

I. feladatsor

(1) Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$	(b) $f(x) = \frac{1}{9x^2 + 1}$
(c) $f(x) = \frac{1}{16x^2 + 25}$	(d) $f(x) = \frac{2}{5x^2 + 3}$
(e) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$	(f) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 13}$
(g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$	(h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x - 9x^2}}$
(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-4x^2 - 12x - 8}}$	(j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{12x - 9x^2 - 3}}$

(2) Milyen típusú racionális törtek összegére bontaná az alábbi törteket:

(a) $f(x) = \frac{1}{x(x+4)}$	(b) $f(x) = \frac{x+1}{9x^2+x}$
(c) $f(x) = \frac{5x+2}{x^2(x-1)}$	(d) $f(x) = \frac{2x^2-7x}{x(5x^2+3)^2}$
(e) $f(x) = \frac{3x^3-7x+2}{x(x-1)^2(x^2+1)}$	(f) $f(x) = \frac{3x^4-x-1}{(x-1)^3(2x^2+7)^3(x+2)}$

(3) Bontsa fel az alábbi racionális törteket elemi törtek összegére:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$	(b) $f(x) = \frac{6}{x(x+3)}$
(c) $f(x) = \frac{50}{x(x^2-25)}$	(d) $f(x) = \frac{8x+4}{x^3+2x^2}$
(e) $f(x) = \frac{6x+9}{x^3+6x^2+9x}$	(f) $f(x) = \frac{6x^3+9x^2+72x+85}{(x^2+25)(x^2+2x-15)}$
(g) $f(x) = \frac{3x^4+6x^2+x^3+8x+1}{x^5+2x^3+x}$	(h) $f(x) = \frac{3+7x^2+x+29x^3+16x^4-4x^6+30x^5+8x^7}{(2x^2+1)^3(x^2+4x+4)}$

(4) Határozza meg az alábbi integrálokat:

(a) $\int \frac{2}{x^2+2x-3} dx$	(b) $\int \frac{x^2+1}{3x^3-3x} dx$
(c) $\int \frac{2x^2+11x+16}{x^3+4x^2+8x} dx$	(d) $\int \frac{1}{4x^2+6x+2} dx$
(e) $\int \frac{6+2x^2-3x}{(x^2+2)(x+3)} dx$	(f) $\int \frac{12x^2+50x+49}{9x^3+42x^2+49x} dx$
(g) $\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+1}{x^5+x^3} dx$	(h) $\int \frac{2x^3+x^2+18x-9}{x^4-81} dx$

(5) Határozza meg az alábbi integrálokat!

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int e^{\sqrt{x}} dx & \text{(b)} \int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx \\
 \text{(c)} \int x \sin(\sqrt{x}) dx & \text{(d)} \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx \\
 \text{(e)} \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx & \text{(f)} \int \sin(\ln x) dx \\
 \text{(g)} \int e^x \sin(e^x) dx & \text{(h)} \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cos(\sqrt[3]{x}) dx \\
 \text{(i)} \int \frac{e^{3x}}{e^x + 2} dx & \text{(j)} \int \frac{5}{e^{2x} + 1} dx \\
 \text{(k)} \int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx & \text{(l)} \int \frac{\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} dx \\
 \text{(m)} \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x}} dx & \text{(n)} \int \sin(\sqrt{x-3}) dx \\
 \text{(o)} \int \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 1} dx & \text{(p)} \int \frac{5e^{2x} - 8e^x}{2e^{2x} + 9e^x - 5} dx \\
 \text{(q)} \int \frac{3x - 4}{\sqrt{4x + 2}} dx & \text{(r)} \int \frac{5x + 1}{\sqrt{2 - 3x}} dx \\
 \text{(s)} \int (2x - 3)\sqrt{5x + 2} dx & \text{(t)} \int (2 - 5x)\sqrt{2 + 3x} dx \\
 \text{(u)} \int \sin(\sqrt{2x + 5}) dx & \text{(v)} \int e^{\sqrt{4-2x}} dx
 \end{array}$$

(6) Határozza meg az alábbi improprius integrálokat!

