

Matematika gyakorló feladatok építőmérnök hallgatóknak
2003. október 21.

1. Egy 5 hosszú szabályos tetraéder egy csúcsából kiinduló élvektorai legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$; legyenek ezek ebben a sorrendben jobbsodrásúak. Fejezd ki az alábbi mennyiségeket a lehető legegyszerűbb alakban!

$$\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{b}) \quad (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \quad \underline{a} \cdot (\underline{a} \times \underline{b})$$

2. Egy Descartes-féle koordinátarendszerben adott az $A(1, -1, 2)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, 1, 4)$ és $D(5, 0, 3)$ pont, valamint az $5x - y + 2z = 6$ egyenletű S sík.

- (a) Igazold, hogy B, C, D háromszöget határoz meg és számítsd ki ennek a háromszögnek a területét!
- (b) Mekkora a BCD háromszög C -nél lévő szöge?
- (c) Bontsd fel az \overrightarrow{AC} vektort egy \overrightarrow{AB} irányú és egy \overrightarrow{AB} -re merőleges vektor összegére! Ennek felhasználásával írd fel a háromszög C -ből kiinduló magasságvonalának az egyenletrendszerét!
- (d) Rajta van-e S -en az A pont? Hol metszi az A -ból S -re állított merőleges egyenes az xy -síkot?
- (e) Írd fel annak az A -n átmenő egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos S -sel és merőleges az e_{BD} egyenesre! Add meg az egyenes A -tól 2 egységre lévő pontjait is!
- (f) Elválasztja-e S az A és B pontokat?
- (g) Írd fel az \underline{i} vektort egy S -re merőleges és egy S -sel párhuzamos vektor összegeként!
- (h) Igazold, hogy A, B, C, D tetraédert határoz meg és számítsd ki a térfogatát!
- (i) Írd fel az $ABCD$ tetraéder C -ből kiinduló magasságvonalának az egyenletrendszerét! Hol metszi ez az egyenes az yz koordinátasíkot?
- (j) Írd fel az ABC háromszög A csúcsából kiinduló magasságvonalának egyenletrendszerét!
- (k) Igazold, hogy $E(6, 3, 2)$ benne van az ABC síkban és dönts el, hogy az ABC háromszög belsejében van-e!
- (l) Mekkora szöget zár be S_{ABC} és S ?
- (m) Milyen távol van egymástól e_{AB} és az x -tengely?
- (n) Számítsd ki a C csúcsnak e_{AB} -re vonatkozó tükörképének koordinátáit!
- (o) Számítsd ki az A csúcsnak az S_{BCD} -re vonatkozó merőleges vetületének koordinátáit!

3. Oldd meg az $\underline{a} \times \underline{x} = \underline{b}$ egyenletet az ismeretlen \underline{x} vektorra az alábbi esetekben:

- (a) $\underline{a} = (2, 3, -1)$, $\underline{b} = (-1, 2, 4)$;
- (b) $\underline{a} = (2, 3, -1)$, $\underline{b} = (-1, 2, 5)$;
- (c) \underline{a} és \underline{b} két tetszőleges, adott paraméter vektor!

4. Adott a térben az \underline{a} , \underline{b} és \underline{c} vektor. Határozd meg azon \underline{x} vektorokat, melyek a fenti három vektorral egyforma szöveget zárnak be!

5. Adott a térben az \underline{a} , \underline{b} és \underline{c} vektor. Legyen $\underline{u} = 2\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{v} = 2\underline{b} + 3\underline{c}$ és $\underline{w} = \underline{a} - 5\underline{c}$. Hozd a legegyszerűbb alakra az $\underline{u} \cdot \underline{v} \cdot \underline{w}$ vegyes szorzatot!

6. Legyen \underline{a} és \underline{b} két adott merőleges vektor. Fejezd ki az alábbi vektorokat \underline{a} -val és \underline{b} -vel!

$$(a) \underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{b}), \quad (b) \underline{a} \times (\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{b})), \quad (c) \underline{b} \times (\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{b})), \quad (d) \underline{a} \times (\underline{a} \times (\underline{a} \times (\underline{a} \times \underline{b}))).$$

7. Az $\underline{a} + t\underline{b}$ alakú vektorok közül melyiknek a legkisebb a hossza, ahol \underline{a} és \underline{b} adott vektorok, valamint

$$(a) t \in \mathbb{R}; \quad (b) t \in [0, \infty); \quad (c) t \in [-1, 1]$$

tetszőleges! Mindegyik esethez rajzolj ábrát is!

8. Igazold, hogy tetszőleges \underline{a} , \underline{b} és \underline{c} vektorok esetén

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{0} \quad !$$

9. Igazold, hogy tetszőleges vektorok esetén

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{a} \times \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{a} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c} \quad !$$