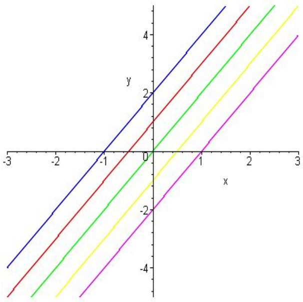
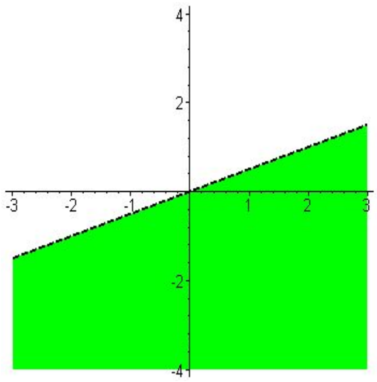
# *Többváltozós függvények*

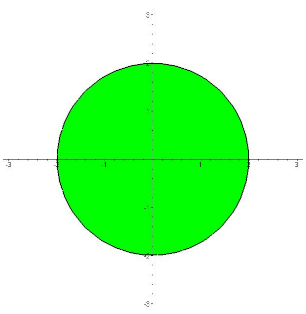
1. Ábrázolja az $f(x, y) = 2x - y, D(f) = R^2$ függvény $c = -2; -1; 0; 1; 2$ magasságokhoz tartozó szintvonalait!
   c=-2, c=-1,c=0,c=1,c=2



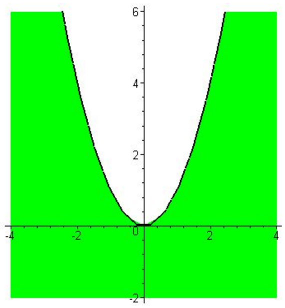
2. Határozza meg az $f(x, y) = \ln(x - 2y)$ függvény értelmezési tartományát!
   $[y < \frac{1}{2}x]$



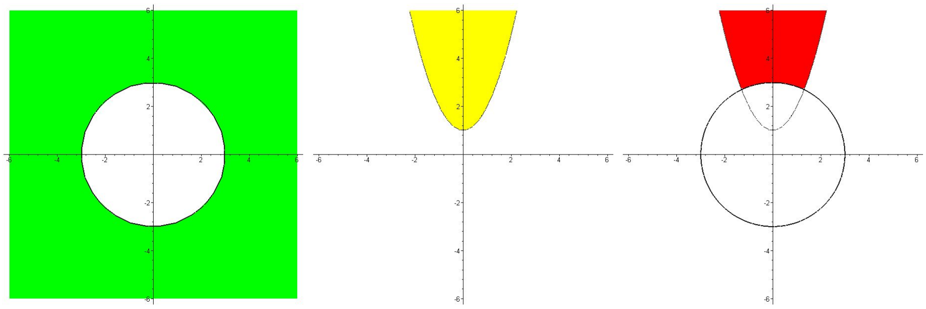
3. Határozza meg az $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \mathrm{e}^{x-y}$ függvény értelmezési tartományát!
   $[x^2 + y^2 \leq 4]$



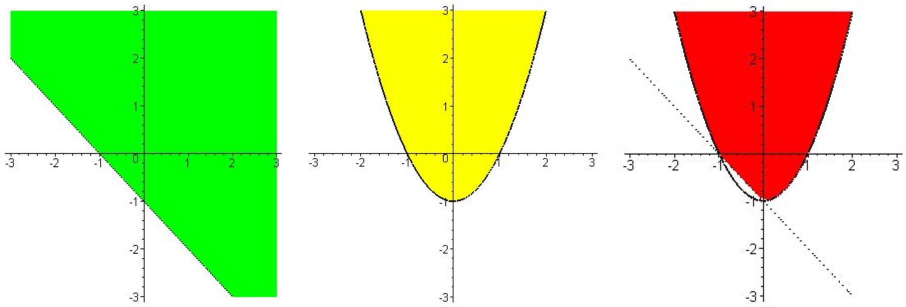
4. Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt[5]{x - y^3}$ függvény értelmezési tartományát!
   $[y \geq x^2]$



