Gyakorló feladatlap a Matematika III. tantárgyhoz

2005. december 19.

1. Mivel egyenlő az $f(x,y) = x^y \cos(\pi\sqrt{x})$ képletű függvény gradiense $(1,2)$-ben? Add meg az eredmény egy tetszőleges geometriai jelentését!

2. Írd fel az $f(x,y) = \dfrac{x\cos(y)}{2+\ln(1+4xy^2)}$ képletű függvény grafikonjához az $(1,0) \in \mathcal{D}_f$ ponthoz tartozó felületi pontban húzott érintősík egyenletét! Ennek felhasználásával adjál elsőfokú közelítést $f(x,y)$-ra, ha $x \approx 1$ és $y \approx 0$ és szemléltesd a közelítés jelentését egy példával!

3. Írd fel az $f(x,y) = x\,\mathrm{arsh}(y)\dfrac{x^2-y}{4x+y^2}$ képletű függvény grafikonjához a $(2,0) \in \mathcal{D}_f$ ponthoz tartozó felületi pontban húzott érintősík egyenletét! Ennek felhasználásával adjál elsőfokú közelítést $f(x,y)$-ra, ha $(x,y) \approx (2,0)$!

4. Legyen $f(x,y) = 8x^3 + 12y^2 - 24xy$.
   (a) Keresd meg az f függvény stacionárius pontjait és osztályozd ezeket!
   (b) $\mathcal{D}_f$-nek $P(-2,1)$ pontjában függőleges síkokkal elmetsszük f grafikonját. Határozd meg azokat a síkmetszeteket, amelyeknél a metszetgörbe konvex!
   (c) $(-2,1)$-ből indulva milyen irányokban növekszik f értéke? Növekszik-e $210°$-os irányban?

5. Legyen $f(x,y) = 20x^2y + 5xy^2 + 3x^5$.
   (a) Keresd meg az f függvény stacionárius pontjait és osztályozd ezeket!
   (b) $\mathcal{D}_f$-nek $(1,0)$ pontjában a $150°$ irányban függőleges síkkal elmetsszük f grafikonját. Határozd meg a metszetgörbe monotonitási és konvexitási jellemzőit az adott pontban!

6. Határozd meg $4\ln x + \frac{y}{x} - 2y$ legkisebb és legnagyobb értékét az ABC háromszöglapon, ahol $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(1,5)$!

7. Legyen $f(x,y) = y^3 - 8x^3 - 6xy$ és $P(1,-1)$.
   (a) Keresd meg az f függvény stacionárius pontjait és osztályozd ezeket!
   (b) Mennyi f P-beli, $300°$-os irányú iránymenti deriváltja? Mit jelent ez?
   (c) P-ben függőleges síkokkal elmetsszük f grafikonját. Határozd meg azokat az irányokat, amelyeknél a metszetgörbe P-ben konvex!
   (d) Mennyi f legnagyobb és legkisebb értéke az ABC háromszöglapon, ahol $A(0,0)$, $B(-2,0)$, $C(0,2)$?

8. Legyen $f(x,y) = e^{xy}(2y + x + 5)$.
   (a) Keresd meg az f függvény stacionárius pontjait és osztályozd ezeket!
   (b) $\mathcal{D}_f$-nek $(-1,2)$ pontjában a $60°$ irányban függőleges síkkal elmetsszük f grafikonját. Határozd meg a metszetgörbe monotonitási és konvexitási jellemzőit az adott pontban!
   (c) AZ ABC háromszög mely pontjában lesz f a legnagyobb, illetve legkisebb, ha $A(0,0)$, $B(0,1)$ és $C(2,0)$?

9. A gradiens-mező felhasználásával osztályozd az alábbi képletű függvények stacionárius pontjait! $f(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^6$, $g(x,y) = -x^4 - 2x^2 - y^6$!

10. Egy szimmetrikus trapéz keresztmetszetű, felül nyitott csatorna kerületét szeretnénk minimalizálni azon feltétel mellett, hogy a területe 20 kell legyen. Milyen csatornaméret esetén kapjuk a minimumot?

11. Keresd meg a legkisebb négyzetek módszerének megfelelően az exp függvényhez $[0,1]$-en a legjobban közelítő lineáris függvényt! (Azaz határozd meg a $h(a,b) = \displaystyle\int_0^1 (e^x - ax - b)^2\,dx$ függvény minimumhelyét!)

12. Add meg $\dfrac{1}{\sqrt[5]{34}}$-et 4 tizedesjegyre garantáltan pontosan!

13. A sh függvényt szeretnénk polinommal közelíteni a $[0,2]$ intervallumon valamilyen Taylor-polinomja segítségével úgy, hogy a közelítés abszolút hibája ne haladja meg 0,001-et. Hányadfokú polinomot kell venni ehhez, ha a közelítés alappontja $x_0 = 0$, illetve $x_0 = 1$? Mi az előnye és hátránya az egyik, illetve a másik választásnak?

