.3 definíció: (gradiensvektor) Tegyünk fel, hogy az $f(x, y)$ függvény mindkét változó szerint parciálisan deriválható a $P(a, b)$ pontban. Ekkor a függvény P-beli **gradiensvektora** az a vektor, amelynek x koordinátája az x szerinti, y koordinátája pedig az y szerinti parciális derivált a P pontban:

$$grad_f(a, b) = (\partial_x f(a, b), \partial_y f(a, b))$$

5.2.4 megjegyzés: Az előző feladatban adott f függvény esetén az $P(1, 2)$ pontbeli gradiensvektor: $grad_f(1, 2) = (6, -9)$.

A parciális deriválás során az f függvény rétegvonalait deriváltuk, ezen metszetek érintőinek írtuk fel a meredekségét. Felmerülhet azonban az az igény, hogy a függvény grafikonját nem feltétlenül az xz és yz síkokkal párhuzamosan messük el, hanem egy tetszőleges $\mathbf{v}$ irányban, és ezen síkmetszetnek számoljuk ki a deriváltját. Ez a derivált - a parciális deriváltakhoz hasonlóan - felírható (és ki is számolható) definíció szerint, ha azonban a függvény „szép", akkor erre nincsen szükség:

5.2.5 definíció: (iránymenti derivált) Legyen adott az $f(x, y)$ függvény és $P(a, b)$ pont úgy, hogy f differenciálható P-ben, továbbá legyen adott még egy $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ nem nulla vektor. Ekkor az f függvény $\mathbf{v}$ irányú iránymenti deriváltja:

$$\partial_{\mathbf{v}}(a, b) = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \partial_x f(a, b) + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \partial_y f(a, b) = \langle grad_f(a, b), \mathbf{v_e} \rangle,$$

ahol $\mathbf{v_e}$ a $\mathbf{v}$ irányú egységvektort jelöli.

5.2.6 megjegyzés: Definíció szerint az x szerinti parciális derivált a $\mathbf{v} = (1, 0)$, az y szerinti parciális derivált pedig a $\mathbf{v} = (0, 1)$ irányú iránymenti derivált.

Bizonyítás nélkül kimondjuk a következő tételt:

5.2.7 tétel: Tegyük fel, hogy az f függvény és a $P(a, b)$ pont olyan, hogy $grad_f(a, b)$ nem a nullvektor. Ekkor az összes (a, b) pontbeli iránymenti derivált közül a $\mathbf{v} = grad_f(a, b)$ irányú iránymenti derivált a legnagyobb értékű. Ez azt is jelenti továbbá, hogy:

- a függvény az adott pontban a gradiensvektor irányában növekszik a leggyorsabban,
- az azzal ellentétes irányban csökken a leggyorsabban,
- az arra merőleges két irányban változik a leglassabban,
- a gradiensvektor merőleges a ponton áthaladó szintvonalra.

Az egyváltozós függvények esetén a pontbeli derivált segítségével fel tudtuk írni a pontbeli érintő egyenletét. Kétváltozós függvény esetén a függvénynek érintősíkja van, amelynek egyenlete a parciális deriváltak segítségével felírható:

5.2.8 állítás: Legyen f egy kétváltozós függvény, $P(a,b)$ pedig egy olyan pont, ahol a parciális deriváltak léteznek és folytonosak. Ekkor az f függvényhez az $(a,b,f(a,b))$ pontban illeszthető érintősík egyenlete:

$$z = \partial_x f(a,b)(x-a) + \partial_y f(a,b)(y-b) + f(a,b).$$

5.2.9 feladat: Legyen $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $P(3,4)$ és $\mathbf{v}(-1,2)$.

a) Határozzuk meg az f függvény parciális deriváltfüggvényeit!

b) Számoljuk ki a P-beli gradiensvektort, és a $\mathbf{v}$ irányú iránymenti deriváltat!

c) Írjuk fel a P-beli érintősík egyenletét!

