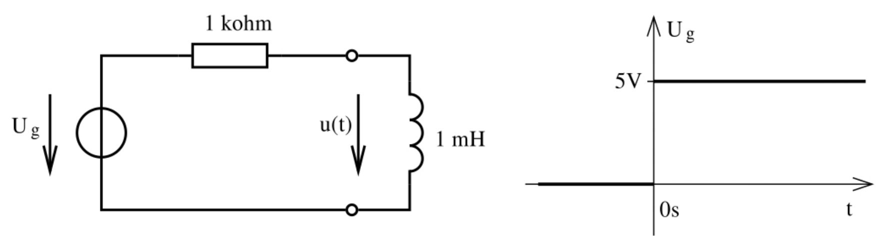
1. A 63. ábrán látható kapcsolásban a $t = 0$ időpillanatban bekapcsoljuk az ideális feszültségforrást, ahogy az a kapcsolás melletti grafikonon látható. Határozza meg az L induktivitáson és az R ellenálláson folyó áram időfüggvényét, és ábrázolja azok diagramját az átmeneti időszakban! A feladatot végezze el a feszültségekre vonatkozóan is!



63. ábra.

Az egyes áramköri elemek viselkedése végtelen nagy és nulla frekvencián:

frekvencia	∞	0
ellenállás	R	R
kapacitás	rövidzár	szakadás
induktivitás	szakadás	rövidzár

$u(t) = u_{\text{tranziens}}(t) + u_{\text{stacionárius}}(t)$

$i(t) = i_{\text{tranziens}}(t) + i_{\text{stacionárius}}(t)$,

ahol:

$u_{\text{tranziens}}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$i_{\text{tranziens}}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau = RC$

$\tau = \frac{L}{R}$

Úgy tekintjük, hogy az állandósult állapot 5τ idő alatt áll be. Ekkor a feszültség, vagy áram pillanatnyi értéke és az állandósult érték között 1%-nál kisebb az eltérés.

A be- vagy kikapcsolástól számítva τ idő alatt az átmeneti jelenséghez tartozó teljes változás 63%-a zajlik le.

A bekapcsolás pillanatában a hálózat feszültségének változási gyorsasága végtelen nagy. Az induktivitás egyenáramon rövidzár, végtelen nagy frekvencián (0 időtartam alatt végbemenő változás esetén) pedig szakadás, így bekapcsoláskor szakadásként viselkedik. Ebben a pillanatban emiatt az áramkörben nem folyik áram és a generátor teljes feszültsége a szakadásként viselkedő induktivitás kapcsai között mérhető.

$i_L(0) = 0A$

$i_R(0) = 0A$

$u_L(0) = U_g$

$u_R(0) = 0V$

Valamennyi idő múlva, amikor a bekapcsolás okozta feszültségváltozás hatása már nem jelentős, az áramkört egyenfeszültség gerjeszti. Az egyenfeszültségre kapcsolt induktivitás rövidzár, tehát az áramkörben folyó áram erőssége csak R-től és U_g-től függ.

$I_{L,t>>0} = I_{R,t>>0} = \frac{U_g}{R} = 5mA$

A két időpont között az induktivitás árama $Me^{-\frac{t}{\tau}}$ szerinti lefolyású (lásd: elméleti összefoglaló).

Az időfüggvény a következő módon áll elő:

$i_L(t) = i_R(t) = i(t) = i_{tr}(t) + i_{st}(t)$

$i_{st}(t) = 5mA$

$i_{tr}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1 \cdot 10^-3}{1 \cdot 10^3} = 1\mu s$

$t = 0$ időpillanatban $i_L(0) = 0$, ezért M értékét úgy kell meghatározni, hogy $i(t) = 0$ legyen.

$i(t) = 0 = Me^{-\frac{t}{\tau}} + i_{st}(t) = Me^{-\frac{t}{5 \cdot 10^{-6}}} + 5 \cdot 10^{-3}$

Innen M-et kirendezve és kihasználva, hogy $t = 0$:

$M = \frac{-5 \cdot 10^{-3}}{e^{-\frac{t}{\tau}}} = \frac{-5 \cdot 10^{-3}}{e^{-\frac{0}{\tau}}} = \frac{-5 \cdot 10^{-3}}{1} = -5 \cdot 10^{-3}$

