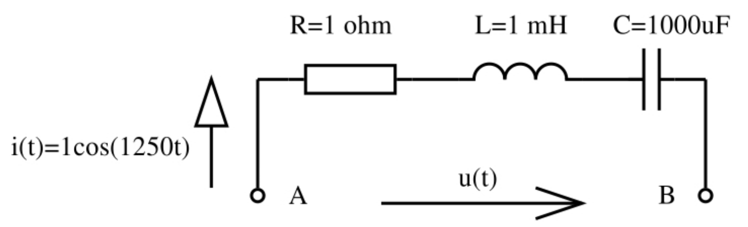
1. Határozza meg a 43 ábrán található kapcsolásban az egyes áramköri elemek látszólagos, effektív és meddő teljesítményét!

   Határozza meg a teljes hálózat teljesítményeit is! Mekkora a hálózat teljesítménytényezője?



43. ábra.

1. Az áram és a feszültség effektív értéke:

   $I_{eff} = I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

   $U_{eff} = U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$

   A látszólagos teljesítmény: $S = U \cdot I = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2}$, mértékegysége a $[VA]$.

   A hatásos teljesítmény: $P = U \cdot I cos\varphi = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} cos\varphi$, mértékegysége a $[W]$.

   A meddő teljesítmény: $Q = U \cdot I sin\varphi = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} sin\varphi$, mértékegysége a $[VAr]$.

   A teljesítménytényező: $\lambda = cos\varphi$.

Megoldás:

Az áramkör egyetlen soros kapcsolásból áll, ezért az áram minden elemén azonos. Ez

$i(t) = 1cos(1250t)$.

Az R ellenálláson eső feszültség:

$u_R(t) = i(t) \cdot R = 1 \cdot Rcos(1250t) = 1 \cdot 1cos(1250t) = 1cos(1250t)$.

R-en az áram és a feszültség azonos fázisban van, tehát a $\varphi = 0$.

Ezek ismeretében R teljesítménye:

$S_R = \frac{\hat{U_R} \cdot \hat{I}}{2} = 0,5VA$

$P_R = U_R I cos\varphi = S_R \cdot cos\varphi = S \cdot cos0 = S = 0,5W$

$Q_R = U_R I sin\varphi = S_R \cdot sin\varphi = S \cdot sin0 = 0VAr$

L feszültsége a rajta folyó áramhoz képest siet. Ez azt jelenti, hogy $i(t)$ és $u_L(t)$ fáziskülönbsége $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radián.

$u_L(t) = i(t) j\omega L = \omega L \cdot 1 \cdot cos\left(1250t + \frac{\pi}{2}\right) = 1,25 \cdot cos\left(1250t + \frac{\pi}{2}\right)$

L teljesítménye:

$S_L = \frac{\hat{U_L} \cdot \hat{I}}{2} = \frac{1,25}{2} = 0,625VA$

$P_L = U_L I cos\varphi = S_L \cdot cos\varphi = S \cdot cos\frac{\pi}{2} = 0W$

$Q_L = U_L I sin\varphi = S_L \cdot sin\varphi = S \cdot sin\frac{\pi}{2} = 0,625VAr$

C feszültsége az áramhoz képest késik, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$rad.

$u_C(t) = i(t)\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot 1 \cdot cos\left(1250t - \frac{\pi}{2}\right) = 0,8 \cdot cos\left(1250t - \frac{\pi}{2}\right)$

C teljesítménye:

$S_C = \frac{\hat{U_C} \cdot \hat{I}}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,4VA$

$P_C = U_C I cos\varphi = S_C \cdot cos\varphi = S \cdot cos\frac{\pi}{2} = 0W$

$Q_C = U_C I sin\varphi = S_C \cdot sin\varphi = S \cdot sin\frac{\pi}{2} = 0,4VAr$

A teljes köt teljesítményét az $u_{AB}(t)$ ismeretben lehet meghatározni. $\hat{\overline{U}}_{AB}$ az $\hat{\overline{U}}_R$, $\hat{\overline{U}}_L$ és $\hat{\overline{U}}_C$ komplex feszültség csúcsértékek vektoriális összege.

