Gyakorló feladatlap függvénytani bevezetéshez
2005. december 12.

1. Egy 5 méter sugarú gömbbe egyenes körhengereket írunk úgy, hogy a henger alapkörei a gömb felületére esnek. Jelöljük V-vel a henger térfogatát, t-vel egy alapkörének területét.
   Döntsd el, hogy van-e függvényszerű kapcsolat V és t, illetve t és V között! Ha van, akkor add meg a megfelelő képletet és értelmezési tartományt is!

2. Egy 200×150-es téglalap alakú lemez mindegyik sarkából levágunk egy-egy ugyanakkora négyzetet, majd a maradék lemez oldalán felhajtjuk a téglalapokat; így egy felül nyitott téglatest alakú tartályt kapunk. Jelölje x a négyzet oldalát, t a levágott területet és V a tartály térfogatát.
   Fejezd ki V-t és t-t x-szel, majd ennek segítségével döntsd el, hogy van-e függvényszerű kapcsolat V és t, illetve t és V között! Ha van, akkor add meg a megfelelő képletet és értelmezési tartományt is!

3. Egy 10 méter sugarú gömbbe egyenes körhengereket írunk úgy, hogy a henger alapkörei a gömb felületére esnek. Jelöljük A-val a henger felszínét, t-vel egy alapkörének területét.
   Döntsd el, hogy van-e függvényszerű kapcsolat A és t, illetve t és A között! Ha van, akkor add meg a megfelelő képletet és értelmezési tartományt is!

4. Egyszerűsítsd az alábbi képleteket: $f(x) = \mathrm{tg}(\arccos x)$, $g(x) = \sin(2\,\mathrm{arctg}\, x)$!

5. Ábrázold az alábbi képletű függvények grafikonját!

$$f(x) = 4\cos(2x+6)+16, \qquad g(x) = \arcsin(2x-3)+4, \qquad h(x) = 2\exp(3-4x)-5$$

$$p(x) = x\sin(\frac{x}{2}), \qquad q(x) = \frac{\cos(4x)}{x}, \qquad r(x) = e^{-2x}\sin(\pi x)$$

6. Állapítsd meg az alábbi képletekkel megadott függvények értelmezési tartományának határpontjaiban a függvény határértékét és ezek alapján vázold grafikonját!

$$f(x) = \frac{\ln(6x+1)}{x^2+x-6}, \qquad g(x) = \frac{2x-3}{x^2+x-6}, \qquad h(x) = e^{g(x)}$$

$$k(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}, \qquad \ell(x) = \ln(k(x)), \qquad m(x) = \frac{2x-1}{x-x^2}, \qquad n(x) = \mathrm{arctg}(m(x))$$

7. Írd fel az alábbi képletekkel megadott f függvények grafikonjának x_0-hoz tartozó pontjában az érintő egyenletét! Ez alapján közelítsd $f(x)$-et $x \approx x_0$ esetén és adj egy szemléltető példát!

$$f(x) = 2 + \sqrt{x^4 - \mathrm{tg}^2(3x)} \cdot \ln(6x-5),\ x_0 = 1 \qquad f(x) = \mathrm{tg}^3(\frac{x}{4}) \cdot e^{\sin(5x)},\ x_0 = \pi$$

$$f(x) = \frac{\cos^2(\mathrm{arctg}(2x))}{x^3+x+1},\ x_0 = 0 \qquad f(x) = \cos^2\left(\pi\sqrt{3x}\right),\ x_0 = 3$$

8. Végezd el az alábbi képletekkel megadott f függvények monotonitási vizsgálatát és vázold grafikonját! Adj meg egy olyan intervallumot, amelyre megszorítva f-et a keletkező függvény invertálható és add meg az inverz függvény grafikonját!

$$a)\quad f(x) = \frac{x}{x^2+2x+9} \qquad b)\quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \qquad c)\quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)} \qquad d)\quad f(x) = \sqrt[3]{x^2+2x+9}$$

$$e)\quad f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+1} \qquad f)\quad f(x) = \mathrm{arctg}(x) - \frac{x}{2} \qquad g)\quad f(x) = \frac{5x+2}{(4x-1)^2} \qquad h)\quad f(x) =$$

9. Hányszor veszi fel az $f(x) = \mathrm{arctg}(x) - \dfrac{x}{2}$ képletű f függvény a 0,2 értéket és mely intervallumokban?

10. Oldd meg az $e^{2x+1} = 3 - 4x$ egyenletet közelítőleg az $x = 0$ körül!