

Gyakorló feladatok valószínűségszámításból közgazdász, ... hallgatóknak
2005. december 9.

1. 5 piros és 3 fehér golyó közül véletlenszerűen kivesszünk 3-at. Jelentse ξ a kivett fehér golyók számát.
- (a) Számítsd ki ξ eloszlását, várható értékét és szórását!
 - (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy van fehér a kivettek között, illetve annak, hogy több a fehér a kivettek között, mint a piros?

2. Legyen $f(x) = 24/x^4$, ha $x > a$ és $f(x) = 0$ különben.

Milyen a -ra lesz f sűrűségfüggvény? Add meg az ehhez tartozó eloszlásfüggvény képletét és grafikonját, valamint számítsd ki az f sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változóra $M(\xi)$ -et, valamint $P(1 \leq \xi < 8)$ -at!

3. Egy ládában 10 kiváló, 2 még éppen elfogadható és 3 selejtes termék van. Kivesszünk közülük véletlenszerűen 3-at; jelentse ξ a kivett selejtes termékek számát.

- (a) Számítsd ki ξ eloszlását és várható értékét!
- (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy több a selejt, mint a kiváló a kivettek között?

4. Legyen $f(x) = -\frac{x}{4}$, ha $a < x < a + 2$ és $f(x) = 0$ különben.

Milyen a -ra lesz f sűrűségfüggvény? Add meg az ehhez tartozó eloszlásfüggvény képletét és grafikonját, valamint számítsd ki az f sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változóra $M(\xi)$ -t, $D(\xi)$ -t, $P(\xi > 2)$ -t és ξ eloszlásfüggvényét!

5. Legyen $f(x) = ax$, ha $0 < x < 1/a$ és $f(x) = 0$ különben. Milyen a paraméterre lesz f sűrűségfüggvény? Számítsd ki az ilyen sűrűségfüggvényű X valószínűségi változó várható értékét és $P(X > 0.1)$ -et!

6. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, f , az alábbi módon van megadva:

$$f(x) = a^2 - x^2, \quad \text{ha } -a \leq x \leq a \quad \text{és} \quad f(x) = 0 \text{ különben.}$$

Határozd meg a -t, majd X eloszlásfüggvényét, várható értékét, és a $P(X > 0.2)$, $P(-0.3 < X < 0.2)$ valószínűségeket!

7. Legyen f az alábbi képlettel megadott valós függvény:

$$f(x) = e^{-x/a}, \quad \text{ha } x > a \quad \text{és} \quad f(x) = 0 \text{ különben,}$$

ahol a valós állandó.

- (a) Milyen a esetén lesz f sűrűségfüggvény?
- (b) Legyen a az a szám, amellyel f sűrűségfüggvény, továbbá jelöljön ξ egy olyan valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye éppen f .
Add meg ξ eloszlásfüggvényét, továbbá az $M(\xi)$, $P(-2 < \xi < 3)$ és $P(\xi > 4)$ értékeket!

8. Tekintsük a következő F függvényt: $F(x) = \frac{x-3}{x+1}$, ha $3 \leq x$ és $F(x) = 0$ különben. Igazold, hogy F eloszlásfüggvénye egy ξ valószínűségi változónak, majd számold ki ξ sűrűségfüggvényét, várható értékét, valamint a $P(\xi > 1)$, $P(1 < \xi < 5)$ valószínűségeket!

9. Legyen

$$F(x) = a - e^{bx}, \quad \text{ha } x \geq 2 \quad \text{és} \quad F(x) = 0 \quad \text{különben.}$$

(a) Milyen a, b esetén lesz F eloszlásfüggvény?

(b) Ha ξ eloszlásfüggvénye F és $P(\xi < 3) = 0.4$, akkor mennyi $P(\xi \geq 3 | \xi \leq 4)$?

10. Legyen ξ exponenciális eloszlású. Tudjuk, hogy $P(\xi > 2) = 0.5$. Mennyi ξ várható értéke?

11. 3 kockával dobunk. Jelölje ξ a dobott számok maximumát. Határozd meg $M(\xi)$ -t és $P(\xi \geq 5)$ -öt!

12. Egy 1-szer 2 méteres asztalra magasról ráesik egy tárgy; feltételezhetô, hogy a becsapódási pont véletlenszerű és egyenletes eloszlást követ.