$|\hat{\overline{U}}_{AB}| = \sqrt{\left(|\hat{\overline{U}}_L| - |\hat{\overline{U}}_C|\right)^2 + |\hat{\overline{U}}_R|^2} = 1,0966V$

$\varphi_{AB} = arctg\left(\frac{|\hat{\overline{U}}_L| - |\hat{\overline{U}}_C|}{|\hat{\overline{U}}_R|}\right) = 0,422rad$

$\hat{\overline{U}}_{AB}$ tehát:

$\hat{\overline{U}}_{AB} = |\hat{\overline{U}}_{AB}| e^{j(\omega t + \varphi_{AB})} = 1,0996 e^{j(1250t + 0,422)}$

Innen a kapcsolás teljesítménye:

$S_{AB} = \frac{\hat{U_{AB}} \cdot \hat{I}}{2} = \frac{1,0996}{2} = 0,55VA$

$P_{AB} = U_{AB} I cos\varphi = S_{AB} \cdot cos\varphi = S_{AB} \cdot cos0,422 = 0,55 \cdot 0,91 = 0,5\ W$

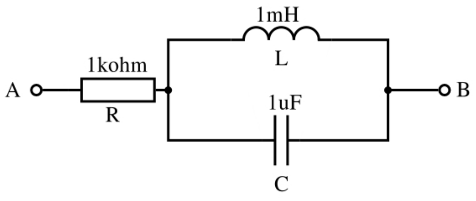
$Q_{AB} = U_{AB} I sin\varphi = S_{AB} \cdot sin\varphi = S_{AB} \cdot sin0,422 = 0,55 \cdot 0,41 = 0,17VAr$

A teljes hálózat teljesítménye más módon is kiszámítható. Egyszerűbb lett volna a korábban kiszámított teljesítményvektrokat vektoriálisan összeadni, és így meghatározni a hálózat összteljesítményét.

A teljesítménytényező:

$\lambda = cos\varphi = cos0,422 = 0,91$

2. Számítsa ki a 49. ábrán látható kapcsolás A és B kapcsok között $f = 1kHz$ frekvencián mérhető impedanciáját !



49. ábra.

Soros eredőimpedancia: $\overline{Z} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

párhuzamos eredőimpedancia: $\overline{Z} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2}$

Megoldás:

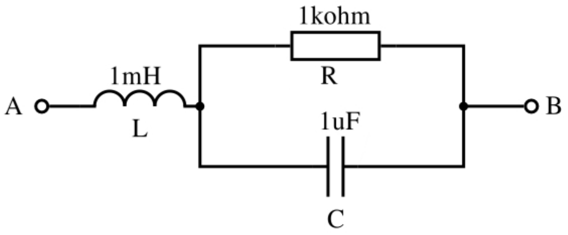
$\omega = 2\pi f = 6,283\ k\frac{rad}{sec}$

Az eredő impedancia:

$$\overline{Z_e} = R + j\omega L \times (\frac{1}{j\omega C}) = R + \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = R - \frac{j\omega L}{\omega^2 LC + 1}$$

$$\overline{Z_e} = R - j\frac{\omega L}{\omega^2 LC + 1} = (10^3 - j6,283)\ \Omega$$

3. Számítsa ki az 50. ábrán látható kapcsolás A és B kapcsok között $\omega = 100\frac{rad}{sec}$ körfrekvencián mérhető impedanciáját !



50. ábra.

Soros eredőimpedancia: $\overline{Z} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

párhuzamos eredőimpedancia: $\overline{Z} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2}$

Megoldás:

Az eredő impedancia:

$$\overline{Z}_e = j\omega L + \left(R \times \frac{1}{j\omega C}\right) = j\omega L + \frac{R\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{j\omega CR + 1}$$

Az összeg második felében szereplő tört nevezőjéből tüntessük el a j-t! Ehhez a törtet a nevező konjugáltjával szorozzuk is és osztjuk is:

$$\frac{R}{j\omega CR + 1} = \frac{R}{j\omega CR + 1} \cdot \frac{j\omega CR - 1}{j\omega CR - 1} =$$

$$= \frac{R - j\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} =$$

$$= \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} - j\frac{\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

A teljes impedancia tehát:

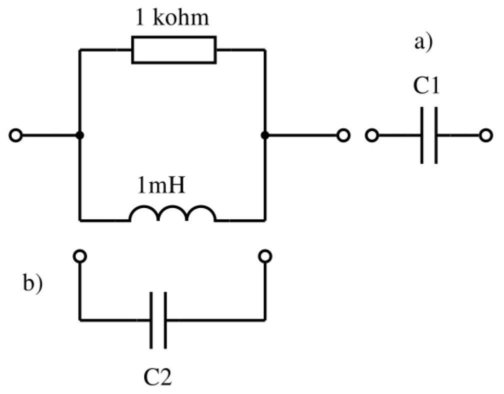
$$\overline{Z}_e = j\omega L + \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} - j\frac{\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} =$$

$$= \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} - j\left(\omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}\right)$$

Az eredmény a konkrét értékekkel:

$$\frac{10^3}{1 + 10^2} + j(10^{-1} - \frac{10^2}{1 + 10^2}) \approx (990 - j99)\ \Omega$$

6. Az 53. ábra kapcsolására mekkora kapacitást kell a) sorosan, b) párhuzanosan kapcsolni ahhoz, hogy $f = 50Hz$ frekvencián a teljesítménytényező értéke éppen 1 legyen?