14. $\sin 0{,}75$-ot szeretnénk kiszámítani 0,001-nél kisebb abszolút hibával a sin függvény valamilyen Taylor-polinomja segítségével. Ehhez két választását vesszük x_0-nak: $x_0 = 0$-t és $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$-et. Hányadfokú polinomokat kell venni az egyik, illetve másik esetben?

15. Az exp függvényt szeretnénk polinommal közelíteni a $[-1,1]$ intervallumon valamilyen másodfokú Taylor-polinomja segítségével. Adjál meg egy ilyet és határozd meg a közelítés abszolút hibáját! Hányadfokú polinomra tudod garantálni, hogy a közelítés hibája ne haladja meg 0,001-et?

16. Határozz meg egy olyan polinomot, amely az $f(x) = e^{-x^2}$ képletű függvényt minden $x \in [0,4]$ pontban 2 tizedesjegyre pontosan megadja!

17. Add meg 3 tizedesjegyre garantáltan pontosan az alábbi integrálokat! $\displaystyle\int_{10}^{20} x\, e^{1/x}\, dx, \qquad \int_{1}^{10} \mathrm{ch}\frac{2}{x^2}\, dx, \qquad \int_{0}^{5} \cos(0{,}02x^2)\, dx.$

18. Tekintsük az alábbi komplex számokat: $u = 2-2i$, $v = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$. Add meg azokat a z és w komplex számokat trigonometrikus alakban és ábrázold a Gauss-féle komplex számsíkon, amelyekre $w = (u+v-2)^{10}$, $z^3 = u^2$.

19. Oldd meg a komplex számok halmazán a $z^4 + 2iz^2 = \sqrt{3}$ egyenletet!

20. Legyen $u = 8(\cos 105^\circ + j \sin 105^\circ)$ és $v = 2-2j$. Oldd meg az $\frac{u}{z} - \frac{z^2}{v} = 0$ egyenletet a komplex számok között! Az eredményt add meg algebrai és trigonometrikus alakban is és ábrázold a Gauss-féle számsíkon!

21. Tekintsük az alábbi komplex számokat: $z_1 = 6(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$, $z_2 = -3+3i$,

    Add meg azokat az u és v komplex számokat trigonometrikus alakban, amelyekre $u = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{18}$, $v^3 = (z_1 - 6i)^8$,

22. Legyen e a $2x = y = -z$ egyenletrendszerű egyenes és f az e-re való merőleges vetítés.
    (a) Add meg f sajátértékeit és sajátvektorait!
    (b) Add meg f-nek egy sajátbázisát és írd fel f mátrixát ebben a bázisban! Mit jelent ez? Szemléltesd a jelentését egy példával!
    (c) Vezesd le f képletét és írd fel f mátrixát a standard bázisban; ennek segítségével ellenőrizd le az (a) pontban kapott eredményedet a definícióknak megfelelően!
    (d) Mivel egyenlő $f(P)$, ha $P(1,2,3)$?

23. Írd fel az xy-sík $2x + y = 0$ egyenletű egyenesére való tükrözés mátrixát a standard bázisban, illetve az $\underline{e}_1 = \underline{j}$, $\underline{e}_2 = \underline{i} - 2\underline{j}$ bázisban. Mik a mátrixok sajátértékei és sajátvektorai? Ugyanazok-e a sajátvektorok?

24. Mik az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixú tenzor sajátértékei, sajátvektorai? Mi a geometriai jelentése?

25. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
    (a) Számítsd ki az A mátrix inverzét mind a Gauss-féle kiküszöböléses eljárással, mind a determinánsok segítségével! Eredményedet ellenőrizd a definíciónak megfelelően! Ezután *az inverz-mátrix felhasználásával* oldd meg a
    $$2x + y = 5, \qquad -x + 2y + 4z = 2, \qquad 2y + 3z = 1$$
    egyenletrendszert!
    (b) Oldd meg az előző egyenletrendszert közvetlenül a Gauss-féle kiküszöböléses eljárással!
    (c) Hogyan kell a fenti egyenletrendszer utolsó egyenletében z együtthatóját és a jobb oldalt megváltoztatni, hogy végtelen sok megoldás legyen? Írd fel a végtelen sok megoldást!
    (d) Sajátértéke-e A-nak a 0?

26. Számítsd ki az $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és ábrázold azokat a Gauss-féle komplex számsíkon!

27. Számítsd ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! Milyen értelemben definit A? (Pozitív definit, pozitív szemidefinit, negatív definit, negatív szemidefinit, vagy indefinit?)

28. Írd fel a síkbeli, origó körüli $+120^\circ$-os forgatás mátrixát a standard bázisra vonatkoztatva, majd ennek felhasználásával számítsd ki $P(1,-3)$ képét, valamint a transzformáció mátrixának sajátértékeit és inverzét!

29. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-féle kiküszöböléses eljárással! Mi álljon a 19-es helyén, hogy ne legyen megoldás?
    $$x_1 + 2x_3 = 10 \qquad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \qquad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \qquad 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 19$$