Add meg e pontnak az asztal szélétől való átlagos távolságát! (Azaz annak a ξ valószínűségi változónak az eloszlás- és sűrűségfüggvényét, majd várható értékét, amely épp a becsapódási pontnak a hozzá legközelebbi asztaléltől való távolságát mutatja.)

13. Valaki megír 3 levelet 3 különböző embernek és megcímzi a borítékokat is, de a leveleket taláломra rakja a borítékokba. Jelölje ξ a helyesen elküldött levelek számát. Mennyi ξ várható értéke?

14. Legyen ξ eloszlása egyenletes az $[5, 8]$ intervallumon és $\eta = \frac{1}{\xi}$. Határozd meg η eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

15. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, f , az alábbi módon van megadva:

$$f(x) = \frac{x}{2}, \quad \text{ha } 0 < x < 2 \quad \text{és} \quad f(x) = 0 \quad \text{különben.}$$

Határozd meg $\alpha = 12\xi - 6$ és $\beta = 30 - 5\xi^2$ korrelációs együtthatóját!

16. Egy termék mérethibája normális eloszlású valószínűségi változó 0 várható értékkel és 5 mm szórással. A termék első osztályú, ha a mérethiba legfeljebb 2 mm és selejtes, ha legalább 9 mm. Ekkor 100 termékből átlagosan hány termék lesz elfogadható (tehát nem selejt), de nem első osztályú?

17. A ξ valószínűségi változóra $M(\xi) = 100$ és $D(\xi) = 5$. Mit tudunk ekkor mondani a $P(90 < \xi < 110)$ valószínűségről?

18. Egy ξ valószínűségi változóra $D(\xi)/M(\xi) = 1\%$. Mit tudunk mondani annak valószínűségéről, hogy ξ relatív eltérése a várható értéktől, azaz $\frac{|\xi - M(\xi)|}{M(\xi)}$ legfeljebb 3%?

19. Egy $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & \text{ha } 0 \leq x, y, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ellenőrizd, hogy f képlete tényleg sűrűségfüggvényt határoz meg, majd számold ki ξ , ξ_1 , ξ_2 eloszlásfüggvényét, várható értékét, valamint $R(\xi_1, \xi_2)$ -t! Független-e ξ_1 és ξ_2 ? $P(\xi_1 + \xi_2 > 1/2) = ?$

20. Egy $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlását a $p = 1/12$ értékkel az alábbi táblázat adja meg:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	-1	2
0	p	$2p$
1	$3p$	p
2	$4p$	p

Igaz-e, hogy $D^2(\xi_1 + \xi_2) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2)$? Mi $\eta = \xi_2/\xi_1$ eloszlása, várható értéke?

21. Egy $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlását az alábbi táblázat adja meg:

$\xi_2 \backslash \xi_1$	-1	1
0	p	$1/2$
1	q	p

Megválasztható-e p és q úgy, hogy ξ_1 és ξ_2 korrelálatlanok legyenek? Mikor lesznek függetlenek is?

22. Egy $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 y^3, & \text{ha } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0, \text{ vagy } y \leq 0 \\ 1 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsd ki a következő valószínűséget: $P(\xi_1 > 1/2, 1/2 < \xi_2 < 3/4)$! Szemléltesd számításodat rajzon! Mi ξ , illetve peremeloszlásainak sűrűségfüggvénye, várható értéke? Független-e ξ_1 és ξ_2 ? $R(\xi_1, \xi_2) = ?$

23. Egy fűrésztelepen 100 darab, azonos fajtájú deszkát fektetnek egymásra és kötnek össze. A deszkák átlagos vastagsága 1 centiméter, szórása 1 milliméter. Jelölje η egy ilyen köteg összvastagságát (centiméterben).

- (a) Számítsd ki közelítőleg a $P(\eta < 98)$ és $P(97 < \eta < 101)$ értékeket! Milyen feltételezések mellett melyik tételt használtad?
- (b) Add meg annak a tárolóhelynek a legkisebb d magasságát, amelyben a fenti típusú fekvő kötegeket 99% eséllyel tárolni tudjuk!

Függelék: Φ néhány értéke

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
$\Phi(x)$	0.5000	0.5987	0.6915	0.7734	0.8413	0.8944	0.9332
x	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25
$\Phi(x)$	0.9599	0.9772	0.9878	0.9938	0.9970	0.9987	0.9994