53. ábra.

A teljesítménytényező: $\lambda = cos\,\varphi$.

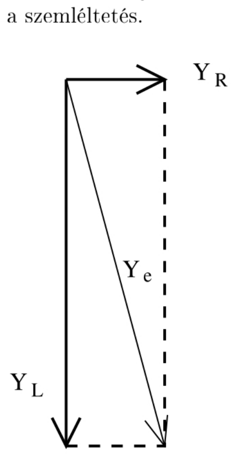
Soros eredőimpedancia: $\overline{Z} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

párhuzamos eredőimpedancia: $\overline{Z} = \overline{Z_1} \times \overline{Z_2}$

Megoldás:

a) A teljesítménytényező
$\lambda = cos\varphi$.
A körfrekvencia:
$\omega = 2\pi f = 314,16$
Az áram és a feszültség közötti fáziskülönbség (φ) azonos a kapcsolás impedanciájának fázisszögével. Elég kiszámolni tehát az impedancia komplex értékét.
$$\overline{Z}_e = R \times j\omega L = \frac{jR\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j314,16}{1000 + j0,314} =$$
$$= \frac{j314,16}{1000 + j0,314} \cdot \frac{1000 - j0,314}{1000 - j0,314}$$
$$\overline{Z}_e \approx 0,986 \cdot 10^{-6} + j0,314$$
Ahhoz, hogy a kapcsolás impedanciájának fázisszöge 0 legyen, annak képzetes részét 0-vá kell tenni. A sorosan kapcsolt kapacitás reaktanciájának tehát éppen meg kell egyeznie $\overline{Z}_e$ képzetes tagjának értékével.
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 0,314$$
$$C = \frac{1}{\omega \cdot 0,314} = \frac{1}{314,16 \cdot 0,314} \approx 10mF$$

b) A feladat b) részében az a)-tól eltérő megoldást mutatunk be. A feladat megoldható a komplex impedancia vektorábrájának segítségével is.
A kapcsolás elemei párhuzamosan vannak egymással kapcsolva, ami azt jelenti, hogy eredőjüket a replusz művelet segítségével kapjuk meg. A vektorábrán nehézkes és bonyolult vektorok szorzatát és hányadosát ábrázolni. Annak érdekében, hogy ezt a bonyolult feladatot egyszerű összeadássá redukáljuk, az impedanciák helyett az admittanciákkal számolunk. Az admittanciák párhuzamos eredője ugyanis az egyes admittanciák összege.
$$Y_L = \frac{1}{\overline{Z}_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{314,16 \cdot 10^{-3}} = -j \cdot 3,183\ S$$
$$Y_R = \frac{1}{R} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$
Az értékeket vektorábrán ábrázoljuk. Az 54. ábra a kapott értékek miatt nem arányos, célja a szemléltetés.



54. ábra.

Y_e értékét nem is kell kiszámolni. Látszik, hogy $-Y_L$-et hozzáadva a vektorokhoz, Y_e fázisszöge éppen 0 lesz. Emiatt:
$$Y_C = -Y_L$$
$$j\omega C = j \cdot 3,183S$$
$$C = \frac{3,183}{\omega} = \frac{3,183}{314,16} = 10,1\ mF$$

4. Mekkora áttétellel rendelkező transzformátort kell alkalmazni ahhoz, hogy ha a szekunder oldalra $2k\Omega$ kapcsolunk, akkor a primer oldalon $18k\Omega$ látsszon?

A transzformátor:

A csatolási tényező: $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, ahol M a kölcsönös induktivitás. M helyett szokás az L_{12} jelölés használata is. Az ideális transzformátor csatolási tényezője $k = 1$.

Az áttétel: $\nu = \dfrac{n_1}{n_2}$, ahol n_1 a primer, n_2 pedig a szekunder tekercs menetszáma.

A transzformátor karakterisztikái:

A transzformátor a teljesítményt 1:1 arányban transzformálja, így a karakterisztikák:

$u_2(t) = \nu u_1(t)$

$i_2(t) = -\dfrac{i_1(t)}{\nu}$

A transzformátor az impedanciát az áttétel négyzetével arányosan teszi át, tehát ha a transzformátor szekunder oldalára $\overline{Z}$ impedancia van kapcsolva, a primer kapcsokon $\nu^2 \cdot \overline{Z}$ mérhető.

