MÁTRIXOK

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 7 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -2 & 12 & -9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) B $3B - 2C^T$ $\left[\begin{pmatrix} 2 & -17 \\ 29 & -36 \\ -9 & 36 \end{pmatrix}\right]$

   (b) B $4A - 6B$ [nem lehet]

   (c) B AB $\left[\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -55 & 88 \\ 33 & -51 \end{pmatrix}\right]$

   (d) B BC $\left[\begin{pmatrix} 34 & -112 & 75 \\ 33 & -83 & 51 \\ -17 & 79 & -57 \end{pmatrix}\right]$

   (e) B A^2 $\left[\begin{pmatrix} 13 & 15 & -9 \\ 17 & 101 & -88 \\ -11 & -61 & 53 \end{pmatrix}\right]$

   (f) B AC [nem lehet]

   (g) B $D^2 - D$ $\left[\begin{pmatrix} 26 & -24 \\ -30 & 32 \end{pmatrix}\right]$

   (h) B $2B^T - 3C$ $\left[\begin{pmatrix} -7 & 31 & -11 \\ -8 & -44 & 39 \end{pmatrix}\right]$

   (i) B $(D + D^T)^2$ $\left[\begin{pmatrix} 97 & -90 \\ -90 & 117 \end{pmatrix}\right]$

   (i) B $det(D)$ $[-14]$

   (j) B $det(A)$ $[-12]$

2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$,
   $E = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

   (a) B CD $\left[\begin{pmatrix} -8 & 32 & -12 \\ 10 & -40 & 15 \\ -14 & 56 & -21 \end{pmatrix}\right]$

   (b) B DC $\left[\begin{pmatrix} -69 \end{pmatrix}\right]$

(c) $(2A-3B^T)^T$ $\left[\begin{pmatrix} -11 & 8 & -3 \\ -11 & 8 & 10 \\ -22 & -13 & 15 \end{pmatrix}\right]$

(d) B A^TC $\left[\begin{pmatrix} 39 \\ 23 \\ 23 \end{pmatrix}\right]$

(e) B $(A+B)D$ [nem lehet]

(f) B $(2A-B)D^T$ $\left[\begin{pmatrix} -39 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}\right]$

(g) B E^2-4F^T $\left[\begin{pmatrix} 32 & -20 \\ -6 & -24 \end{pmatrix}\right]$

(h) B $(E^T-F)^2$ $\left[\begin{pmatrix} 87 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix}\right]$

(i) B^2D^T+C $\left[\begin{pmatrix} -36 \\ 176 \\ -292 \end{pmatrix}\right]$

(j) B $det(E^T+2F)$ $[-42]$

(k) $det(2E-F^2)$ $[439]$

(l) $det(A^T+2B)$ $[-5715]$

3. B Legyen $G=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az X mátrixot, amelyre $2G+X=5H$! $\left[\begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 35 & -18 \\ 39 & 1 \end{pmatrix}\right]$

4. B Legyen $M=\begin{pmatrix} -4 & 14 & -8 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} -9 & 33 & 7 \\ 24 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az X mátrixot, amelyre $3N+X=-2M$! $\left[\begin{pmatrix} 35 & -127 & -5 \\ -94 & 7 & 8 \end{pmatrix}\right]$

5. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix}=10$ egyenletet! $[-2;2]$

6. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix}=3x-2$ egyenletet! $[-4;1]$

7. B Hogy kell megválasztani az x számot, hogy a $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen? $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$

8. B Hogy kell megválasztani az x számot, hogy a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen? $[2; 6]$

9. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2x$ egyenletet! $[6]$

10. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x$ egyenletet! $[-1; 3]$

11. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!
    (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ [655]
    (b) $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ [748]

12. B Bizonyítsa be, hogy a $c_1(1; -2)$ és $c_2(4; 3)$ vektorok lineárisan függetlenek!
    [csak az $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ triviális megoldás létezik, tehát lineárisan függetlenek]

13. B Vizsgálja meg, hogy az $x^2 + 3x^3 - 1; 2x^2 + 6; x$ függvények lineárisan függetlenek-e?
    [csak az $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ triviális megoldás létezik, tehát lineárisan függetlenek]

14. B Döntse el, hogy a $v_1(1; 2; -3), v_2(-2; 2; 5)$ és $v_3(8; -2; -21)$ vektorok lineárisan függetlenek-e!
    [$\alpha_1 = -2t, \alpha_2 = 3t, \alpha_3 = t$, tehát a vektorok lineárisan összefüggőek]

15. B Döntse el, hogy a $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek-e!
    [csak az $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ triviális megoldás létezik, tehát lineárisan függetlenek]

16. B Előállítható-e a c vektor az x, y vektorok lineáris kombinációjaként?
    $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -9 \\ 23 \end{pmatrix}$ $[-2x + 3y = c]$

17. B Előállítható-e az $x(-7;5)$ vektor az $c(3;-2), d(6;-4)$ vektorok lineáris kombinációjaként? $[nem]$

18. Előállítható-e a d vektor az a, b, c vektorok lineáris kombinációjaként?
$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $[2a - b - 5c = d]$

