

MINTAVÉTELEZÉSI TÉTEL

A mintavételezés az a folyamat, mely a folytonos $s(t)$ jeltől egy $s[n] = s[n \cdot T]$ $n \in \mathbb{Z}$ sorozatot állít elő.

Egy B sávra korlátozott jelet teljesen meghatározza annak $T \leq \frac{1}{2B}$ időközönként vett mintáinak a sorozata
(Ez a Shannon-féle (vagy Shannon-Nyquist-féle) mintavételezési tétel)

\Rightarrow ha legfeljebb $\frac{1}{2B}$ időközönként vesszünk mintát, a jel teljes egészében visszaállítható lesz.

Shannon eredeti bizonyítása szerint

ha $s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$ integrált elvég

$-2\pi \cdot B = -\Omega$ és $+2\pi \cdot B = +\Omega$ között elvégezzük, akkor

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi \cdot B}^{2\pi \cdot B} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

legyen $t = \frac{n}{2B} \Rightarrow s\left(\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi \cdot B}^{2\pi \cdot B} S(\omega) e^{j\omega \frac{n}{2B}} d\omega$
 ez olyan, mint egy Fourier-sorfejtési együttható $-B$ és B közötti periódusra
 \rightarrow ez pedig $s(t)$ jel az $\frac{n}{2B}$ pontokban

$\Rightarrow S(\omega)$ előáll $s\left(\frac{n}{2B}\right)$ Fourier-sorfejtési együtthatókkal

\Rightarrow ha $s\left(\frac{n}{2B}\right)$ -et ismerem, ismerem a spektrumot
 \rightarrow ha a spektrumot ismerem, ismerem magát a jelet. \square

Shannon-Whittaker-féle rekonstrukciós tétel

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \cdot \frac{\sin(\pi(2B \cdot t - n))}{\pi(2B \cdot t - n)}$$

Bizonyítás

$$S(\omega) = R(\omega) \cdot S_s(\omega)$$

rect függvény

mintavételezett spektrum

$$R(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |\omega| < \Omega/2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$S(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) \cdot S_s(\omega) =$$

$$= \text{rect}(T \cdot \omega) \sum_n T \cdot s(n \cdot T) \cdot e^{-j n \cdot T \omega}$$

$$= \sum_n s(n \cdot T) \cdot \underbrace{T \cdot \text{rect}(T \omega)}_{\mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)\right\}} e^{-j n \cdot T \omega}$$

$$s(t) = \sum_n s(n \cdot T) \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - n \cdot T}{T}\right)$$