$\overline{Z}_p = \nu^2 \cdot \overline{Z}_{sz}$

Megoldás:

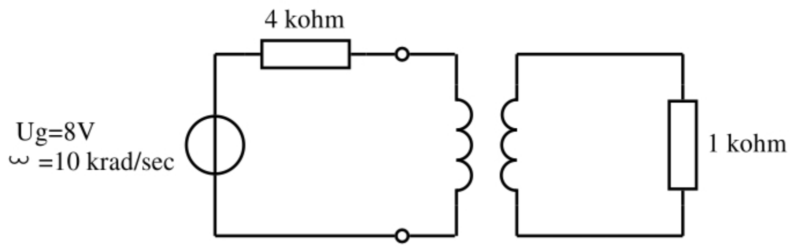
A transzformátor az impedanciát az áttétel négyzetével arányosan transzformálja.

$R_p = \nu^2 R_{sz}$

$\nu^2 = \dfrac{R_{sz}}{R_p} = \dfrac{R_{sz}}{R_p} = \dfrac{18k\Omega}{2k\Omega} = 9$

$\nu = \sqrt{9} = 3$

5. Mekkora értékű legyen az 51. ábrán látható kapcsolásban szereplő ideális transzformátor áttétele, hogy a valóságos, $4k\Omega$ belső ellenállású generátorból $4mW$ teljesítményt vegyen ki?



51. ábra.

A transzformátor:

A csatolási tényező: $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, ahol M a kölcsönös induktivitás. M helyett szokás az L_{12} jelölés használata is. Az ideális transzformátor csatolási tényezője $k = 1$.

Az áttétel: $\nu = \frac{n_1}{n_2}$, ahol n_1 a primer, n_2 pedig a szekunder tekercs menetszáma.

A transzformátor karakterisztikái:

A transzformátor a teljesítményt 1:1 arányban transzformálja, így a karakterisztikák:

$u_2(t) = \nu u_1(t)$

$i_2(t) = -\frac{i_1(t)}{\nu}$

A transzformátor az impedanciát az áttétel négyzetével arányosan teszi át, tehát ha a transzformátor szekunder oldalára $\overline{Z}$ impedancia van kapcsolva, a primer kapcsokon $\nu^2 \cdot \overline{Z}$ mérhető.

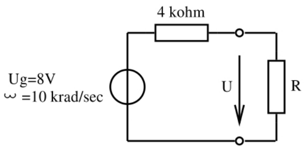
$\overline{Z}_p = \nu^2 \cdot \overline{Z}_{sz}$

A teljesítmény:

$P = 4 \cdot 10^{-3} = UI = \frac{U^2}{R}$.

A transzformátor az impedanciát a ν áttétel négyzetével arányosan transzformálja, tehát a kapcsolás a feladat szempontjából ekvivalens az 52. ábra kapcsolásával, ahol

$R = \nu^2 \cdot 1 \cdot 10^3\ \Omega$.



52. ábra.

A feszültségosztó képlet szerint az U feszültség értéke:

$$U = U_g \frac{R}{R + 4 \cdot 10^3\Omega} = \frac{8R}{R + 4 \cdot 10^3\Omega} = \frac{\nu^2 \cdot 8 \cdot 10^3}{\nu^2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3}.$$

Az egyenlet 10^3-nal egyszerűsíthető.

$$U = \frac{\nu^2 \cdot 8}{\nu^2 + 4}$$

U-t és R-et a P egyenletébe behelyettesítve kapjuk a következő egyenletet:

$$P = 4 \cdot 10^{-3} = \frac{\frac{\nu^4 \cdot 64}{\nu^4 + 8\nu^2 + 16}}{\nu^2 \cdot 10^3}$$

Az egyenletet 10^3-nal szorozva és a ν^2-tel való osztást elvégezve kapható a következő egyenlet:

$$4 = \frac{\nu^2 \cdot 64}{\nu^4 + 8\nu^2 + 16}$$

Mindkét oldalt osztva 4-gyel:

$$1 = \frac{\nu^2 \cdot 16}{\nu^4 + 8\nu^2 + 16}.$$

$\nu^4 + 8\nu^2 + 16 = 16\nu^2$

$\nu^4 - 8\nu^2 + 16 = 0$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$\nu_{1,2}^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4$$

Gyökvonás után az eredmények:

$\nu_1 = 2$

$\nu_2 = -2$

A feladatnak tehát két megoldása van. Mindkét megoldás helyes. A negatív ν fizikailag azt jelenti, hogy a transzformátor primer és szekunder tekercseinek menetiránya ellentétes, ezért a primer és szekunder áramok iránya is ellentétes.