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \int_0^{\infty} e^{-2x} dx & \text{(b)} \int_{-\infty}^{-1} e^{-2x} dx & \text{(c)} \int_0^{\infty} x e^{-2x} dx \\
 \text{(d)} \int_{-\infty}^{-10} x^2 e^{4x+3} dx & \text{(e)} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{(f)} \int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{4x^2} dx \\
 \text{(g)} \int_5^{\infty} \frac{3}{7x^3} dx & \text{(h)} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x} dx & \text{(i)} \int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \\
 \text{(j)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx & \text{(k)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} dx &
 \end{array}$$

(7) Határozza meg az alábbi improprius integrálokat!

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int_0^1 \ln x dx & \text{(b)} \int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2}} dx \\
 \text{(c)} \int_{-3}^0 \frac{1}{(x+3)^2} dx & \text{(d)} \int_1^5 \frac{1}{\sqrt[5]{(5-x)^3}} dx \\
 \text{(e)} \int_{4/3}^5 \frac{1}{\sqrt{3x-4}} dx & \text{(f)} \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 \text{(g)} \int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx & \text{(h)} \int_{-5}^5 \frac{1}{\sqrt[5]{(x+2)^3}} dx \\
 \text{(i)} \int_0^5 \frac{1}{\sqrt[5]{(x-4)^4}} dx &
 \end{array}$$

II. feladatsor

- (1) Legyen $\mathbf{a}(-3; 2; 5)$, $\mathbf{b}(1; 4; 0)$, $\mathbf{c}(2; -2; 7)$ és $\mathbf{d}(11; 6; -3)$. Határozza meg az alábbiakat:
- | | | |
|--|--|--|
| (a) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$ | (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{d}$ | (c) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - \mathbf{d}$ |
| (d) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ | (e) $\langle \mathbf{d}, \mathbf{c} \rangle$ | (f) $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, 2\mathbf{c} - \mathbf{d} \rangle$ |
| (g) $\langle \mathbf{b} - 2\mathbf{d}, \mathbf{a} + 3\mathbf{b} \rangle$ | (h) $\langle \mathbf{b} - 2\mathbf{a}, -4\mathbf{d} \rangle$ | (i) $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ |
| (j) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ | (k) $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ | (l) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times \mathbf{d}$ |
| (m) $(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \times \mathbf{c}$ | (n) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$ | (o) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ |
| (p) \mathbf{abc} | (q) \mathbf{cba} | (r) \mathbf{bca} |
| (s) \mathbf{abd} | (t) \mathbf{cbd} | (u) \mathbf{dbb} |
- (2) A fenti vektorokat használva válaszolja meg az alábbiakat! Legyen továbbá $\mathbf{e}(1; -2; x)$!
- (a) Mekkora szöget zár be \mathbf{a} és \mathbf{b} ?
 - (b) Mekkora szöget zár be \mathbf{a} és \mathbf{d} ?
 - (c) Mekkora az \mathbf{a} és \mathbf{d} vektorok által közrezárt szög koszinusza?
 - (d) Bontsa fel a \mathbf{d} vektort \mathbf{a} -val párhuzamos és merőleges összetevőkre!
 - (e) Bontsa fel a \mathbf{d} vektort \mathbf{b} -vel párhuzamos és merőleges összetevőkre!
 - (f) Bontsa fel a \mathbf{d} vektort \mathbf{c} -vel párhuzamos és merőleges összetevőkre!
 - (g) Milyen x érték esetén lesz \mathbf{e} merőleges \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} és \mathbf{d} vektorokra? (külön-külön!)
 - (h) Milyen x értékek esetén fog \mathbf{e} és \mathbf{a} tompaszöget bezárni?
 - (i) Milyen x értékek esetén fog \mathbf{e} és \mathbf{b} tompaszöget bezárni?
 - (j) Milyen x értékek esetén fog \mathbf{e} és \mathbf{c} hegyesszöget bezárni?
 - (k) Milyen x értékek esetén fog \mathbf{e} és \mathbf{d} hegyesszöget bezárni?
 - (l) Határozza meg az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} és \mathbf{d} vektorok irányába mutató egységvektorokat!
- (3) Van-e olyan vektor, mely az x, y, z koordinátatengelyek pozitív irányával rendre 45° , 60° , 120° szöget zár be?
- (4) Egy szabályos hatszög középpontja $K(4; 1; 4)$, két szomszédos csúcsa $A(3; 1; 5)$ és $B(3; 2; 4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáját! Igazoljuk, hogy a hatszög szabályos!
- (5) Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}(-2; 3; 6)$, $\mathbf{b}(6; -2; 3)$ és $\mathbf{c}(3; 6; -2)$ vektorok kockát feszítenek ki!
- (6) Az ABC háromszög csúcsai $A(2; 3; 1)$, $B(-2; 1; 2)$ és $C(-1; 0; 3)$. Mekkora a háromszög kerülete, területe és az C csúcshoz tartozó magassága?
- (7) Az ABCD tetraéder térfogata 5 egység. Mik a D csúcs koordinátái, ha a D csúcs az y tengelyen van, és a többi csúcs koordinátái: $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; 1; 3)$?
- (8) Mekkora az $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$ csúcsú háromszög magasságvonalainak háromszögbe eső részeinek hossza?
- (9) Egy tetraéder csúcsai: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Mekkora a D -hez tartozó magasság?
- (10) Paralelepipedon egy csúcsából kiinduló élvektorok: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Fejezzük ki ezek segítségével a lapátlóvektorokat és a testátlóvektorokat!
- (11) Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, O egy tetszőleges pont. Bizonyítsa be, hogy ekkor: $OA + OC = OB + OD$.
- (12) Legyen az ABC szabályos háromszög oldala 2 egység hosszú. Mennyi $\langle AB, AC \rangle$?
- (13) Egy kockát kifeszítő 3 vektor közül kettő $\mathbf{a}(6; 2; -3)$ és $\mathbf{b}(-3; 6; -2)$. Határozzuk meg a harmadik vektort!
- (14) Mekkora az $\mathbf{a}(-9; 0; 9)$ és $\mathbf{b}(7; 2; -5)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