19. Előállítható-e a d vektor az a, b, c vektorok lineáris kombinációjaként?
$a = (1;2;-3), b = (-4;2;5), c = (1;-1;7), d = (-7;15;-23).$ $[4a + 2b - 3c = d]$

20. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 2 \\ -x - y + z &= 1 \end{aligned}$$
$[x = 1, y = 1, z = 1]$

21. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x - y - z &= -1 \\ 3x + y - z &= 3 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$
$\left[x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, z = t, t \in R\right]$

22. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$
$[x = 2, y = 1, z = 0]$

23. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 7x - 2y + 3z &= 8 \\ x - y + z &= 1 \\ 4x + 6y - 4z &= 3 \end{aligned}$$
[az egyenletrendszernek nincs megoldása]

24. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ -3x + 2y - z &= 6 \\ -6x + 5y + 5z &= 36 \end{aligned}$$
$[x = 14 - 5t, y = 24 - 7t, z = t, t \in R]$

25. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + y &= 3 \\ -x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$
$\left[x = \frac{7}{9}, y = \frac{13}{9}, z = \frac{5}{3}\right]$

26. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x + y - 2z + 4v &= 4 \\ -x - 4y + z + 2v &= -2 \\ 2x - 3y + z - v &= -1 \\ 4x - y + z + v &= 5 \end{aligned}$$
$[x = 1, y = 1, z = 1, v = 1]$

27. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x-y-3z+4v &= 2\\ 2x+y+z-5v &= -7\\ x+y+z+2v &= 6\\ 3x-4y-2z+v &= 7 \end{aligned}$$

$[x=1, y=-2, z=3, v=2]$

28. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3+5x_4 &= -1\\ 3x_1+2x_3-x_4 &= 2\\ -2x_1+3x_2+x_3 &= 3\\ -x_1-x_2-5x_3-11x_4 &= 1 \end{aligned}$$

[az egyenletrendszernek nincs megoldása]

29. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 3x_1-x_2+3x_3+4x_4 &= -20\\ 2x_1-2x_3+3x_4 &= -2\\ -2x_1+x_2+2x_3+5x_4 &= -11\\ 4x_1+3x_2-3x_4 &= 13 \end{aligned}$$

$[x_1=0,5; x_2=3; x_3=-2,5; x_4=-2]$

30. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_4 &= -3\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4 &= -1\\ 2x_1+x_2-2x_3+3x_4 &= 4\\ -x_1+x_3+2x_4 &= -2 \end{aligned}$$

$[x_1=-3+15t,5; x_2=-7t; x_3=-5+13t; x_4=t; t\in R]$

31. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1+4x_2-5x_3+3x_4 &= 19\\ -2x_1+6x_2-x_3+5x_4 &= 9,5\\ 3x_1+4x_2-3x_3 &= 21\\ 2x_1-4x_3+3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$[x_1=0,5; x_2=3; x_3=-2,5; x_4=-2]$

32. Döntse el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak!

(a) B $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $[det(A)=-2\neq 0$, létezik a mátrix inverze$]$

(b) B $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2\\ 8 & 0 & 5\\ 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $[det(B)=0$, nem létezik a mátrix inverze$]$

33. B Miyen x értékek esetén nincs inverze az $A=\begin{pmatrix} x & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak? $\left[x=\frac{7}{8}\right]$

34. B Miyen x értékek esetén van inverze az $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & x\\ 2 & 0 & 0\\ 7 & 4 & 20 \end{pmatrix}$ mátrixnak? $[x\neq 5]$

35. Igazolja, hogy a mátrixnak létezik inverze és határozza meg az inverz mátrixot!

(a) B $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $[det(A) = 1 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}]$

(b) B $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $[det(A) = 3 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}]$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $[det(C) = 1 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}]$

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $[det(D) = -6 \neq 0$,létezik a mátrix inverze; $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}]$

(e) $E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 6 & -8 & 15 \\ 10 & -15 & 34 \end{pmatrix}$ $[det(E) = 2 \neq 0$,létezik az inverz; $E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ -27 & 1 & -6 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}]$

(f) $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $[det(F) = 2 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}]$

(g) $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

$[det(G) = -36 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}]$

36. Határozza meg a mátrix sajátértékeit!

(a) B $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $[\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 11]$

(b) B $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $[\lambda_1 = \lambda_2 = 2]$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $[\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1]$

37. Határozza meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = -1, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = 4, s = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 2, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = -1, s = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 4, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = -1, s = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 2, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = -1, s = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = \lambda_2 = 0, s = \begin{pmatrix} -2t+3u \\ u \\ t \end{pmatrix}, t, u \in R, t, u \neq 0; \lambda_3 = 8, s = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

38. Határozza meg az $B^2 - 3B^T$ mátrix sajátértékeit és determinánsát!

$B = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 92; det(B^2 - 3B^T) = 184\right]$

39. Határozza meg az $(A^T - 2B)^2$ mátrix sajátértékeit és determinánsát!

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\lambda_1 = 62,77; \lambda_2 = 24,23; det((A^T - 2B)^2) = 1521\right]$