

VT. GYAK 1.

2019.09.23

1. Számítsa ki az R ellenálláson folyó áram erősségét a rajta eső U feszültség ismeretében, ha

a) $R = 1\Omega$, $U = 1V$

b) $R = 1k\Omega$, $U = 1mV$

c) $R = 1M\Omega$, $U = 1kV$

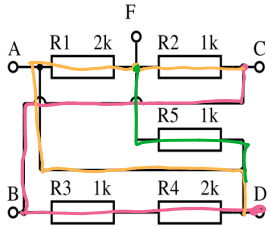
d) $R = 1M\Omega$, $U = 1V$

2. Számítsa ki az R ellenálláson eső feszültség értékét a rajta folyó I áram erősségének ismeretében, ha

a) $R = 1\Omega$, $I = 1A$

b) $R = 1k\Omega$, $I = 1mA$

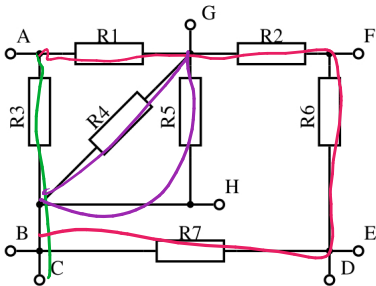
c) $R = 1M\Omega$, $I = 1A$



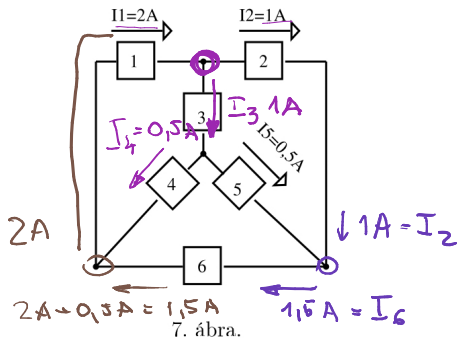
3. Számítsa ki az 1. ábrán látható ellenálláshálózat A és B kapcsok felől mérhető eredő ellenállását! ($R_{AB} = ?$) (Áramköri rajzokon szokás a mértékegység elhagyása, ha az az áramköri elem rajzjeléből egyértelműen kiderül. A prefixum használata természetesen ebben az esetben is kötelező. Az előzőek értelmében tehát az ábrán szereplő ellenállások értéke $k\Omega$ -ban értendő.)

11. Az 1. ábra A és B kapcsai közé egy ideális, $10mA$ -es áramgenerátort kapcsolunk. Határozza meg az $R2$ ellenálláson eső feszültség értékét!

6. Számítsa ki az 5. ábrán látható ellenálláshálózat eredő ellenállását az A és B kapcsokon! ($R_{AB} = ?$) Az ellenállások értékei a következők: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 4\Omega$, $R_6 = 2\Omega$, $R_7 = 1\Omega$.



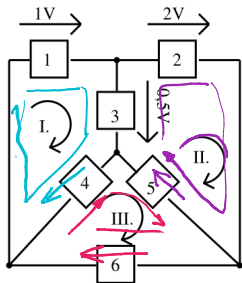
1. Határozza meg a 7. ábrán látható, kétpólusokból álló hálózatban a 3, 4 és 5 jelű kétpólusokon folyó áram erősségét és irányát!



2. Határozza meg a 8. ábrán látható, kétpólusokból álló hálózatban a 4, 5 és 6 jelű kétpólusokon eső feszültségek nagyságát és irányát!

Megoldás:

Az egyszerűség kedvéért a 8. ábrán az egyes hurkokat, és a bennük alkalmazott, egyébként szabadon felvehető körüljárási irányt előre felvettük.



8. ábra.

$$-0,5V + 2V + U_5 = 0$$

$$1,5V + U_5 = 0$$

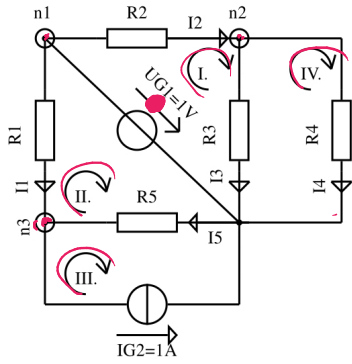
$$U_5 = -1,5V$$

$$1V + 0,5V + U_4 = 0$$

$$1,5V + U_4 = 0$$

$$U_4 = -1,5V$$

3. Határozza meg a 9. ábrán látható kapcsolásban az egyes áramköri elemek áramát és feszültségét! Az ellenállások értéke: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$.