Megoldás:
a) Vegyük észre, hogy a függvény a két változójában szimmetrikus, egy olyan összetett függvény, ahol a belső függvény is összetett. Ennek alapján:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\partial_y f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

b) A gradiensvektor meghatározásához, be kell írni a P pont koordinátáit a parciális deriváltakba:

$$grad_f(3,4) = (\partial_x f(3,4), \partial_y f(3,4)) = \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right).$$

az iránymenti derivált pedig ennek a vektornak a $\mathbf{v}$ irányú egységvektorral vett skaláris szorzata:

$$\partial_{\mathbf{v}} f(3,4) = \langle grad_f(3,4), \mathbf{v_e}\rangle = \left\langle \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle = \frac{5}{25\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{5}}.$$

c) Az érintősík egyenletéhez (a parciális deriváltak ismeretében) pedig már csak a pontbeli függvényérték kell: $f(3,4) = \ln 5$. Az érintősík egyenlete tehát:

$$z = \partial_x f(a,b)(x-a) + \partial_y f(a,b)(y-b) + f(a,b) = \frac{3}{25}(x-3) + \frac{4}{25}(y-3) + \ln 5.$$

Ezzel a feladat megoldását befejeztük. ♣

A differenciálszámítás utolsó témaköre a kétváltozós függvények lokális szélsőértékeinek a keresése. Precíz definíció nélkül is el tudjuk képzelni, hogy mit jelent a lokális szélsőértékhely. Ha a függvények grafikonjára úgy tekintünk, mint egy domborzati térkép, akkor a „völgy”-ek legalacsonyabb, illetve a „hegycsúcs”-ok legmagasabb pontjait nevezzük lokális szélsőértékeknek. Ahhoz, hogy ismertetni tudjuk az eljárást, amely segítségével - „szép” függvények esetén - ezeket a lokális szélsőértékeket meg tudjuk találni, definiálnunk kell a magasabb rendű parciális deriváltakat.

Bár nem neveztük nevén, de az eddig számolt parciális deriváltakat elsőrendű parciális deriváltaknak nevezzük, hiszen a kiszámításukhoz egy alkalommal kell deriválni (valamely változó szerint). Az elsőrendű parciális deriváltak száma megegyezik a függvény változóinak a számával, és teljesen analóg módon működik három, négy vagy még több változós függvények esetén.

Mi azonban maradjunk a kétváltozós esetnél. Itt két elsőrendű parciális derivált létezik, amelyek szintén kétváltozós függvények. Ekkor magától adódik az ötlet, hogy ezeket a kétváltozós függvényeket is deriválhatjuk parciálisan. Így kapjuk a **másodrendű parciális deriváltak**at. A másodrendű parciális deriváltak száma két változó esetén négy lesz, hiszen mindkét elsőrendű deriváltnak két parciális deriváltja van. Mint azonban a következő feladaton is látni fogjuk a négyből két másodrendű derivált mindig azonos lesz.

5.2.10 feladat: Határozzuk meg az $f(x, y) = \sin(x^2y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjait!

Megoldás: Az elsőrendű parciális deriváltak meghatározásához vegyük észre, hogy ez mindkét változó szerint egyetlen sima összetett függvény:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= \cos(x^2y)\cdot 2xy,\\ \partial_y f(x,y) &= \cos(x^2y)\cdot x^2.\end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltak kiszámításához először deriváljuk parciálisan az x szerinti deriváltat. $\partial_x f(x, y)$ mindkét változó szerint egy szorzat, amelynek egyik tényezője egy összetett függvény:

$$\begin{aligned}\partial_x\partial_x f(x,y) &= -\sin(x^2y)\cdot 2xy\cdot 2xy + \cos(x^2y)\cdot 2y = -4x^2y^2\sin(x^2y) + 2y\cos(x^2y)\\ \partial_y\partial_x f(x,y) &= -\sin(x^2y)\cdot x^2\cdot 2xy + \cos(x^2y)\cdot 2x = -2x^3y\sin(x^2y) + 2x\cos(x^2y).\end{aligned}$$