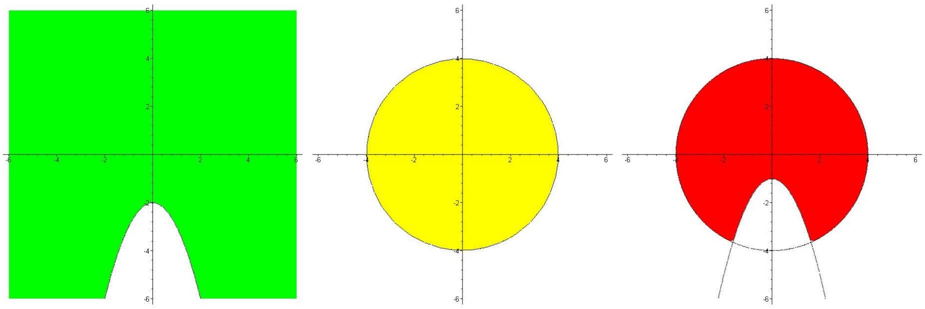
5. Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2 - 9} - \ln(y - x^2 - 1)$ függvény értelmezési tartományát!
   $[x^2 + y^2 \geq 9; y > x^2 + 1;$ értelmezési tartomány$]$



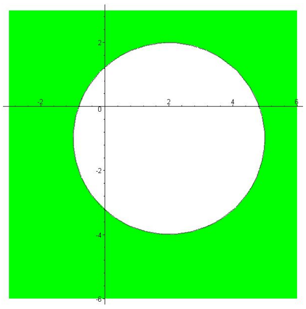
6. Határozza meg az $f(x,y) = \ln(x + y + 1) + \sqrt{y - x^2 + 1}$ függvény értelmezési tartományát!
   $[y > -x - 1; y \geq x^2 - 1;$ értelmezési tartomány$]$



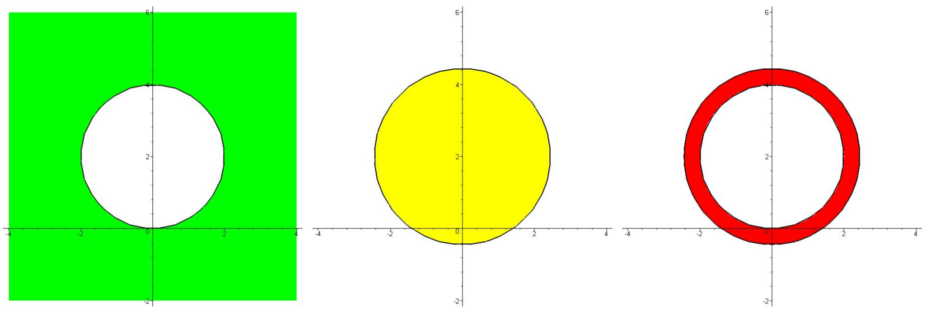
7. Határozza meg az $f(x,y) = \frac{\ln(y+x^2+2)}{\sqrt{-x^2-y^2+16}}$ függvény értelmezési tartományát!
   [$y > -x^2 - 2; x^2 + y^2 < 16$; értelmezési tartomány]



8. Határozza meg az $f(x,y) = \ln(x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4)$ függvény értelmezési tartományát!
   [$(x-2)^2 + (y+1)^2 > 9$;kör:középpont$(2;-1)$, sugár $r = 3$]



9. Határozza meg az $f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 4y - 1)$ függvény értelmezési tartományát!
   [$x^2 + (y-2)^2 \geq 4; x^2 + (y-2)^2 \leq 6$; értelmezési tartomány]



10. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 \sin(y)$ függvény parciális derivált függvényeit!
    $\left[f_x(x,y) = sin(y) \cdot 2x; f_y(x,y) = x^2 \cdot cos(y)\right]$