9. ábra.

Ellenőrzésképpen számoljuk ki a fogyasztók és a generátorok teljesítményeit. (Az egyes feszültségek az ellenállások ismeretében az Ohm-törvény alkalmazásával kiszámolhatók.) Ezek előjelhelyes összegének nullát kell adnia.

A 9. ábrán az egyszerűség kedvéért előre feltüntettük az áramokat, a csomópontokat és a hurkokat a körüljárási irányokkal. Az egyes elemek feszültségét nem jelöltük, de tudjuk, hogy azok iránya az ellenállásokon azonos az áramiránnyal, a generátorokon pedig ellentétes azzal.

A hálózatnak $n = 4$ csomópontja és $b = 7$ ága van. Ezek alapján a felírható független csomóponti egyenletek (r) és hurokegyenletek (l) száma:

$$r = n - 1 = 3, \text{ és } l = b - n + 1 = 4$$

A három csomóponti egyenlet és a négy hurokegyenlet mellé felírva az egyes áramköri elemek karakterisztikáit, megkapjuk a hálózat egyenletek teljes rendszerét:

$$\begin{aligned} n1: & -I_{G1} + I_1 + I_2 = 0 \\ n2: & -I_2 + I_3 + I_4 = 0 \\ n3: & -I_1 - I_5 + I_{G2} = 0 \\ I: & U_2 + U_3 - U_{G1} = 0 \\ II: & U_{G1} + U_5 - U_1 = 0 \\ III: & U_{G2} - U_5 = 0 \\ IV: & U_4 - U_3 = 0 \\ U_1: & 1\Omega I_1 \\ U_2: & 1\Omega I_2 \\ U_3: & 1\Omega I_3 \\ U_4: & 1\Omega I_4 \\ U_5: & 1\Omega I_5 \\ U_{G1}: & 1V \\ I_{G2}: & 1A \end{aligned}$$

A karakterisztikákat behelyettesítve a Kirchhoff-egyenletekbe kapjuk a hálózat egyenletek redukált rendszerét:

$$\begin{aligned} n1: & -I_{G1} + I_1 + I_2 = 0 \\ n2: & -I_2 + I_3 + I_4 = 0 \\ n3: & -I_1 - I_5 + 1A = 0 \quad (I_5 = 1A - I_1) \\ I: & 1\Omega I_2 + 1\Omega I_3 - 1V = 0 \\ II: & 1V + 1\Omega I_5 - 1\Omega I_1 = 0 \\ III: & U_{G2} - 1\Omega I_5 = 0 \\ IV: & 1\Omega I_4 - 1\Omega I_3 = 0 \end{aligned}$$

n3-ből kifejeztük I_5 -öt, ezt behelyettesítve az egyenletekbe:

$$\begin{aligned} n1: & -I_{G1} + I_1 + I_2 = 0 \\ n2: & -I_2 + I_3 + I_4 = 0 \\ I: & 1\Omega I_2 + 1\Omega I_3 - 1V = 0 \\ II: & 2V - 2\Omega I_1 = 0 \quad (I_1 = 1A \text{ !!!}) \\ III: & U_{G2} - 1V + 1\Omega I_1 = 0 \\ IV: & 1\Omega I_4 - 1\Omega I_3 = 0 \quad (I_4 = I_3) \end{aligned}$$

Figyelem! A példában I_1 értéke a II. egyenlet alapján már itt meghatározható. A IV. egyenletből kifejeztük I_4 -et.

$$\begin{aligned} n1: & -I_{G1} + I_1 + I_2 = 0 \\ n2: & -I_2 + 2I_3 = 0 \\ I: & 1\Omega I_2 + 1\Omega I_3 - 1V = 0 \quad (I_3 = 1A - I_2) \\ III: & U_{G2} - 1V + 1V = 0 \quad (U_{G2} = 0V \text{ !!!}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n1: & -I_{G1} + I_1 + I_2 = 0 \\ n2: & -3I_2 + 2A = 0 \quad (I_2 = \frac{2}{3}A \text{ !!!}) \end{aligned}$$

$$n1: -I_{G1} + 1A + \frac{2}{3}A = 0 \quad (I_{G1} = \frac{5}{3}A \text{ !!!})$$