Az y szerinti parciális derivált pedig x szerint nézve egy szorzat, y szerint nézve pedig csak egy összetett függvény. Ennek alapján:

$$\begin{aligned}\partial_x\partial_y f(x,y) &= -\sin(x^2y)\cdot 2xy\cdot x^2 + \cos(x^2y)\cdot 2x = -2x^3y\sin(x^2y) + 2x\cos(x^2y).\\ \partial_y\partial_y f(x,y) &= -\sin(x^2y)\cdot x^2\cdot x^2 = -x^4\sin(x^2y).\end{aligned}$$

Ezzel a másodrendű parciális deriváltakat meghatároztuk. ♣

Az előző feladatban az jött ki, hogy $\partial_y\partial_x f(x, y) = \partial_x\partial_y f(x, y)$, vagyis ha először deriválunk x szerint és aztán y szerint, vagy fordítva, akkor az eredmény ugyanaz. Ez nem véletlen történt így, hanem a deriválások sorrendje általában is felcserélhető:

5.2.11 tétel: Ha $f(x, y)$ kétszer differenciálható (a, b)-ben, akkor $\partial_y\partial_x f(x, y) = \partial_x\partial_y f(x, y)$.

A szekció végén egy konkrét példán ismertetjük, hogyan tudjuk egy kétváltozós függvény szélsőértékeit megkeresni.

5.2.12 feladat: Határozzuk meg, hogy hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 3x^2 - 30x - 6xy + y^3 - 15y + 11$ kétváltozós függvénynek!

MEGOLDÁS: Könnyen meggondolhatjuk, hogy az a tény, hogy a f-nek egy (a,b) pontban lokális szélsőértéke van, maga után vonja azt is, hogy a megfelelő rétegvonalaknak $x = a$-ban és $y = b$-ben szélsőértéke legyen. Egyváltozós esetben pedig a szélsőérték szükséges feltétele a derivált nulla volta. Ezt az észrevételt egy fogalom bevezetése után egy tételben fogalmazhatjuk meg:

5.2.13 definíció: (stacionárius pont) Az f függvény értelmezési tartományának azon pontjait, ahol mindkét parciális derivált nulla az f függvény **stacionárius pont**jainak nevezzük.

5.2.14 tétel: Ha az $f(x,y)$ függvénynek az (a,b) pontban lokális szélsőértéke van, és ott mindkét változó szerint parciálisan deriválható, akkor:

$$\partial_x f(a,b) = \partial_y f(a,b) = 0.$$

A fenti gondolatmenet azt mondja, hogy kétváltozós függvény szélsőértéke csak stacionárius pontban lehet.

Első lépésben határozzuk meg f elsőrendű parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 6x - 30 - 6y, \\ \partial_y f(x,y) &= -6x + 3y^2 - 15. \end{aligned}$$

Második lépésben határozzuk meg a stacionárius pontokat, vagyis oldjuk meg az

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 6x - 30 - 6y = 0, \\ \partial_y f(x,y) &= -6x + 3y^2 - 15 = 0, \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből kifejezve x-et beírva a második egyenletbe y-ra egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$x = y + 5 \Longrightarrow -6y - 30 + 3y^2 - 15 = 0 \Longrightarrow y^2 - 2y - 15 = 0.$$

Az egyenletet megoldva, $y_1 = 5$, $y_2 = -3$. Ez azt jelenti, hogy a függvénynek két stacionárius pontja van: a $P_1(10,5)$ és a $P_2 = (2,-3)$.