III. feladatsor

(1) Legyen $A(1, 2, -1)$, $B(2, 4, 5)$, továbbá legyen $e : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$, $z = -1$ egyenes, és

$$f : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 7 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- (a) Határozzuk meg az A -n és B -n átmenő egyenes mindkét(!) egyenletét!
 (b) Határozzuk meg az A -n átmenő $v(1, 0, 1)$ irányvektorú egyenest!
 (c) Rajta van-e az A vagy a B pont az e vagy az f egyenesen?
 (d) Határozzuk meg e paraméter nélküli és f paraméteres egyenletét, egy-egy pontját, és irányvektorát!
 (e) Határozzuk meg az A -n átmenő e -re és f -re merőleges egyenest!
 (f) Határozzuk meg az B -n átmenő e -vel párhuzamos egyenest!
 (g) Van-e közös pontja e -nek és f -nek?
- (2) Legyen továbbá $C(-1, 2, 0)$, $S_1 = 2x + y - 4z = 1$.
 (a) Határozzuk meg az A -n átmenő $n(-2, 1, 0)$ normálvektorú sík egyenletét!
 (b) Határozzuk meg az A, B, C pontokat tartalmazó síkot!
 (c) Határozzuk meg az A -t, B -t és e -t tartalmazó síkot!
 (d) Határozzuk meg az A -n átmenő e -vel és f -el párhuzamos síkot!
 (e) Hol döfi e , az S_1 síkot?
- (3) Milyen messze van A e -től?
 (4) Milyen messze van B e -től?
 (5) Milyen messze van A S_1 -től?
 (6) Milyen messze van e S_1 -től?
 (7) Mi S_1 és $S_2 : x + z = 1$ metszészvonala?
 (8) Mi S_2 és az YZ sík metszészvonala?
 (9) Milyen messze van az XY síktól f ?
 (10) Milyen messze van B S_1 -től?
 (11) Milyen messze van B S_2 -től?
 (12) Milyen messze van C f -től?
 (13) Milyen messze van a $6x + 3y - 12z = 9$ sík S_1 -től?
 (14) Milyen messze van az XY sík és a $z = 4$ síktól?
- (15) Milyen messze van az XY síktól az $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + 6t \\ z = 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes?
- (16) Milyen messze van S_1 -től az $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 9 \\ z = 6 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes?
- (17) Milyen messze van f -től az $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 7 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ egyenes?
- (18) Mekkora szöget zár be f és $\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = 7 + 3t \\ z = 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$?
- (19) Mekkora szöget zár be e és $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$?
- (20) Mekkora szöget zár be az XY sík és S_1 ?
 (21) Mekkora szöget zár be $x + y - z = 3$ és YZ ?
 (22) Mekkora szöget zár be e és S_1 ?