I_3, I_4 és I_5 értékeinek meghatározásához használjuk a korábbi kifejezéseket:

$$I_3 = 1A - I_2 = 1A - \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}A$$

$$I_4 = I_3 = \frac{1}{3}A$$

$$I_5 = 1A - I_1 = 1A - 1A = 0A$$

Ellenőrzésképpen számoljuk ki a fogyasztók és a generátorok teljesítményeit. (Az egyes feszültségek az ellenállások ismeretében az Ohm-törvény alkalmazásával kiszámolhatók.) Ezek előjelhelyes összegének nullát kell adnia.

áramköri elem	U [V]	I [A]	P [W]
1	1	1	1
2	0,667	0,667	0,445
3	0,333	0,333	0,111
4	0,333	0,333	0,111
5	0,000	0,000	0,000
Összesen:			1,667
G_1	0,667	-1,000	-1,667
G_2	1,000	0,000	0,000

A teljesítmények összege nulla, tehát a számítás valószínűleg helyes.

Megoldás Gauss-eliminációval.

az egyenletek:

$$\begin{aligned} n1: & I_1 - I_{G1} + I_2 = 0 \\ n2: & -I_2 + I_3 + I_4 = 0 \\ n3: & -I_1 - I_5 + I_{G2} = 0 \\ I. & -U_{G1} + R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \\ II. & -R_1 I_1 + U_{G1} + R_5 I_5 = 0 \\ III. & -R_5 I_5 - U_{G2} = 0 \\ IV. & -R_3 I_3 + R_4 I_4 = 0 \end{aligned}$$

Szisztematikus: $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_{G1}, U_{G2}$

az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 1 I_1 + 1 I_2 + 0 I_3 + 0 I_4 + 0 I_5 + 1 I_{G1} + 0 U_{G2} &= 0 \\ 0 I_1 - 1 I_2 + 1 I_3 + 1 I_4 + 0 I_5 + 0 I_{G1} + 0 U_{G2} &= 0 \\ -1 I_1 + 0 I_2 + 0 I_3 + 0 I_4 - 1 I_5 + 0 I_{G1} + 0 U_{G2} &= -1 \\ 0 I_1 + 1 I_2 + 1 I_3 + 0 I_4 + 0 I_5 + 0 I_{G1} + 0 U_{G2} &= 1 \\ -1 I_1 + 0 I_2 + 0 I_3 + 0 I_4 + 1 I_5 + 0 I_{G1} + 0 U_{G2} &= -1 \\ 0 I_1 + 0 I_2 + 0 I_3 + 0 I_4 - 1 I_5 + 0 I_{G1} - 1 U_{G2} &= 0 \\ 0 I_1 + 0 I_2 - 1 I_3 + 1 I_4 + 0 I_5 + 0 I_{G1} + 0 U_{G2} &= 0 \end{aligned}$$

Matrica mátrixba

$$\begin{array}{cccccccc|c} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_{G1} & U_{G2} & \text{jobb oldal} & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & + \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & + \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Műveletek, amiket szabad

használni:

- sorcsere

- egyik sor x-szeresének

hívása / hozzáadása

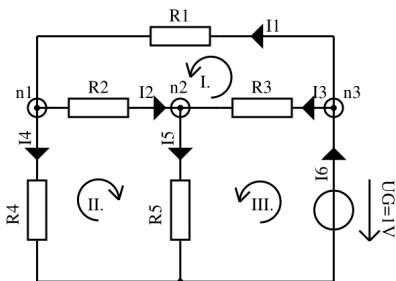
egy másik sorhoz

- sor megzörzése egy számmal

Cél

$$\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & f \end{array}$$

4. Határozza meg a 10. ábrán látható kapcsolásban az egyes áramköri elemek áramát és feszültségét! Az ellenállások értéke: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$.



10. ábra.