Az eljárás további részét bizonyítás nélkül ismertetjük. **Harmadik lépésben** meghatározzuk a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} \partial_x\partial_x f(x,y) &= 6, \\ \partial_y\partial_x f(x,y) &= -6, \\ \partial_x\partial_y f(x,y) &= -6, \\ \partial_y\partial_y f(x,y) &= 6y. \end{aligned}$$

Az eljárás befejezéséhez még egy fogalommal és tétellel kell megismerkednünk:

5.2.15 definíció: (Hesse-mátrix) Egy kétváltozós függvény **Hesse-mátrix**ának a következő 2×2-es mátrixot nevezzük:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f(x,y) & \partial_y\partial_x f(x,y) \\ \partial_x\partial_y f(x,y) & \partial_y\partial_y f(x,y) \end{pmatrix}$$

Negyedik lépésben felírjuk a függvény Hesse-mátrixát, és annak determinánsát:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f(x,y) & \partial_y\partial_x f(x,y) \\ \partial_x\partial_y f(x,y) & \partial_y\partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix},$$
$$D(x,y) = 36y - 36.$$

Ahhoz pedig, hogy az **ötödik lépésben** dönteni tudjunk, hogy melyik stacionárius lokális szélsőérték (és ha az, akkor minimum vagy maximum) a következő tételt alkalmazzuk:

5.2.16 tétel: Legyen $f(x,y)$ egy kétváltozós függvény, $P(a,b)$ pedig egy stacionárius pont. Ekkor:

- Ha $D(a,b) < 0$ akkor P nem lokális szélsőérték, hanem **nyeregpont**.
- Ha $D(a,b) > 0$ akkor P lokális szélsőérték:
  - Ha $\partial_x\partial_x f(a,b) > 0$ akkor **lokális minimum**,
  - Ha $\partial_x\partial_x f(a,b) < 0$ akkor **lokális maximum**.

5.2.17 megjegyzés: Abban az esetben, ha $D(a,b) = 0$, vagy $D(a,b) > 0$ de $\partial_x\partial_x f(a,b) = 0$ a tétel nem mond semmit a stacionárius pont fajtájáról. Ilyen esettel azonban nem foglalkozunk.

A tételt alkalmazva pedig már könnyedén eldönthetjük a stacionárius pontok típusát:

$$D(10,5) = 144 > 0,\ \partial_x\partial_x f(10,5) = 6 \Longrightarrow P_1 \text{ lokális minimum.}$$
$$D(2,-3) = -144 < 0 \Longrightarrow P_2 \text{ nyeregpont.}$$

Ezzel a vizsgálatot befejeztük. ♣

5.3. Integrálszámítás

Egyváltozós függvények esetében részletesen tárgyaltuk az integrálszámítást, a továbbiakban a határozott integrál többváltozós függvények estére vonatkozó általánosítását ismertetjük. Egyváltozós esetben a határozott integrál a függvény alatti terület volt egy $[a, b]$ intervallumon. Ehhez bevezetjük az intervallum kétdimenziós megfelelőjét, a téglalap fogalmát:

5.3.1 definíció: (téglalap) Legyen $[a, b]$ és $[c, d]$ két intervallum. Az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon a következő halmazt értjük:

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

A téglalap tehát a koordinátatengelyekkel párhuzamos téglalapot jelent.

Ha megvan a téglalap fogalma, akkor definiálni tudjuk egy függvény téglalapon vett kétszeres integrálját. Az egyszerűség kedvéért mindig folytonos függvényekről fogunk tárgyalni.

5.3.2 definíció: (kétszeres integrál) Legyen f folytonos függvény az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon. Kétszeres integrálnak az:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \text{ és az } \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

típusú integrálokat nevezzük.

A zárójelen belüli integrált belső, a zárójelen kívülit pedig külső integrálnak hívjuk. A kétszeres integrálok kiszámolása során mindig a belső integrált határozzuk meg előbb. A $\mathrm{d}x$ illetve $\mathrm{d}y$ szimbólum mutatja, hogy melyik változó szerint kell először integrálnunk. Ekkor a belső integrál mindig a második változónak a függvénye lesz, és ezt kell a külső integrálban kiszámolnunk. Nézzük egy példát kétszeres integrálra:

5.3.3 feladat: Határozzuk meg az $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 12x^2y + 6xy^2 \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ kétszeres integrált!

