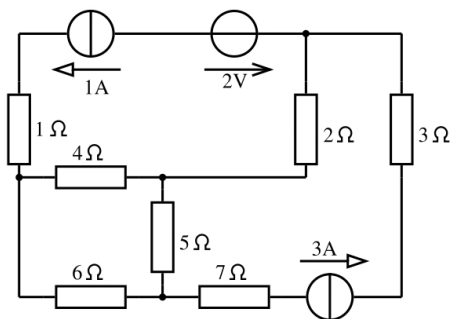


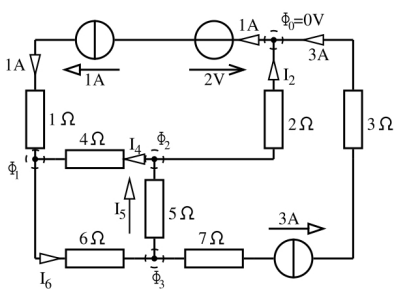
1. A csomóponti potenciálok módszerének segítségével határozza meg a 33. ábrán látható kapcsolásban az egyes ellenállásokon eső feszültség értékét!



33. ábra.

A módszer alkalmazásakor Kirchhoff csomóponti törvényét használjuk, az egyes csomópontokra írjuk fel a csomóponti egyenleteket. A csomóponti törvény alapján a csomópontba befolyó, és onnan kifolyó áramok előjelhelyes összege nulla. Az egyes ágakban lévő ellenállásokon folyó áramokat a módszer alkalmazásakor a csomópontok potenciáljainak és az ellenállások értékének segítségével fejezzük ki. Ha egy ágban áramforrás helyezkedik el, akkor az meghatározza az adott ágáramot, így annak értéke közvetlenül beírható a megfelelő egyenletekbe. Ha az ágakban elhelyezett feszültségforrások áramáról egyelőre nem tudunk semmit, azt ismeretlennek tekintve I_{Gn} alakban szerepeltetjük az egyenletekben.

A fentiek értelmében a feladatot az egyes csomópontok potenciáljának felvételével, és az egyes ágakban folyó áramirányok kijelölésével kezdjük. (34. ábra) Egy tetszés szerinti csomópont potenciálja 0V-nak tekinthető.



34. ábra.

A csomópontokra felírható kiindulási egyenletek:

$$\Phi_1: -1A - \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{4\Omega} + \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{6\Omega} = 0$$

$$\Phi_2: \frac{\Phi_2 - 0}{2\Omega} + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{4\Omega} - \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{5\Omega} = 0$$

$$\Phi_3: -\frac{\Phi_1 - \Phi_3}{6\Omega} + \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{5\Omega} + 3A = 0$$

Szorozzuk meg az első egyenletet 12Ω-mal, a másodikat 20Ω-mal, a harmadikat pedig 30Ω-mal, és fejezzük ki Φ_1 -et az elsőből, majd oldjuk meg az egyenlet-rendszert!

$$\Phi_1: 5\Phi_1 - 3\Phi_2 - 2\Phi_3 - 12V = 0 \quad \left(\Phi_1 = \frac{3\Phi_2 + 2\Phi_3 + 12V}{5} \right)$$

$$\Phi_2: -5\Phi_1 + 19\Phi_2 - 4\Phi_3 = 0$$

$$\Phi_3: -5\Phi_1 - 6\Phi_2 + 11\Phi_3 + 90V = 0$$

$$\Phi_2: 16\Phi_2 - \Phi_3 - 12V = 0$$

$$\Phi_3: -9\Phi_2 + 9\Phi_3 + 78V = 0 \quad \left(\Phi_3 = \frac{9\Phi_2 - 78V}{9} \right)$$

$$\Phi_2: 16\Phi_2 - \frac{54\Phi_2 - 468V}{9} - 12V = 0$$

$$9\Phi_2 - 360V = 0$$

$$\Phi_2 = 4V$$

Φ_1 alapján az ismeretlen csomóponti potenciálok:

$$\Phi_3 = -4,6674V$$

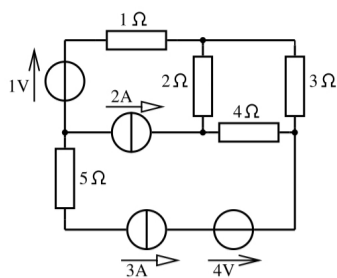
$$\Phi_1 = 2,933V$$

Az ellenállásokon eső feszültség:

R[Ω]	U[V]
1	$U_1 = 1A \cdot 1\Omega$ 1
2	$U_2 = \Phi_2 - 0V$ 4
3	$U_3 = 3A \cdot 3\Omega$ 9
4	$U_4 = \Phi_2 - \Phi_1$ 1,667
5	$U_5 = \Phi_3 - \Phi_2$ -8,667
6	$U_6 = \Phi_1 - \Phi_3$ 7,56
7	$U_7 = 3A \cdot 7\Omega$ 21

A feladat megoldása során az 1Ω, 3Ω és 7Ω értékű ellenállásokon eső feszültséget nem a csomóponti potenciálok alapján, hanem az Ohm-törvény segítségével határoztuk meg, hiszen ágáramuk eleve ismert volt.