Megoldás:

Az áramköri elemek karakterisztikái a Kirchhoff-egyenletekbe azok felírásakor behelyettesíthetők, így a feladat megoldásához elég a hálózategyenletek redukált rendszerének azonnali felírása. Ezzel egyrészt időt lehet megtakarítani, másrészt a behelyettesítéskor elkövethető esetleges hibák is kiküszöbölhetők.

A 10. ábra hálózatában a csomópontok száma négy, az ágak száma hat. Az ismert szabályokat alkalmazva fel kell írni $r = n - 1 = 3$ csomóponti egyenletet és $l = b - n + 1 = 3$ hurokegyenletet.

A redukált egyenletrendszer tehát:

$$\begin{aligned} n1: & -I_1 + I_2 + I_4 = 0 & (I_4 = I_1 - I_2) \\ n2: & -I_2 - I_3 + I_5 = 0 & (I_5 = I_2 + I_3) \\ n3: & -I_G + I_1 + I_3 = 0 \\ I: & 1\Omega I_1 + 1\Omega I_2 - 1\Omega I_3 = 0 \\ II: & 1\Omega I_2 - 1\Omega I_4 + 1\Omega I_5 = 0 \\ III: & -1V + 1\Omega I_3 + 1\Omega I_5 = 0 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az $n3$ -ban megtalálható I_G más egyenletben nem szerepell! Emiatt az egyenletrendszer megoldásának további lépéseiben $n3$ -at egyenlőre nem vesszük figyelembe, arra csak I_G értékének meghatározásához lesz szükség I_1 és I_3 ismeretében. I_4 -et és I_5 -öt egyszerre fejeztük ki. Ezeket a többi egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} I: & 1\Omega I_1 + 1\Omega I_2 - 1\Omega I_3 = 0 \\ II: & -1\Omega I_1 + 3\Omega I_2 + 1\Omega I_3 = 0 & (I_3 = I_1 - 3I_2) \\ III: & -1V + 1\Omega I_2 + 2\Omega I_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I: & -2\Omega I_2 = 0 & (I_2 = 0A) \\ III: & -1V + 2\Omega I_1 - 4\Omega I_2 = 0 \end{aligned}$$

$$III: -1V + 2\Omega I_1 = 0 \quad (I_1 = 0,5A)$$

I_1 és I_2 ismeretében a többi ágáram meghatározható:

$$I_3 = I_1 - 3I_2 = 0,5A$$

$$I_4 = I_1 - I_2 = 0,5A$$

$$I_5 = I_2 + I_3 = 0,5A$$

I_G meghatározásához most használjuk fel az $n3$ jelű csomópontra felírt egyenletet:

$$-I_G + I_1 + I_3 = 0$$

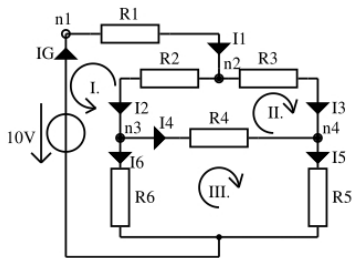
$$I_G = +I_1 + I_3 = 1A$$

Az egyes áramköri elemek feszültsége az ágáramok és az ellenállások ismeretében meghatározható. Ez táblázatosan, az egyes elemek teljesítményével kiegészítve:

	I [A]	U [V]	P [W]
1	0,5	0,5	0,25
2	0	0	0
3	0,5	0,5	0,25
4	0,5	0,5	0,25
5	0,5	0,5	0,25
			1
G	1	-1	-1
összesen			0

Mivel a teljes hálózat összteljesítménye nulla, az eredmények valószínűleg helyesek.

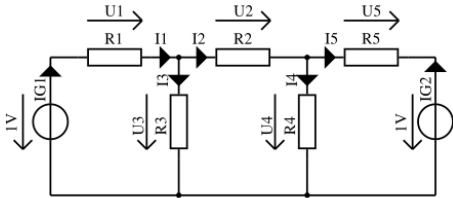
5. Határozza meg a 11. ábrán látható kapcsolásban az egyes áramköri elemek áramát és feszültségét! Az ellenállások értékei: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $R_4 = 30\Omega$, $R_5 = 40\Omega$, $R_6 = 40\Omega$.



11. ábra.

6. A második előadáson kiadott házi feladat:

Határozza meg a 12. ábrán látható hálózatban az egyes áramköri elemek áramát és feszültségét!



12. ábra.