11. Határozza meg az $f(x,y) = x^2y - xy^3$ függvény parciális derivált függvényeit!
    $\left[f_x(x,y) = y \cdot 2x - y^3 \cdot 1 = 2xy - y^3; f_y(x,y) = x^2 \cdot 1 - x \cdot y^3 = x^2 - 3xy^2\right]$

12. Határozza meg az $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{2y}$ függvény parciális derivált függvényeit!
$\left[f_x(x,y)=\mathrm{e}^{2y}\cdot 2x=2x\mathrm{e}^{2y}; f_y(x,y)=x^2\cdot \mathrm{e}^{2y}\cdot 2=2x^2\mathrm{e}^{2y}\right]$

13. Határozza meg az $f(x,y)=(2xy-y^4)^3$ függvény parciális derivált függvényeit!
$[f_x(x,y)=3(2xy-y^4)^2\cdot(2y\cdot 1-0)=6y(2xy-y^4)^2;$
$f_y(x,y)=3(2xy-y^4)^2\cdot(2x\cdot 1-4y^3)=3(2xy-y^4)^2(2x-4y^3)]$

14. Határozza meg az $f(x,y)=\sqrt{x^2y^2+x^7}$ függvény parciális derivált függvényeit!
$$[f_x(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x^2y^2+x^7}}\cdot(y^2\cdot 2x+7x^6)=\frac{2xy^2+7x^6}{2\sqrt{x^2y^2+x^7}};$$
$$f_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x^2y^2+x^7}}\cdot(x^2\cdot 2y+0)=\frac{xy^2}{\sqrt{x^2y^2+x^7}}]$$

15. Határozza meg az $f(x,y,z)=xy^2z+3x^5-2y+6z$ függvény parciális derivált függvényeit!
$[f_x(x,y,z)=y^2z\cdot 1+3\cdot 5x^4-0+0=y^2z+15x^4; f_y(x,y,z)=xz\cdot 2y+0-2\cdot 1+0=2xyz-2; f_z(x,y,z)=xy^2\cdot 1+0-0+6\cdot 1=xy^2+6]$

16. Határozza meg az $f(x,y)=x^y$ függvény parciális derivált függvényeit!
$[f_x(x,y)=yx^{y-1},(\text{"}x^3\text{"}); f_y(x,y)=x^y ln(y),(\text{"}3^y\text{"})]$

17. Határozza meg az $f(x,y)=\ln(2x^2+xy^5)$ függvény parciális derivált függvényeit!
$$[f_x(x,y)=\frac{1}{2x^2+xy^5}\cdot(2\cdot 2x+y^5\cdot 1)=\frac{4x+y^5}{2x^2+xy^5};$$
$$f_y(x,y)=\frac{1}{2x^2+xy^5}\cdot(0+x\cdot 5y^4)=\frac{5xy^4}{2x^2+xy^5}]$$

18. Határozza meg az $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{2x-3y^2}}{x^2y^4+2}$ függvény parciális derivált függvényeit!
$$[f_x(x,y)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-3y^2}}\cdot(2\cdot 1-0)\cdot(x^2y^4+2)-\sqrt{2x-3y^2}\cdot(y^4\cdot 2x+0)}{(x^2y^4+2)^2}=$$
$$\frac{\frac{x^2y^4+2}{\sqrt{2x-3y^2}}-2xy^4\sqrt{2x-3y^2}}{(x^2y^4+2)^2};$$
$$f_y(x,y)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-3y^2}}\cdot(0-3\cdot 2y)\cdot(x^2y^4+2)-\sqrt{2x-3y^2}\cdot(x^2\cdot 4y^3+0)}{(x^2y^4+2)^2}=$$
$$\frac{\frac{-3y(x^2y^4+2)}{\sqrt{2x-3y^2}}-4x^2y^3\sqrt{2x-3y^2}}{(x^2y^4+2)^2}]$$

19. Írja fel az $f:R^2\to R: f(x,y)=x^2-xy+2y^2$ függvény érintőjének egyenletét az $(1;-1)$ pontban!
$[f_x(x,y)=2x-y; f_y(x,y)=-x+4y;$érintősík egyenlete:$3x-5y-z-4=0]$

20. Írja fel az $f:R^2\to R: f(x,y)=\sqrt{36-x^2-y^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $(2;4)$ pontban!