2. A csomóponti potenciálok módszerének segítségével határozza meg a 35. ábrán látható kapcsolásban az egyes ellenállásokon eső feszültség értékét!



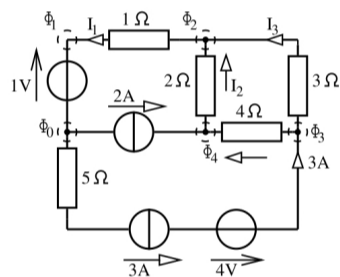
35. ábra.

Megoldás:

Vegyük fel a számítható szükséges csomóponti potenciálokat, és az egyes ágak feltételezett irányát. A 36. ábra egy lehetséges esetet ábrázol.

Az egyik, tetszőlegesen választott csomópont potenciálját $0V$ értékűnek tekinthetjük. Ha az $1V$ feszültségű generátor és az 1Ω értékű ellenállás közti csomópont potenciálját (Φ_1) választjuk $0V$ -nak, akkor $\Phi_0 = 1V$ adódik.

Észrevehető, hogy I_1 értéke azonnal meghatározható, ugyanis a Φ_0 potenciálú csomópontban egymáshoz kapcsolódó három ág közül kettőnek az árama



36. ábra.

ismert. A számítás a csomópontokra felírt csomóponti egyenlet megoldásával történik:

$$-I_1 + 2A + 3A = 0, \text{ azaz } I_1 = 5A.$$

Ezzel az áramértékkel csak úgy dolgozhatunk, hogy felhasználjuk ezt a Φ_2 potenciál meghatározására.

$$\Phi_2 = \Phi_1 + I_1 \cdot 1\Omega = 0V + 5V = 5V$$

Figyelem! Nem eredményez megoldást az az eset, amikor a Φ_1 , Φ_2 és Φ_3 potenciálú csomópontok mindegyikére felírjuk a csomóponti egyenleteket, de I_1 -et konkrét értékével, nem pedig a kapcsolai közötti potenciálkülönbséggel kifejezve szerepeltetjük az egyenletekben.

A felírandó egyenletek tehát:

$$\Phi_3: \frac{\Phi_3 - 5V}{3\Omega} + \frac{\Phi_3 - \Phi_4}{4\Omega} - 3A = 0$$

$$\Phi_4: -2A - \frac{\Phi_3 - \Phi_4}{4\Omega} + \frac{\Phi_4 - 5V}{2\Omega} = 0$$

Szorozzuk meg az első egyenletet 12Ω -mal, a másodikat pedig 4Ω -mal, majd oldjuk meg az egyenletrendszert!

$$\Phi_3: 7\Phi_3 - 3\Phi_4 - 56V = 0$$

$$\Phi_4: -\Phi_3 + 3\Phi_4 - 18V = 0 \quad (\Phi_3 = 3\Phi_4 - 18V)$$

$$\Phi_3: 18\Phi_4 - 182 = 0$$

$$\Phi_4 = 10,11V$$

Φ_4 ismeretében Φ_3 meghatározható:

$$\Phi_3 = 12,33V$$

Az ellenállásokon eső feszültségek:

$R[\Omega]$		$U[V]$
1	$U_1 = 5V$	5
2	$U_2 = \Phi_4 - 5V$	5,11
3	$U_3 = \Phi_3 - 5V$	7,33
4	$U_4 = \Phi_3 - \Phi_4$	2,22
5	$U_5 = 5\Omega \cdot 3A$	15

Az áramgenerátorok feszültsége az egyes hurkokban lévő elemeken eső feszültségek és a hurktörvény alapján számíthatók:

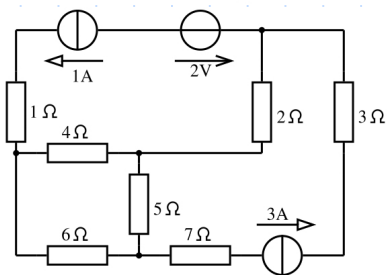
A $2A$ -es áramgenerátor feszültsége:

$$U_{G2} + U_2 + U_1 - 1V = 0, \text{ tehát } U_{G2} = -U_2 - U_1 + 1V = -9,11V.$$

A $3A$ -es áramgenerátor feszültsége:

$$U_{G3} + 4V + U_4 - U_{G2} + U_5 = 0, \text{ tehát } U_{G3} = -4V - U_4 + U_{G2} - U_5 = -30,33V.$$

1. A hurokáramok módszerének segítségével határozza meg a 33. ábrán látható kapcsolásban az egyes ellenállásokon folyó áram értékét!



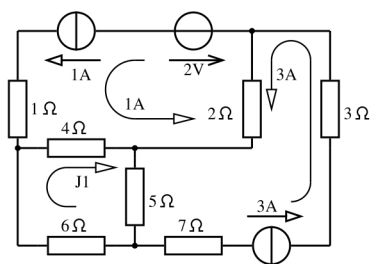
33. ábra.

