5.1. A gyakorlat során szükséges elméleti ismeretek

– Szinuszosan változó áram és feszültség leírása időfüggvénnyel

$$u(t) = \hat{U} cos(\omega t + \varphi) \text{ vagy } u(t) = \hat{U} sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i(t) = \hat{I} cos(\omega t + \varphi) \text{ vagy } i(t) = \hat{I} sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{4}\right)$$

Az egyenletekben $\hat{U}$ a függvény csúcsértéke, vagy amplitúdója, ω a körfrekvencia és φ a kezdőfázis.

– Szinuszosan változó áram és feszültség leírása komplex mennyiségként

$$u(t) = \hat{U} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

– A frekvencia (f), a periódusidő (T) és a körfrekvencia (ω) kapcsolata:

$$f = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s}\right] [Hz]$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

– A reaktáns elemek impedanciája:

$$Z_L = jX_L = j\omega L$$

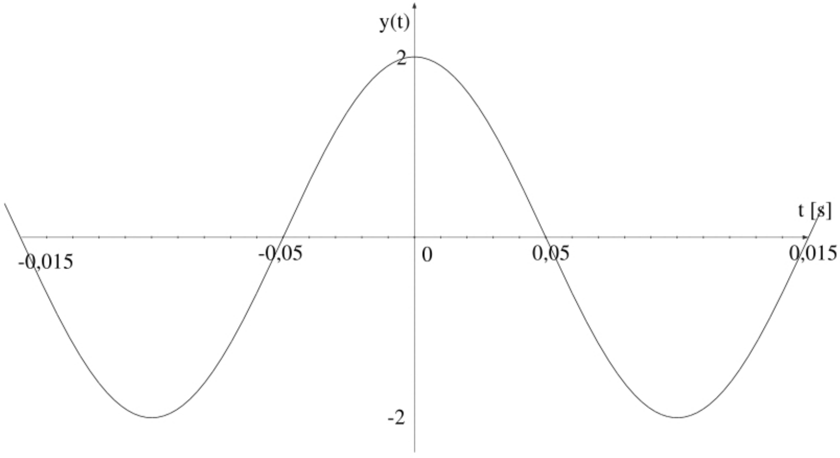
$$Z_C = jX_C = \frac{1}{j\omega C}$$

1. Ábrázolja azt az $y(t)$ koszinuszos lefutású időfüggvényt, melynek csúcsértéke (A) 2, periódusideje (T) pedig 0,02s!

Mivel a periódusidő $T = 0,02s$, a körfrekvencia $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,02} = 314,16$.

Az ábrázolandó időfüggvény ω ismeretében:

$y(t) = A \cdot cos(\omega t) = 2 \cdot cos(314,16 \cdot t)$



39. ábra.

2. Ábrázolja annak a koszinuszos lefolyású feszültségnek az időfüggvényét, melynek amplitúdója $\hat{U} = 10V$, frekvenciája $f = 10Hz$ és kezdőfázisa $\varphi = 30°$!

Megoldás:

A körfrekvencia:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10Hz = 62,83\frac{rad}{s}$$

A kezdőfázis fokban: $\varphi = 30°$.

A kezdőfázis radiánban: $\frac{30°}{180°}\pi rad = \frac{\pi}{6}rad$.

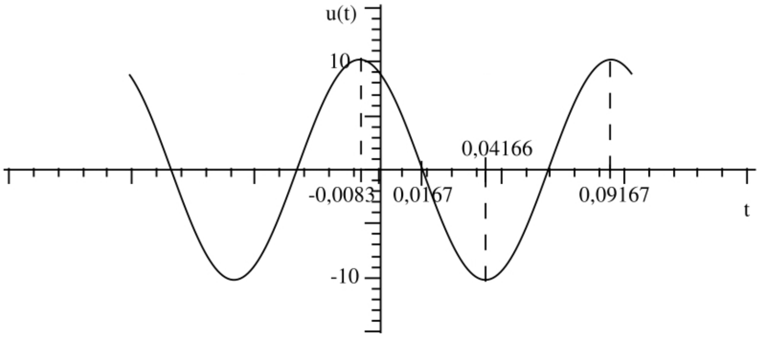
Az ábrázolandó időfüggvény ezek alapján:

$u(t) = 10 \cdot cos\,(62,83t + 30°)$

Az ábrázoláshoz:

A függvény periódusideje $T = \frac{1}{f} = 0,1s$

A kezdőfázis $\varphi = 30°$, ami a teljes kör $\frac{1}{12}$-ed része. Emiatt a koszinusz függvény balra csúszik $\frac{T}{12} = \frac{0,1}{12} = 0,00833s$-mal.