Megoldás: A belső integrál kiszámításával kezdjük a számolást. Ha x szerint integrálunk, akkor akárcsak a parciális deriválásnál, az y-ra úgy kell tekintenünk mint egy konstansra:

$$\int_0^1 12x^2y + 6xy^2 \,\mathrm{d}x = [4x^3y + 3x^2y^2]_0^1 = 4y + 3y^2.$$

Arra kell vigyáznunk, hogy a Newton-Leibniz szabály alkalmazása során abba a változóba helyettesítsük be az integrálok határait, amelyik változó szerint az integrálást végeztük. Így lesz a belső integrál a másik változó függvénye, hiszen mint látható, a kifejezésből el is tűnt az x. Ekkor a kettős integrál:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 12x^2y + 6xy \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-1}^1 4y + 3y^2 \,\mathrm{d}y = [2y^2 + y^3]_{-1}^1 = 2,$$

vagyis a kettős integrál egy szám, értéke 2. ♣

Számoljuk ki az f függvényhez és az $[a, b] \times [c, d]$ téglalaphoz tartozó másik kettősintegrált is. Ekkor a belső integrál y szerinti:

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 12x^2y + 6xy^2 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 [6x^2y^2 + 2xy^3]_{-1}^1 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x \,\mathrm{d}x = [2x^2]_0^1 = 2.$$

vagyis a függvényhez tartozó másik kettős integrál értéke is 2. Ez nem véletlen, bizonyítás nélkül kimondjuk a következő tételt:

5.3.4 tétel: Legyen f egy olyan kétváltozós függvény amely az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon értelmezett, mindkét változó szerint parciálisan differenciálható, és a parciális derivátak folytonosak az egész téglalapon. Ekkor a két kétszeres integrál értéke egyenlő.

A továbbiakban ezt úgy fogjuk használni, hogy az integrálok felcserélhetőek, mert minden általunk használt függvény és téglalap olyan lesz, hogy megfelel a tétel feltételeinek. Mivel nem okoz zavart a számolásban, így a zárójeleket sem használjuk már a továbbiakban.

Az eddigiekben a határozott integrált téglalapon vizsgáltuk. Van még egy olyan tartomány, ahol könnyedén tudunk kétszeres integrálokat definiálni. Ez a tartomány a normáltartomány:

5.3.5 definíció: (normáltartomány) Legyen $[a, b]$ intervallum, és tegyük fel, hogy a φ és a ψ függvényekre teljesül, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $\varphi(x) \leq \psi(x)$. Ekkor az

$$N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

halmazt normáltartománynak nevezzük.

Normáltartományon is egyszerűen tudjuk definiálni a kétszeres integrált, ami a következőképpen néz ki:

$$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

Ebben az esetben azonban fontos az integrálok sorrendje. Az x az a változó, amely szabadon mozog egy $[a, b]$ intervallumban, míg y pedig olyan, hogy a határok x függvényei. Így a külső integrálnak kell x szerintinek lennie, a belsőnek pedig az y szerintinek. Ekkor ha a belső függvény integráljánál beírjuk a határokat, továbbra is x függvényét kapjuk, amelyet x szerint kiintegrálva számot kapunk. Lássunk példát egy normáltartományon vett integrálra is.

5.3.6 feladat: Legyen $N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}$, határozzunk meg ezen a halmazon az $f(x, y) = 2xy$ függvény kétszeres integrálját!

