1999. október 6.

1. Ábrázold a komplex számsíkon azokat a halmazokat, amelyeket az alábbi feltételnek megfelelő z komplex számok alkotnak:

$$\text{(a)}\quad \mathrm{Re}\, z \le 0, \qquad \text{(b)}\quad \mathrm{Re}(jz) \le 0, \qquad \text{(c)}\quad \mathrm{Im}\left((1+j)z\right) \ge 0, \qquad \text{(d)}\quad |z-3+4j| \le 3, \qquad \text{(e)}\quad \left|\frac{2}{z}\right| \le 4,$$

$$\text{(f)}\quad \arg(z) = \frac{\pi}{3}, \qquad \text{(g)}\quad \frac{\pi}{3} \le \arg(z) \le \frac{\pi}{2}, \qquad \text{(h)}\quad \mathrm{Re}\, z \le 0 \text{ és } \arg(z) \ge \frac{5\pi}{4}, \qquad \text{(i)}\quad 1 \le |z| \le 3 \text{ és } \frac{\pi}{2} \le \arg(z) \le \pi.$$

2. Legyen $z = -2-j$, $w = 3+4j$. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét!

$$\text{(a)}\quad z^2 w, \qquad \text{(b)}\quad \frac{w}{z}, \qquad \text{(c)}\quad \arg(w^{18}), \qquad \text{(d)}\quad \left|\frac{(1+j)z^4}{w-6}\right|, \qquad \text{(e)}\quad (z+1)^{15}, \qquad \text{(f)}\quad \sqrt[4]{w}.$$

3. Tekintsük az alábbi komplex számokat: $z_1 = 12(\cos 300° + j \sin 300°)$, $z_2 = -3-3j$.

   Add meg azokat az u, v és w komplex számokat algebrai és trigonometrikus alakban is, amelyekre

$$u = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{14}, \qquad v = (z_1 + 2 - 3j)^8, \qquad w^3 = z_2.$$

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket a komplex számok között! Az eredményt algebrai és trigonometrikus alakban is add meg és ábrázold a komplex számsíkon!

$$\text{(a)}\quad z^2 + 2j\,z + 8 = 0, \qquad \text{(b)}\quad z^4 + 8 = 0, \qquad \text{(c)}\quad \frac{-8-19j}{z^3} - j = 4, \qquad \text{(d)}\quad (\sqrt{3}-j)z + \frac{6(\cos 105° + j \sin 105°)}{z^2} = 0.$$

5. Határozd meg azt a z komplex számot, melyre $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ és $z^{12} = (1+j)\overline{z}^7$?

6. Mely komplex számokra egyenértékű

   (a) a konjugálás és a négyzetreemelés; (b) a konjugálás és a j-vel való szorzás; (c) a négyzetreemelés és a j-vel való szorzás?

7. Hány megoldása van az alábbi egyenleteknek a valós, illetve a komplex számok között?

$$\text{(a)}\quad z^2 + 1 = 0, \qquad \text{(b)}\quad z\,\overline{z} + 1 = 0, \qquad \text{(c)}\quad z^2 - 1 = 0, \qquad \text{(d)}\quad z\,\overline{z} - 1 = 0, \qquad \text{(e)}\quad \frac{z}{\overline{z}} = 1, \qquad \text{(f)}\quad \frac{z}{\overline{z}} = 2.$$

Horváth Zoltán