IV. feladatsor

(1) Tekintsük az alábbi mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Végezze el a lehetséges műveleteket:

$$A + B, 2A, A^T, 2A + 3C^T, 4D - 2D^T, AB, BA, CC^T, D^3, BC, DC, BD$$

(2) Számoljuk ki az alábbi determinánsokat:

$$\det(A), \det(BB^T), \det(C), \det(CC^T), \det(CD)$$

(3) Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait:

$$A, AA^T, D, D^2, AC, CA, B, B^2$$

(4) Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét:

$$A, AA^T, D, D^2, B$$

(5) Adja meg az alábbi mátrixok inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

(6) Számolja ki a sajátértékeket és a sajátvektorokat!

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

(7) Számolja ki a sajátértékeket és a sajátvektorokat és az inverzet!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -2 \\ -5 & 5 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(8) Oldja meg Gauss eliminációval:

(a)

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 4 \\ 3x - 4y + 5z &= 17 \\ y - 3z &= -7 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 6z &= 2 \\ 6x + 9y + 12z &= 4 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 2x + 4y + 8z &= -4 \\ 2x - 4z &= -6 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}x + y + z + w &= 2 \\x + 3y + z + 4w &= 10 \\-x + y + 2z + w &= 1 \\y + w &= 3\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}x + y - z &= 3 \\3x + y + z &= 3 \\4x - y &= 3\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}x - 7y + 5z &= 2 \\-7y + 6z &= 4 \\-9y + 8z &= 6\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}x - 7y + 5z &= 2 \\2x - 7y + 6z &= 4 \\3x - 14y + 11z &= 6\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}x - 7y + 5z &= 2 \\2x - 7y + 6z &= 4 \\x + z &= 6\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 4 \\x - 2y + 3z &= 8 \\2x + 3z &= 6\end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 5 \\-x + 4y + 5z &= 1 \\3y + 4z &= 3\end{aligned}$$

(k)

$$\begin{aligned}x + 4y - 2z &= 4 \\x + 3y + 5z &= -4 \\4x + 13y + 13z &= -6\end{aligned}$$

(l)

$$\begin{aligned}6x + 2y + 2z &= 8 \\12x + 20y + 6z &= -10 \\-12x + 44y + 14z &= -58 \\6x + 4y + 5z &= 13\end{aligned}$$

(m)

$$\begin{aligned}6x + 2y + 2z + 2w &= 12 \\ -6x + 14y - w &= 7 \\ 18x + 22y + 20z + 10w &= 70\end{aligned}$$

(n)

$$\begin{aligned}6x + 2y + 2z + 4w &= -34 \\ 12x + 20y + 6z + 11w &= -98 \\ -12x - 4y + 8z - 3w &= 18 \\ 6x + 4y + 17z + 15w &= -144\end{aligned}$$

(9) Számolja ki a determinánst és az inverz mátrixot! Ellenőrizze számításait!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

