2001. április 6.

1. Számítsd ki az alábbi integrálokat! (15 pont)

$$\int_1^3 \sqrt{4x - x^2}\, dx, \qquad \int \frac{x^4+1}{x^3+9x}\, dx$$

2. Számítsd ki annak testnek a térfogatát, amelyet az $y = x\,\sqrt[5]{1+2x^3}$, $x \in [2,3]$ alakban megadott görbe x tengely körüli $360°$-os megforgatásával kapunk! (8 pont)

3. Legyen f az $f(x,y) = 1 - x^2 + y^3$ képlettel megadott függvény. Ábrázold az $\underline{F}(x,y) = \operatorname{grad} f\,(x,y)$ vektormezőt és ez alapján döntsd el, hogy van-e f-nek lokális szélsőértéke a $(0,0)$ pontban! (6 pont)

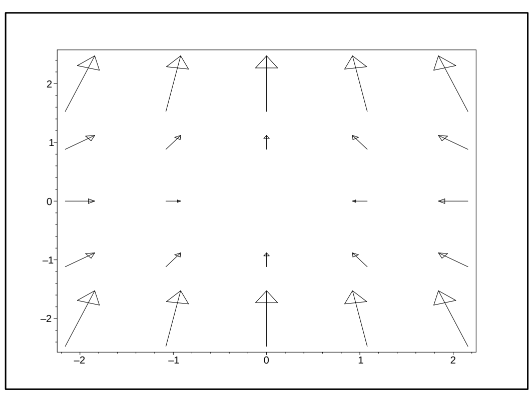
4. Legyen f az $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\,\ln(x) - 10\,\ln(y)$ képlettel adott függvény.
   (a) Van-e f-nek lokális szélsőértéke a $(-1,-2)$, illetve $(-1,-3)$ pontban?
   (b) f grafikonjának $(1,1)$-hez tartozó pontjából milyen irányban induljunk el akkor, ha azt szeretnénk, hogy a felület emelkedése a legnagyobb legyen? Hány fokos szögű ez a legnagyobb emelkedés? (14 pont)

Végeredmények

1. $\sqrt{3} + 2/3\,\pi$, illetve $1/2\,x^2 + 1/9\,\ln(x) - \dfrac{41}{9}\,\ln(x^2+9)$

2. $\dfrac{275}{42}\,55^{2/5} - \dfrac{85}{42}\,17^{2/5} \approx 26.24$

3. Nincs, mert ugyan a gradiens-vektor $(0,0)$-ban a nullvektor, de van ide ,,befelé" és van innen ,,kifelé" mutató gradiends-vektor is (pl. az y-tengely mentén). Ezek miatt $(0,0)$ nyeregpont.



4. $\operatorname{grad} f(-1,-2) = (0,0)$, $\operatorname{grad} f(-1,-3) \neq (0,0)$, így legfeljebb $(-1,-2)$-ben lehet a két pont közül. Ennek vizsgálata: $D = 26 > 0$, $f''_{xx}(-1,-2) = 6 > 0$, így $(-1,-2)$ lokális minimumhely.