MEGOLDÁS: A korábbiak szerint a keresett integrál a következő:

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 2xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \int_0^1 [xy^2]_x^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 - x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}. \qquad \clubsuit$$

Legyen H a sík egy „szép” részhalmaza, – nem részletezve, hogy ez pontosan mit is jelent – f pedig egy folytonos függvény a H halmazon. Ekkor az egyváltozós függvényekhez hasonlóan definiálhatók a H felbontásaihoz tartozó közelítő összegek, amelyek limeszét f kettősintegráljának nevezzük a H halmazon és a következőképpen jelöljük:

$$\iint\limits_H f(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

Mi csak olyan H halmazokkal foglalkozunk, amelyek vagy téglalapok, vagy normáltartományok, és ezekben az esetekben a kettősintegrál a korábban ismertetett kétszeres integrálokkal számolható ki:

5.3.7 tétel: Legyen f folytonos a $T = [a,b] \times [c,d]$ téglalapon. Ekkor:

$$\iint\limits_T f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

5.3.8 tétel: Ha pedig f folytonos az $[a,b]$ intervallum, valamint a $\varphi(x)$ illetve $\psi(x)$ függvények által határolt N normáltartományon. Ekkor:

$$\iint\limits_N f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Ennek megfelelően kétváltozós függvények esetén a kettős és a kétszeres integrál kifejezéseket ugyanarra használjuk a továbbiakban.

Egyváltozós függvények esetén a határozott integrál szemléletes jelentése a görbe alatti terület volt. Ennek általánosítása igaz a kétváltozós függvények esetére is:

5.3.9 definíció: Legyen f folytonos a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazon, és legyen f olyan, hogy $f(x,y) \geq 0$ minden $(x,y) \in H$ esetén. Ekkor az:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in H, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

térbeli halmaz egy test. Ez a test nem más mint az a H alapú hasáb, amelyet alulról az xy sík, felülről pedig az f függvény grafikonja határol. Ennek a testnek a térfogatát a:

$$V = \iint\limits_H f(x,y)\,\mathrm{d}A$$

kettősintegrállal definiáljuk.

Ha a függvényre nem teljesül az a feltétel, hogy nemnegatív, a kettősintegrál akkor is térfogatot jelent. Ez a térfogat, akárcsak az egyváltozós esetben a terület előjeles térfogat lesz: az xy sík alatti térfogat negatív, az xy sík feletti térfogat pedig pozitív előjellel számítódik bele az integrálba.

5.3.10 feladat: Számítsuk ki az $f(x,y) = \dfrac{x}{(xy+1)^2}$ függvény kettősintegrálját a $T = [0,1] \times [0,1]$ halmazon:

Megoldás: Az integrandus folytonos a T tartományon, így a keresett kettősintegrál kétféleképpen is felírható, és a korábbi tétel szerint mindkét felírás ugyanazt az értéket adja. Mi a továbbiakban mindkét módon kiszámoljuk a keresett integrált, szemléltetve azt, hogy az eredmény ugyan azonos, az integrálás sorrendjének helyes megválasztása azonban igen fontos lehet.

A kettős integrál a következő kétféle módon írható fel kétszeres integrálként:

$$\iint_T \frac{x}{(xy+1)^2}\,\mathrm{d}A = \int_0^1\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Tekintsük először az első fajta felírást. Átírva az integrandust a belső függvény éppen $f'f^\alpha$ alakú $f(y) = xy+1$, $f'(y) = x$ és $\alpha = -2$ szereposzással:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 x\cdot(xy+1)^{-2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{(xy+1)^{-1}}{-1}\right]_0^1 \mathrm{d}x =$$
$$\int_0^1 \left[\frac{(xy+1)^{-1}}{-1}\right]_0^1 = \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Elvégezve a második integrálást is, a keresett kettősintegrál:

$$\iint_H f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [x - \ln(x+1)]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

Nézzük meg mi a helyzet, akkor ha megcseréljük az integrálok sorrendjét. Ha a belső integrál x szerinti, akkor az $f(x,y)$ függvény egy valódi racionális törtfüggvény, melynek számlálója elsőfokú, nevezője pedig másodfokú (egy elsőfokú tag négyzete). Keressük meg a felbontását:

$$\frac{x}{(xy+1)^2} = \frac{A}{(xy+1)} + \frac{B}{(xy+1)^2} = \frac{Axy + A + B}{(xy+1)^2}.$$