$[f_x(x,y) = -\dfrac{x}{\sqrt{36-x^2-y^2}}; f_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{36-x^2-y^2}}$;érintősík egyenlete: $-\frac{1}{2}x - y - z + 9 = 0]$

21. Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x,y) = 2\ln(\dfrac{y}{x} + x^2)$ függvény érintőjének egyenletét az $(1;1)$ pontban! $[x + y - z + 2\ln(2) - 2 = 0; x + y - z + 2\ln(\frac{2}{\mathrm{e}}) = 0]$

22. Írja fel az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ pontban! $[f_x(x,y) = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}; f_x(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}; f_y(x,y) = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$; $f_y(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}) = -2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}$;érintősík egyenlete:$-\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}x - \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}y - z + \frac{3}{\mathrm{e}} = 0; -\mathrm{e}-$vel szorozva: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \mathrm{e}z - 3 = 0]$

23. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = 2xy^2 - y$ függvény $\underline{u}(1;2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(1;-1)$ pontban! $[f_{\underline{u}}(1;-1) = -\frac{8}{\sqrt{5}}]$

24. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x\mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^x$ függvény $\underline{u}(-5;2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(0;0)$ pontban! $[f_x(x,y) = \mathrm{e}^y - y\mathrm{e}^x; f_y(x,y) = x\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x; f_{\underline{u}}(-5;2) = -\frac{7}{\sqrt{29}}]$

25. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = (x + 2y)^3$ függvény $\underline{u}(2;1)$ irányú iránymenti deriváltját a $P(1;1)$ pontban! $[f_{\underline{u}}(1;1) = \frac{108}{\sqrt{5}}]$

26. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x\ln(x+y)$ függvény gradiensét a $(3;-2)$ pontban! $[grad_f(3;-2) = \triangledown f(3;-2) = (3,3)]$

27. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ függvény gradiensét a $(3;4)$ pontban! $[f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2); f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}; f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}; grad_f(3;4) = \triangledown f(3;4) = (\frac{3}{25}, \frac{4}{25})]$

28. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \sqrt{\mathrm{e}^{3x}} \cdot \sin(3y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjait! $[f_x(x,y) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \sin(3y); f_y(x,y) = 3\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \cos(3y); f_{x,x}(x,y) = \frac{9}{4}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \sin(3y); f_{x,y}(x,y) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \cos(3y); f_{y,x}(x,y) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \cos(3y); f_{y,y}(x,y) = -9\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \cdot \sin(3y)]$

29. Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x^2\mathrm{e}^{xy^2}$ függvény másodrendű parciális deriváltjait! $[f_x(x,y) = 2x\mathrm{e}^{xy^2} + x^2y^2\mathrm{e}^{xy^2} = (2x + x^2y^2) \cdot \mathrm{e}^{xy^2}; f_y(x,y) = 2x^3y \cdot \mathrm{e}^{xy^2}; f_{xx}(x,y) = (2 + 2xy^2)\mathrm{e}^{xy^2} + (2x + x^2y^2)\mathrm{e}^{xy^2}y^2; f_{xy}(x,y) = (2x^2y)\mathrm{e}^{xy^2} + (2x + x^2y^2)\mathrm{e}^{xy^2}2xy; f_{yx}(x,y) = 6x^2y\mathrm{e}^{xy^2} + 2x^3y^3\mathrm{e}^{xy^2}; f_{yy}(x,y) = 2x^3\mathrm{e}^{xy^2} + 4x^4y^2\mathrm{e}^{xy^2}]$

30. Legyen $f : R^2 \to R : f(x,y) = x^3y^2 + xy^3 - 8x + y^2$. Számítsa ki $f_{xxy}(x,y)$ parciális deriváltat! $[f_x(x,y) = 3x^2y^2 + y^3 - 8; f_{xx}(x,y) = 6xy^2; f_{xxy}(x,y) = 12xy]$

