

1. Tekintsük az alábbi komplex számokat:

$$u = 2 - 2j \quad v = 2(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ).$$

Add meg azokat a  $z$  és  $w$  komplex számokat trigonometrikus alakban és ábrázold a Gauss-féle komplex számsíkon, amelyekre

$$w = \left(\frac{v}{u}\right)^{10}, \quad z^3 = u.$$

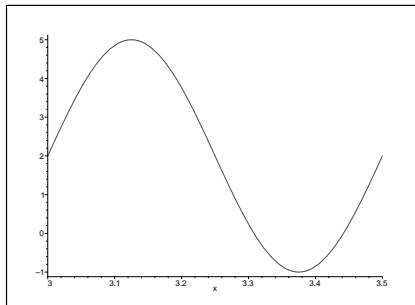
(10 pont)

2. Egy Descartes-féle koordináta-rendszerben adott az  $A(1, 3, 0)$ ,  $B(-3, 2, 1)$ ,  $C(-3, 0, -2)$  és  $D(-2, 1, 2)$  pont.

(a) Igazold, hogy  $A, B, C, D$  tetraédert határoz meg és számítsd ki a térfogatát!

(b) Bontsd fel a  $\vec{BD}$  vektort egy  $\vec{CA}$  irányú és egy  $\vec{CA}$ -ra merőleges vektor összegére! (7 pont)

3. (a) Írd fel annak az  $f$  függvénynek a hozzárendelési szabályát, amely a  $\sin$  függvényből nyerhető, periodikus és egy periódusa az ábrán látható:



(b) Írd fel az (a) pontban kapott függvény egy leszűkítésének inverzét! (10 pont)

4. (a) Rajzold fel az  $f(x) = x^3 + \frac{1}{12x}$  képlettel adott függvény grafikonját a  $[0.1, 1]$  intervallumon!

(b) Számítsd ki azon test palástjának területét, amelyet az  $y = x^3 + \frac{1}{12x}$ ,  $0.1 \leq x \leq 1$  alakban megadott görbe  $x$  tengely körüli  $360^\circ$ -os megforgatásával kapunk! (17 pont)

5. Számítsd ki az  $\underline{F}(x, y) = (xy, \cos x)$  vektormező  $\gamma$  görbe menti vonalintegrálját,  $\int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{r}$ -et, ahol  $\gamma$  a  $\sin$  függvény grafikonjának  $[0, \pi]$  fölötti íve (az origóból indulva)! (12 pont)

6. (a) Van-e az  $f(x, y) = x^2 y^4$  képlettel adott  $f$  függvénynek lokális szélsőértéke a  $(0, 3)$  pontban?

(b) Írd fel  $f$  grafikonjához annak  $(x_0, y_0) = (-1, 2)$  értékekhez tartozó pontjában az érintősík egyenletét, majd ennek segítségével adjál lineáris közelítést  $f(x, y)$ -ra  $(-1, 2)$  közelében! (14 pont)

7. Számítsd ki az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$  mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Az eredményedet ellenőrizd a definícióknak megfelelően! (10 pont)