Fontos megérteni, hogy ebben az esetben az y konstansnak számít, tehát az A és a B együtthatók és az y-ok ugyanolyan konstans kifejezések, és az x hatványok együtthatóinak egyenlőségét kell felírni. A megfelelő egyenletrendszerek tehát:

$$Ay = 1,$$
$$A + B = 0.$$

amiből $A = \frac{1}{y}$, és $B = -\frac{1}{y}$. Ekkor a belső integrált meg tudjuk határozni, hiszen parciális törteket tudunk integrálni:

$$\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\int_0^1 \frac{1}{xy+1} - \frac{1}{(xy+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\left[\frac{\ln(xy+1)}{y} - \frac{(xy+1)^{-1}}{-y}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{y^2}\left(\ln(y+1) + \frac{1}{y+1} - \ln 1 - 1\right) = \frac{1}{y^2}\cdot\ln(y+1) + \frac{1}{y^2(y+1)} - \frac{1}{y^2}.$$

Ezt a kifejezést pedig ki kell integrálnunk y szerint. Vegyük észre elsősorban, hogy ez az integrál improprius, hiszen a függvény nincsen értelmezve a nullában! Határozzuk meg a határozatlan integrálást tagonként. Az első integrálás parciális típusú, ahol $f'(y) = \frac{1}{y^2}$, és $g(y) = \ln(y+1)$, a második racionális törtfüggvény, a harmadik pedig egy sima alapintegrál. Nézzük az első integrált:

$$\int \frac{1}{y^2}\ln(y+1)\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y}\ln(y+1) - \int -\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y}\ln(y+1) + \int \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y =$$
$$= -\frac{1}{y}\ln(y+1) + \ln y - \ln(y+1) + C,$$

ahol a második integrálásnál szintén a szokásos parciális törtekre bontás történt meg. A középső tagot is felbonthatjuk törtek összegére:

$$\frac{1}{y^2(y+1)} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y+1},$$

amiből az integrál:

$$\int \frac{1}{y^2(y+1)}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y} - \ln y + \ln(y+1) + C,$$

a harmadik tag integrálja pedig:

$$\int -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{y} + C.$$

Ezeket összeadva észrevehetjük, hogy rengeteg tag kiesik, és a keresett primitív függvény:

$$\int \frac{1}{y^2}\cdot\ln(y+1) + \frac{1}{y^2(y+1)} - \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{y}\ln(y+1) + C.$$

Ha megvan a primitív függvény, akkor az improprius integrál:

$$\int_0^1 \frac{1}{y^2}\cdot\ln(y+1) + \frac{1}{y^2(y+1)} - \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = F(1) - \lim_{u\to 0+} F(u) = -\ln 2 + \lim_{u\to 0+}\frac{\ln(u+1)}{u} =$$
$$-\ln 2 + \lim_{u\to 0+}\frac{\frac{1}{u+1}}{1} = 1 - \ln 2,$$

a L'Hospital szabály alkalmazásával. Aggodalomra tehát semmi ok, a másik fajta kettős integrál is kiszámolható, és ugyanazt az eredményt adta, csak egy kicsit fáradtságosabb. ♣

5.3.11 feladat: Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 - y$ függvény kettősintegrálját a $\psi(x) = 3x - x^2$ és a $\varphi(x) = x$ függvények grafikonja által határolt korlátos N tartomány felett!

MEGOLDÁS: Ha felrajzoljuk a két függvényt, akkor láthatjuk, hogy a közrezárt terület egy normáltartomány, melynek x irányú határai a $\psi(x) = \varphi(x)$ megoldásai, y irányú határai pedig $\varphi(x)$ és $\psi(x)$. Ekkor a keresett kettősintegrál a következőképpen írható fel kétszeres integrálként:

$$\iint_N f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_0^2 \int_x^{3x-x^2} x^2 - y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Innentől kezdve, mivel az $f(x,y)$ egy kétváltozós polinom, nem okozhat gondot a kettősintegrál meghatározása:

$$\int_0^2 \int_x^{3x-x^2} x^2 - y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2 y - \frac{y^2}{2}\right]_x^{3x-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^2 x^2(3x-x^2) - \frac{(3x-x^2)^2}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 -\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 4x^2\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{10}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = -\frac{96}{10} + \frac{80}{4} - \frac{32}{3} = -\frac{4}{15}. \qquad \clubsuit$$