31. Legyen $f : R^3 \to R : f(x,y,z) = x\mathrm{e}^y + yz^3 + xyz$. Számítsa ki $f_{zxy}(x,y,z)$ parciális deriváltat! $[f_z(x,y,z) = 3yz^2 + xy; f_{zx}(x,y,z) = y; f_{zxy}(x,y,z) = 1]$

32. Legyen $f : R^3 \to R : f(x,y,z) = \sin(x^2+y^2-z^2)$. Számítsa ki $f_{xxz}(x,y,z)$ parciális deriváltat!
[$f_x(x,y,z) = 2x \cdot \cos(x^2+y^2-z^2)$; $f_{xx}(x,y,z) = 2\cos(x^2+y^2-z^2) - 4x^2 \cdot \sin(x^2+y^2-z^2)$; $f_{xxz}(x,y,z) = 4z\sin(x^2+y^2-z^2) + 8x^2z\cos(x^2+y^2-z^2)$]

33. Legyen $f : R^3 \to R : f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(3x^6-y^2) + x^3\sin(z^2) - x^4y^2z^5 + \cos^8(z)$. Számítsa ki $f_{zyx}(x,y,z)$ parciális deriváltat!
[$f_z(x,y,z) = 2x^3z\cos(z^2) - 5x^4y^2z^4 - 8(cos(z))^7 sin(z)$; $f_{zy}(x,y,z) = -10x^4yz^4$; $f_{zyx}(x,y,z) = -40x^3yz^4$]

34. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 2x^2+4y^2+2xy+6$ kétváltozós függvénynek!
[$D(f) = R^2$
$f_x(x,y) = 4x+2y$; $f_y(x,y) = 2x+8y$
stacionárius pontok:$(0;0)$
$f_{xx}(x,y) = 4$; $f_{xy}(x,y) = 2$; $f_{yx}(x,y) = 2$; $f_{yy}(x,y) = 8$
$(0;0)$-lokális minimumhely; $f(0;0) = 6$]

35. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$ kétváltozós függvénynek!
[$D(f) = R^2$
$f_x(x,y) = y - 3x^2$; $f_y(x,y) = x - 2y$
stacionárius pontok:$(0;0)$, $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$
$f_{xx}(x,y) = -6x$; $f_{xy}(x,y) = 1$; $f_{yx}(x,y) = 1$; $f_{yy}(x,y) = -2$
$(0;0)$- nem szélsőérték hely
$\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$-lokális maximumhely;$f\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{432}$]

36. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$ kétváltozós függvénynek!
[$D(f) = R^2$
$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y$; $f_y(x,y) = -3x - 3y^2$
stacionárius pontok:$(0;0)$, $(-1;1)$
$f_{xx}(x,y) = 6x$; $f_{xy}(x,y) = -3$; $f_{yx}(x,y) = -3$; $f_{yy}(x,y) = -6y$
$(0;0)$- nem szélsőérték hely
$(-1;1)$-lokális maximumhely;$f(-1;1) = 1$]

37. Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^2+y^2+\dfrac{2}{xy}$ kétváltozós függvénynek!
[ A függvény értelmezési tartománya az egész sík, kivéve a koordinátatengelyek pontjait, hiszen a nevező miatt sem x, sem y nem lehet nulla.
$f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy} = x^2 + y^2 + 2x^{-1}y^{-1}$
$f_x(x,y) = 2x - \frac{2}{x^2y}$; $f_y(x,y) = 2y - \frac{2}{xy^2}$
stacionárius pontok:$(-1;-1)$, $(1;1)$
$f_{xx}(x,y) = 2 + \frac{4}{x^3y}$; $f_{xy}(x,y) = \frac{2}{x^2y^2}$; $f_{yx}(x,y) = \frac{2}{x^2y^2}$; $f_{yy}(x,y) = 2 + \frac{4}{xy^3}$
$(-1;-1)$-lokális minimumhely;$f(-1;-1) = 4$
$(1;1)$-lokális minimumhely;$f(1;1) = 4$]

