GYORS FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

(Cooley - Tukey - algoritmus)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} k \cdot n}$$

- $N-1$ db összeadás
- N db komplex szorzás
- $\Rightarrow N^2$ művelet $\forall$ elemre (és van N elemünk)

Ez mindegyikben ismétlődik

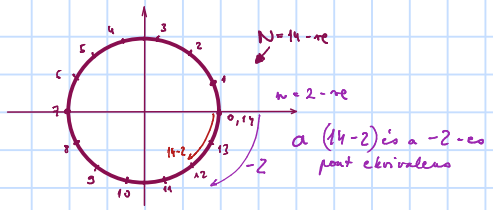
$\Rightarrow$ Legyen $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

W_N szimmetriái:

- $W_N^{k(N-n)} = W_N^{-k \cdot n} = \left(W_N^{k \cdot n}\right)^*$

$e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k(N-n)} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot (-n)} = e^{+j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot n}$

$e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k(n)} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot k \cdot N}}_{1}$ vagy



- $W_N^{k \cdot n} = W_N^{k \cdot (N+n)} = W_N^{(k+N) \cdot n}$

Csak az alapötlet $N = 2^m$-re (más N-re is vannak trükkök)

$\rightarrow$ kettéválasztjuk páros és páratlan indexű összegre:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{k \cdot n} = \sum_{\substack{n \text{ páros} \\ n=2r}} x[2r] \cdot W_N^{k \cdot 2r} + \sum_{\substack{n \text{ páratlan} \\ n=2r+1}} x[2r+1] \cdot W_N^{k \cdot (2r+1)} =$$

$W_N^{k \cdot 2r} = \left(W_N^{k \cdot r}\right)^2$

$W_N^{k \cdot (2r+1)} = W_N^{k \cdot 1} \cdot W_N^{k \cdot 2r}$

állandó: kiemelhető

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] \cdot \left(W_N^{k \cdot r}\right)^2 + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] \cdot \left(W_N^{k \cdot r}\right)^2 =$$

$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot 2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] \cdot W_{N/2}^{k \cdot r} + W_N^k \cdot \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r-1] \cdot W_{N/2}^{k \cdot r} =$$

újra egy DFT, csak $\frac{N}{2}$ elemre, csak a páros indexűekre

$\frac{N}{2}$ DFT itt is, csak a páratlan indexű elemekre

$$= X_{\text{páros}}[k] + W_N^k \cdot X_{\text{páratlan}}[k]$$

ezek megint kettéválaszthatók

a végén eleinek a 2-elemű DFT-kre:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{2} k \cdot n}$$

ami:

$$X[0] = x[0] \cdot \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{2} \cdot 0 \cdot 0}}_{e^0 = 1} + x[1] \cdot \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{2} \cdot 0 \cdot 1}}_{e^0 = 1} = x[0] + x[1]$$

$$X[1] = x[0] \cdot \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{2} \cdot 1 \cdot 0}}_{e^0 = 1} + x[1] \cdot \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{2} \cdot 1 \cdot 1}}_{e^{-j\pi} = -1} = x[0] + x[1] \cdot e^{-j\pi}$$