40. ábra.

3. Egy $L = 10mH$ értékű induktivitáson $f = 15,915Hz$ frekvenciájú és $\hat{I} = 1A$ csúcsértékű koszinuszos lefolyású váltakozó áram folyik. Ábrázolja az induktivitáson eső feszültség és a rajta folyó áram időfüggvényét és fazorábráját!

Megoldás:

Az ω körfrekvencia az f frekvencia alapján:

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 15,915 = 100\frac{rad}{sec}$

Az induktivitáson folyó áram komplex időfüggvénye:

$i(t) = \hat{I}cos(\omega t) = 1 \cdot cos(100 \cdot t)$

Az áram komplex csúcsértéke:

$\hat{\overline{I}} = \hat{I}e^0 = \hat{I}$

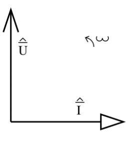
Az induktivitás reaktanciája:

$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 15,915 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1\Omega$

Az ellenálláson eső feszültség komplex csúcsértéke az Ohm-törvény alapján:

$\hat{\overline{U}} = \hat{\overline{I}} \cdot jX_L = j \cdot 1\Omega \cdot 1A = j \cdot 1V = \hat{U}e^{\frac{\pi}{2}}$

A fazorábra tehát a következő:

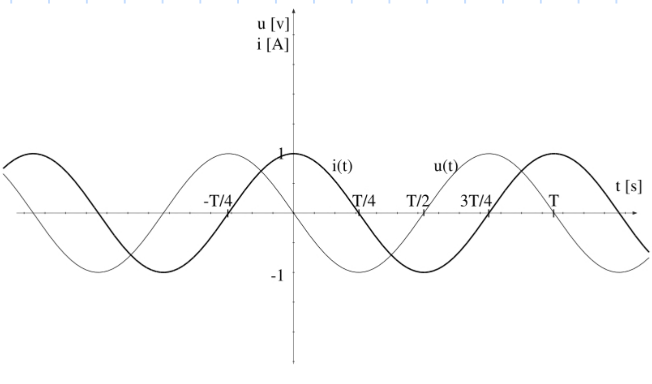


41. ábra.

Az induktivitás feszültségének körfrekvenciája azonos az áram körfrekvenciájával, az nem változik meg, ám pillanatértéke 90°-kal siet az áram pillanatértékéhez képest. Az ábrázolandó feszültség-idő függvény tehát:

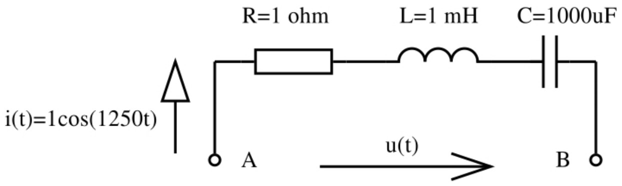
$u(t) = \hat{U}cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 1 \cdot cos(100 \cdot t + \frac{\pi}{2})$.

$u(t)$ és $i(t)$ közös grafikonon ábrázolva, ahol $T = \frac{1}{f} = 0,628s$:



42. ábra.

4. Rajzolja fel a 43. ábrán látható kapcsolásban szereplő áramköri elemek áramának és feszültségének időfüggvényét és fazorábráját! Az áramkör A és B kapcsai között mérhető feszültség komplex csúcsértékét szintén szerepeltesse a fazorábrán!



43. ábra.

Megoldás:

Minden áramköri elemen azonos áram folyik, ez $i(t)$. Az egyes áramköri elemek feszültségének csúcsértéke a következő:

$\hat{U}_R = \hat{I}R = 1A \cdot 1\Omega = 1V$

$\hat{U}_L = \hat{I}\omega L = 1A \cdot 1250\dfrac{rad}{s} \cdot 1mH = 1,25V$

$\hat{U}_C = \hat{I}\dfrac{1}{\omega C} = 1A\dfrac{1}{1250\dfrac{rad}{s}1mF} = 0,8V$

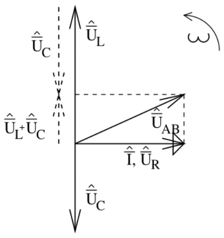
Az induktivitás feszültsége az áramához képest 90°-ot siet, a kapacitás feszültsége pedig a saját áramához képest 90°ot késik. A csúcsértékek ismeretében a fazorábra felrajzolható. R, L és C feszültségvektorait a fazorábrán egymással összeadva megkapható az U_{AB} feszültség komplex csúcsértéke.