A hurokáramok módszerének alkalmazásakor Kirchhoff huroktörvényét használjuk, az egyes hurkokra írjuk fel a hurokegyenleteket. Az egyes elemeken eső feszültség értékét a hurkokban tetszőleges irányban felvett hurokáramok segítségével fejezzük ki. Lényeges, hogy az egyes ágáramok – azaz az egyes elemeken folyó tényleges áramok – az adott ágban folyó hurokáramok előjelhelyes összegeként adódnak.

Ebben a módszerben nem kell az ágáramokat előzetesen felvenni. Csak arra kell figyelni, hogy mindig azt a hurokáramot tekintjük pozitívnak, amelyik abban a hurokban folyik, amelyikre az egyenletet éppen felírjuk. A szomszédos hurokáramok ehhez az áramhoz képest negatívak, ha az adott ágban ellentétes irányban folynak, vagy pozitívak, ha a hurokáramok iránya megegyezik.

Ha egy hurokban áramforrás van, akkor a saját hurkában meghatározza a hurokáram nagyságát és irányát. Figyelem! Egy áramforrást ily módon csak egy hurokban vehetünk figyelembe, tehát a hurkokat ennek megfelelően kell kialakítanunk. Ha a feszültségforrások áramát előzetesen nem ismerjük, akkor azt I_{Cn} alakban szerepeltetjük az egyenletben.

A feladat megoldásához tetszőlegesen vegyük fel a szükséges hurokáramokat! (37. ábra)



37. ábra.

Mivel a kapcsolásban több áramgenerátor is szerepel, a megoldás egyszerű. Elég annak a huroknak felírni az egyenletét, melyben J_1 folyik.

$$J1: 4\Omega(J_1 + 1A) + 5\Omega(J_1 + 3A) + 6\Omega J_1 = 0$$

Az egyenletet megoldva J_1 kiszámítható:

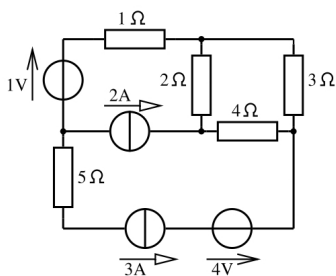
$$15\Omega J_1 + 19V = 0$$

$$J_1 = \frac{-19V}{15\Omega} = -1,2667A$$

Az egyes ellenállásokon folyó áramok J_1 ismeretében meghatározhatók:

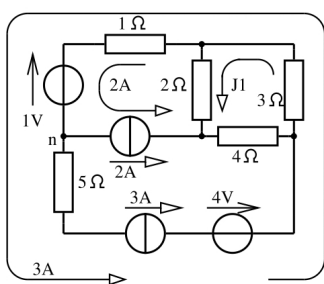
R[Ω]		I[A]
1	$I_1 = 1A$	1
2	$I_2 = 3A - 1A$	2
3	$I_3 = 3A$	3
4	$I_4 = 1A + J_1$	-0,2667
5	$I_5 = 3A + J_1$	1,7333
6	$I_6 = J_1$	-1,2667
7	$I_7 = 3A$	3

2. A hurokáramok módszerének segítségével határozza meg a 35. ábrán látható kapcsolásban az egyes ellenállásokon folyó áram értékét!



35. ábra.

Tetszőlegesen vegyük fel a szükséges hurokáramokat (38. ábra)! Az áramgenerátorok saját hurokáramukat meghatározzák, ám ekkor figyelni kell arra, hogy mindegyik csak egy hurokban szerepeljen!



38. ábra.

A kapcsolatban lévő két áramgenerátor két hurokáramot meghatároz, így már csak a harmadik ismeretlen. Az ismeretlen hurokáramhoz tartozó hurokra felírható egyenlet:

$$2\Omega(J_1 - 2A) + 3\Omega(J_1 + 3A) + 4\Omega J_1 = 0$$

Ezt megoldva:

$$9\Omega J_1 + 5A = 0$$

$$J_1 = 0,556A$$

Az egyes elemek áramai a hurokáramok ismeretében meghatározhatók:

R[Ω]	I[A]	I[A]
1	$I_1 = 2A + J_1$	5
2	$I_2 = 2A + J_1$	2,556
3	$I_3 = 3A + J_1$	2,444
4	$I_4 = J_1$	-0,556
5	$I_5 = 3A$	3

A feszültséggenerátorok árama azonos a velük egy ágba lévő ellenállásokon folyó árammal, azonban nem ismerjük az áramgenerátorok feszültségét! Ezek

meghatározásához elég a saját hurokukban lévő ismert feszültségek előjelhelyes összeadása:

$$U_{G2A} = I_2 \cdot 2\Omega + I_1 \cdot 1\Omega - 1V = 9,112V$$

$$U_{G3A} = I_5 \cdot 5\Omega + U_{G2A} + I_4 \cdot 4\Omega + 4V = 30,337V$$