Végezetül mutatunk egy alkalmazást a kettesintegrálok témakörében:

5.3.12 tétel: Legyen H egy egyszerű síkidom. Ekkor az:

$$\iint_H 1\,\mathrm{d}A$$

kettősintegrál a H síkidom területét adja.

Ezt a tételt egyszerű meggondolni, hiszen a kettősintegrál geometriai jelentése miatt ez éppen a H alapú, egységnyi magasságú hasáb térfogata, ami így a H halmaz területével egyenlő. Kettősintegrál segítségével azonban nem csak a halmaz területe, hanem a súlypontjának a koordinátái is meghatározhatók:

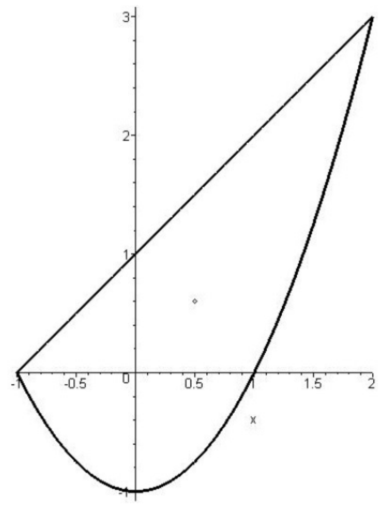
5.3.13 tétel: Jelölje a H halmaz súlypontját (M_x, M_y). Ekkor:

$$M_x = \frac{\iint_H x\,\mathrm{d}A}{\iint_H 1\,\mathrm{d}A}, \qquad M_y = \frac{\iint_H y\,\mathrm{d}A}{\iint_H 1\,\mathrm{d}A}.$$

Mivel az integrálás tulajdonképpen egyfajta végtelen összegzést jelent, így a tétel szemléletes tartalma az, hogy a súlypont x koordinátáját úgy kapjuk, hogy összegezzük, hogy a síkidom mennyi x koordinátát „tartalmaz”, majd ezt leosztjuk azzal, hogy mekkora a területe. Az y koordináta esetén ugyanezt tesszük. Végezetül nézzünk erre is egy példát:

5.3.14 feladat: Számítsuk ki az $f(x) = x^2 - 1$ és a $g(x) = x + 1$ görbék által határolt véges területű H síkidom súlypontjának koordinátáit!

Megoldás: Először is rajzoljuk fel a keresett H síkidomot, hogy fel tudjuk írni a megfelelő kétszeres integrálokat:



Látható, hogy a H síkidom egy normáltartomány, melynél az x változó határai a két függvény két metszéspontja, az y változó határai pedig $f(x)$ és $g(x)$. A metszéspontok koordinátái az $f(x) = g(x)$ egyenlet gyökei, vagyis -1 és 2. Ekkor:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 2, x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}.$$

Ekkor pedig már fel tudjuk írni a kettős integrálokat számunkra kényelmes kétszeres integrálok formájában:

$$\iint_H 1 \,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2-1}^{x+1} 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} [y]_{x^2-1}^{x+1} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2},$$

$$\iint_H x \,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2-1}^{x+1} x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} [xy]_{x^2-1}^{x+1} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2x + x^2 - x^3 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{4},$$

$$\iint_H y \,\mathrm{d}A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2-1}^{x+1} y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2-1}^{x+1} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{10}\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{10},$$

amiből a súlypont koordinátái:

$$M_x = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{2}, \qquad M_y = \frac{\frac{27}{10}}{\frac{9}{2}} = \frac{3}{5}. \qquad \clubsuit$$