$\hat{\overline{U}}_{AB}$ fázisa könnyen számítható:

$\varphi_{\hat{\overline{U}}_{AB}} = arctg\dfrac{|\overline{U}_L| - |\overline{U}_C|}{|\overline{U}_R|} = arctg\dfrac{1,25 - 0,8}{1} = arctg0,45$

$\varphi_{\hat{\overline{U}}_{AB}} = 24,28° = 0,135\pi rad$

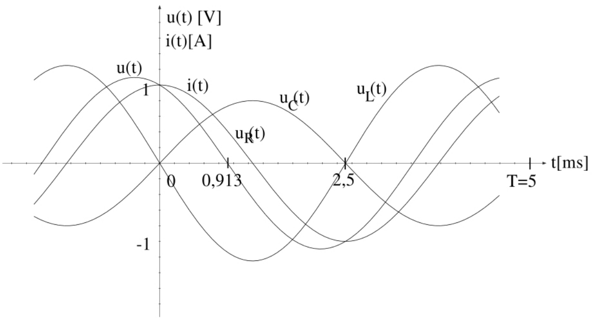
$\hat{\overline{U}}_{AB}$ abszolútértéke pedig:



44. ábra.

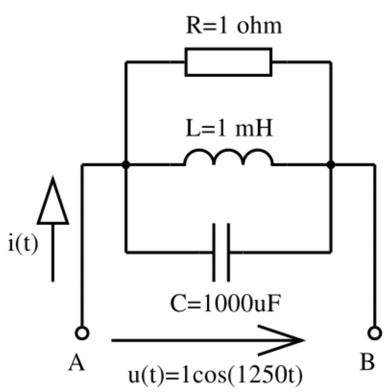
$|\hat{\overline{U}}_{AB}| = \sqrt{(|\overline{U}_L| - |\overline{U}_C|)^2 + |\overline{U}_R|^2} = \sqrt{0,45^2 + 1} = 1,097V$

A fazorábra információi alapján az időfüggvények a 45. ábrán láthatók. $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,5ms$.



45. ábra.

5. Rajzolja fel a 46. ábrán látható kapcsolásban szereplő áramköri elemek áramának és feszültségének időfüggvényét és fazorábráját! Az főágban folyó $i(t)$áram komplex csúcsértékét szintén szerepeltesse a fazorábrán!



46. ábra.

Megoldás:

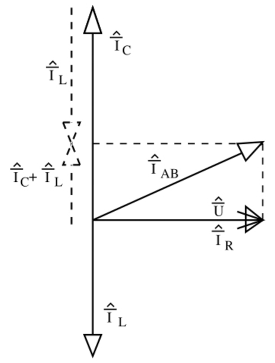
Az áramkör minden elemének feszültsége $u(t)$. Az egyes ágakban folyó áramok csúcsértéke a következő:

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}}{R} = \frac{1V}{1\Omega} = 1A$$

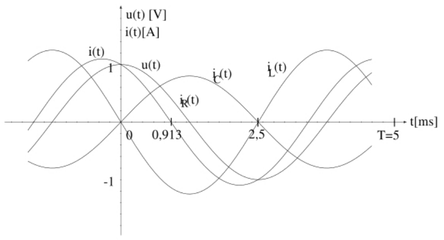
$$\hat{I}_L = \frac{\hat{U}}{\omega L} = \frac{1V}{1,25\Omega} = 0,8A$$

$$\hat{I}_C = \frac{\hat{U}}{\frac{1}{\omega C}} = \hat{U}\omega C = 1V \cdot 1,25\Omega = 1,25A$$

Az induktivitás árama saját feszültségéhez képest 90°-ot késik, a kapacitás árama saját feszültségéhez képest pedig 90°-ot siet. A fazorábra a 47. ábrán látható.



47. ábra.



48. ábra.

$\hat{\hat{I}}_{AB}$ abszolútértéke a következő: $|\hat{\hat{I}}_{AB}| = \sqrt{(\hat{I}_C - \hat{I}_L)^2 + \hat{I}_R^2} = 1,097A.$

$\hat{\hat{I}}_{AB}$ fázisszöge pedig: $\varphi_{AB} = arctg\frac{\hat{I}_C - \hat{I}_L}{\hat{I}_R^2} = 24,23° = 0,135\pi rad.$

Az idő függvények a 48. ábrán láthatók.