38. Határozza meg az $f(x,y) = xy(x^2y^2-1)$ függvény kétszeres integrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 1 \le x \le 3; 0 \le y \le 2\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_0^2 \left( \int_1^3 (x^3y^3 - xy)\,dx \right) dy = \int_1^3 \left( \int_0^2 (x^3y^3 - xy)\,dy \right) dx$$
$$\int_0^2 (x^3y^3 - xy)\,dy = \left[ x^3 \cdot \frac{y^4}{4} - x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \left[ \frac{1}{4}x^3y^4 - \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^2 = 4x^3 - 2x$$
$$\int_1^3 \left( \int_0^2 (x^3y^3 - xy)\,dy \right) dx = \int_1^3 (4x^3 - 2x)\,dx = \left[ x^4 - x^2 \right]_1^3 = 72$$

39. Határozza meg az $f(x,y) = 2xy$ függvény kettősintegrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; x \le y \le \sqrt{x}\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_0^1 \left( \int_x^{\sqrt{x}} (2xy)\,dy \right) dx$$
$$\int_x^{\sqrt{x}} (2xy)\,dy = \left[ 2x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_x^{\sqrt{x}} = \left[ xy^2 \right]_x^{\sqrt{x}} = x^2 - x^3$$
$$\int_0^1 \left( \int_x^{\sqrt{x}} (2xy)\,dy \right) dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

40. Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^4}$ függvény kettősintegrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 3 \le x \le 7; -2 \le y \le -1\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_3^7 \left( \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+y)^4}\,dy \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left( \int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4}\,dx \right) dy$$
$$\int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4}\,dx = \int_3^7 (x+y)^{-4}\,dx = \left[ -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+y)^3} \right]_3^7 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3}$$
$$\int_{-2}^{-1} \left( \int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4}\,dx \right) dy = \int_{-2}^{-1} \left( -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3} \right) dy =$$
$$\int_{-2}^{-1} \left( -\frac{1}{3} \cdot (7+y)^{-3} + \frac{1}{3} \cdot (3+y)^{-3} \right) dy = \left[ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(7+y)^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(3+y)^2} \right]_{-2}^{-1} = \frac{83}{675}$$

41. Határozza meg az $f(x,y) = 10x^2+8xy$ függvény kettősintegrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; -x \le y \le \sqrt{x}\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_0^1 \left( \int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy)\,dy \right) dx$$
$$\int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy)\,dy = \left[ 10x^2 \cdot y + 8x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^{\sqrt{x}} = \left[ 10x^2y + 4xy^2 \right]_{-x}^{\sqrt{x}} = 10x^{\frac{5}{2}} + 4x^2 + 6x^3$$
$$\int_0^1 \left( \int_{-x}^{\sqrt{x}} (10x^2 + 8xy)\,dy \right) dx = \int_0^1 (10x^{\frac{5}{2}} + 4x^2 + 6x^3)\,dx = \left[ \frac{20}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^4 \right]_0^1 =$$

$\frac{239}{42}$

42. Határozza meg az $f(x,y) = yx^2+4$ függvény kettősintegrálját a $\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; x \le y \le x^2+2\}$ tartományon!
Megoldás:
$$\int_0^1 \left( \int_x^{x^2+2} (yx^2+4)\,dy \right) dx$$
$$\int_x^{x^2+2} (yx^2+4)\,dy = \left[ x^2 \cdot \frac{y^2}{2} + 4 \cdot y \right]_x^{x^2+2} = \left[ \frac{1}{2}x^2y^2 + 4y \right]_x^{x^2+2} = \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 6x^2 - 4x + 8$$
$$\int_0^1 \left( \int_x^{x^2+2} (yx^2+4)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 6x^2 - 4x + 8 \right) dx =$$
$$\left[ \frac{1}{14}x^7 + \frac{3}{10}x^5 + 2x^3 - 2x^2 + 8x \right]_0^1 = \frac{293}{35}$$

43. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 - y$ függvény kétszeres integrálját az $y = 3x - x^2$ és $y = x$ függvények által közrezárt tartományon!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 2; x \le y \le 3x - x^2\}$
$$\int_0^2 \left( \int_x^{3x-x^2} (x^2 - y)\,dy \right) dx$$
$$\int_x^{3x-x^2} (2xy)\,dy = \left[ x^2 \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_x^{3x-x^2} = \left[ x^2y - \frac{1}{2}y^2 \right]_x^{3x-x^2} = -\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 4x^2$$
$$\int_0^2 \left( \int_x^{3x-x^2} (x^2 - y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left( -\frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - 4x^2 \right) dx = \left[ -\frac{3}{10}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 =$$
$$-\frac{4}{15}$$

44. Határozza meg az $f(x,y) = 3xy + 4x^2$ függvény kétszeres integrálját az $y = x^2 - 5$ és $y = 4$ függvények által közrezárt tartományon!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x,y) \in R^2 : -3 \le x \le 3; x^2 - 5 \le y \le 4\}$
$$\int_{-3}^3 \left( \int_{x^2-5}^4 (3xy + 4x^2)\,dy \right) dx$$
$$\int_{x^2-5}^4 (3xy+4x^2)\,dy = \left[ 3x \cdot \frac{y^2}{2} + 4x^2 \cdot y \right]_{x^2-5}^4 = \left[ \frac{3}{2}xy^2 + 4x^2y \right]_{x^2-5}^4 = -\frac{3}{2}x^5 - 4x^4 + 15x^3 +$$
$$36x^2 - \frac{27}{2}x$$
$$\int_{-3}^3 \left( \int_{x^2-5}^4 (3xy + 4x^2)\,dy \right) dx = \int_{-3}^3 \left( -\frac{3}{2}x^5 - 4x^4 + 15x^3 + 36x^2 - \frac{27}{2}x \right) dx =$$
$$\left[ -\frac{1}{4}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{15}{4}x^4 + 12x^3 - \frac{27}{4}x^2 \right]_{-3}^3 = \frac{1296}{5}$$

45. Határozza meg az $f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}x - y$ függvény kétszeres integrálját az $y = x^2 - 4$ és $y = 0$ függvények által közrezárt tartományon!
Megoldás:
Tartomány=$\{(x,y) \in R^2 : -2 \leq x \leq 2; x^2 - 4 \leq y \leq 0\}$
$\int_{-2}^{2} \left( \int_{x^2-4}^{0} (1 + \frac{1}{2}x - y)\,dy \right) dx$
$\int_{x^2-4}^{0} (1 + \frac{1}{2}x - y)\,dy = \left[ y + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{x^2-4}^{0} = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 2x + 12$
$\int_{-2}^{2} \left( \int_{x^2-4}^{0} (1 + \frac{1}{2}x - y)\,dy \right) dx = \int_{-2}^{2} \left( \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 2x + 12 \right) dx =$
$\left[ \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 + 12x \right]_{-2}^{2} = 27,733$

46. Határozza meg az $f(x,y) = 4 - y^2$ függvény kétszeres integrálját az $y = 2 - x^2$ és $y = x^2 - 2$ függvények által közrezárt tartományon!
Megoldás:
Tartomány=$\left\{(x,y) \in R^2 : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}; x^2 - 2 \leq y \leq 2 - x^2\right\}$
$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left( \int_{x^2-2}^{2-x^2} (4 - y^2)\,dy \right) dx$
$\int_{x^2-2}^{2-x^2} (4 - y^2)\,dy = \left[ 4y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{x^2-2}^{2-x^2} = \frac{2}{3}x^6 - 4x^4 + \frac{32}{3}$
$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left( \int_{x^2-2}^{2-x^2} (4 - y^2)\,dy \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left( \frac{2}{3}x^6 - 4x^4 + \frac{32}{3} \right) dx =$
$\left[ \frac{2}{21}x^7 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{32}{3}x \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 23,2739$