V. feladatsor

- (1) Határozza meg, és ábrázolja az alábbi függvények értelmezési tartományát!

$$\begin{array}{ll}
 f(x, y) = \sqrt{3x + 5y - 2} & f(x, y) = \ln(x + y - 2) \\
 f(x, y) = \sqrt{(3x + y + 2)y} & f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 10) \\
 f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{100 - x^2 - y^2}} & f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2 + (y - 3)^2 + 121)} \\
 f(x, y) = \sqrt{x + 2 + x} + \frac{1}{\ln 3x + y - 1} & f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 5)}{\sqrt{3x + 2y + 1}}
 \end{array}$$

- (2) Határozza meg az alábbi függvények szintvonalait!

$$\begin{array}{ll}
 f(x, y) = x^2 + y & f(x, y) = xy + y \\
 f(x, y) = 3x + y - 3 & f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 4)^2
 \end{array}$$

- (3) Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények összes lehetséges elsőrendű és másodrendű parciális deriváltfüggvényét!

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 \quad (b) \quad f(x, y) = y^3 \quad (c) \quad f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$(d) \quad f(x, y) = x^2 y^4 \quad (e) \quad f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)} \quad (f) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{e^y}$$

- (4) Mutassa meg, hogy ha $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, illetve $u(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$, akkor

$$\Delta u := \partial_1^2 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) = 0.$$

- (5) Írja fel az $f(x, y) = x + x^2 y + y$ függvény $(-1, 1)$ -beli érintősíkjának egyenletét!

- (6) Alkalmass linearizáltat használva számolja ki közelítően $\ln(1.01) + \sqrt[3]{8.01}$ értékét!

- (7) Határozza meg $\partial f(x, y)$ -t, ha:

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 + \ln(y^3) \sqrt{xy}$$

$$(b) \quad f(x, y) = \operatorname{tg} x^3 + y^2 + y^4 x$$

- (8) Határozza meg $\partial_v f(x, y)$ -t, ha:

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 \ln(y) + \sqrt{xy}, \quad v = (12, 5)$$

$$(b) \quad f(x, y) = x^5 \sin(x)y + y^4 x, \quad v = (2, 3)$$

- (9) Határozza meg $\partial_\alpha f(x, y)$ -t, ha:

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 \ln(y) + \sqrt{xy}, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$(b) \quad f(x, y) = x^5 \sin(x)y + y^4 x, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

- (10) Határozza meg $\partial f(2, 3)$ -et, ha $f(x, y) = \sqrt{x^2 y + y x^2}$.

- (11) Határozza meg $\partial_v f(1, -1)$ -et, ha $f(x, y) = x^6 + xy^2 + y^2$, $v = (-2, -3)$.

- (12) Határozza meg $\partial_\alpha f(1, -1)$ -et, ha $f(x, y) = xy + x^2 e^y$, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

- (13) Keresse meg az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékeit!

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy;$$

$$(b) \quad f(x, y) = (x^2 + 1)(y + \frac{1}{y});$$

$$(c) \quad f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4;$$

$$(d) \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2;$$

$$(e) \quad f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2;$$

$$(f) \quad f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2.$$

(14) Számítsa ki az alábbi többdimenziós integrálokat!

(a) $\int_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$, ahol $D = [1, 2] \times [0, 1]$;

(b) $\int_D \sin y dx dy$, ahol $D = [0, 1] \times [-1, 1]$;

(c) $\int_D (\sqrt{x} + y)^2 dx dy$, ahol $D = [0, 1] \times [0, 1]$;

(15) Számítsa ki $\int_{N_x} f$ értékét, ha

(a) $f(x, y) = 1$, $N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$;

(b) $f(x, y) = xy^2$, $N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$;

(c) $f(x, y) = \sqrt{y}$, $N_x := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq (1 - x)^2\}$.

(16) Számítsa ki az $f(x, y) = xy$ függvény integrálját az $y = x^2 - 1$ és az $y = x + 1$ görbék grafikonjai által határolt tartományon.