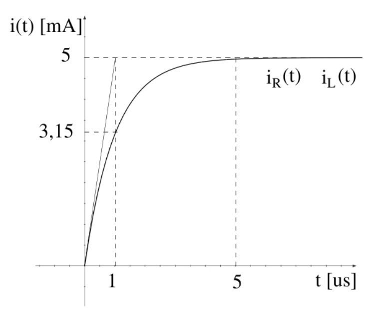
A fentiek ismeretében i időfüggvénye:

$i(t) = -5 \cdot 10^{-3} e^{-\frac{t}{5 \cdot 10^{-6}}} + 5 \cdot 10^{-3}$

Az ábrázolásban segítenek a következők:

- A függvény bármely t időpillanathoz tartozó pontjához húzott érintő az állandósult állapothoz tartozó szintet a $t + \tau$ időpontban metszi.
- A $t = 0$ időpillanattól a $t = \tau$ időpillanatig a változás 63%-a zajlik le. ($5mA \cdot 0,63 = 3,15mA$)
- Az időfüggvény az állandósult állapotot közelítően a $t = 5\tau$ időpillanatban éri el.

Mivel egymással soros kapcsolásban vannak, az induktivitás és az ellenállás árama azonos. Az áramkörben folyó áram grafikonja a 64. ábrán látható.



64. ábra.

A bekapcsolás pillanatában a hirtelen változás miatt az induktivitás szakadásként viselkedik, emiatt feszültsége a $t = 0$ időpillanatban

$u_{L,t=0} = 5V$.

Később, amikor az átmeneti folyamatok gyakorlatilag már lezajlottak, a hálózatra kapcsolt feszültség változatlan, azaz frekvenciája nulla. Ekkor az induktivitás ellenállás nélkül vezet, rövidzárként viselkedik. Rövidzáron feszültség nem eshet, tehát az induktivitás feszültsége állandósult állapotban

$u_{L,t>>0} = 0V$.

$t = 0$ és $t >> 0$ időpontok között az induktivitás feszültsége e^{-x} jelleggel csökken. A teljes folyamatot leíró időfüggvény:

$u_L(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}} + 5$.

τ azonos az előbb meghatározott értékkel, $\tau = 10^{-6}s$.

M értéke meghatározható a $t = 0$ időponthoz tartozó értékek segítségével:

$5 = Me^0 + 0$, azaz

$M = 5$.

M és τ ismeretében az $u_L(t)$ időfüggvény felírható:

$u_L(t) = 5e^{-\frac{t}{\tau}} + 0$.

Az ellenállás feszültségének alakulása éppen fordítottja az induktivitásénak. A bekapcsolás pillanatában az ellenálláson áram nem folyhat, tehát rajta feszültség nem esik, az állandósult állapotban viszont minden feszültség rajta esik. A köztes időben ez a feszültség $-e^{-x}$ jelleggel nő.

Az időfüggvény:

$u_R(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}} + u_{R,st}$.

$u_{R,st} = 5V$

M értéke a $t = 0$-ban ismert értékekkel:

$0 = Me^0 + 5$, azaz

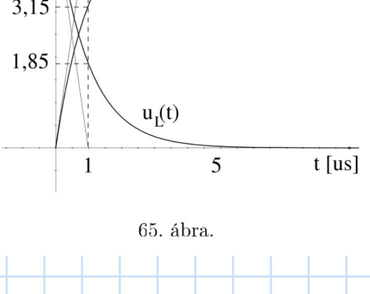
$M = -5$.

Így

$u_R(t) = -5e^{-\frac{t}{\tau}} + 5$.

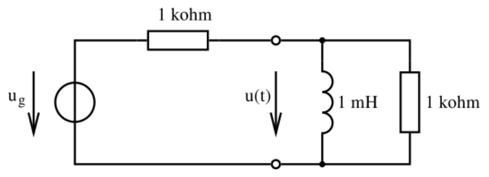
A két feszültség grafikonja a 65. ábrán látható. Az ábrán láthatók a τ időponthoz tartozó értékek is.

$u_L(\tau) = 5 - 0,63u_{L,st} = 1,85V$, és $u_R(\tau) = 0,63u_{R,st} = 3,15V$.



65. ábra.

2. A 66. ábrán látható kapcsoláshoz $u_g = 2cos(\omega t)$ feszültségű forrás kapcsolódik, melyet a $t = 0$ időpontban bekapcsolunk. Írja fel az induktivitás feszültségének teljes időfüggvényét és ábrázolja annak grafikonját az átmeneti idő alatt! A körfrekvencia $\omega = 314 \frac{krad}{sec}$.



66. ábra.

Az egyes áramköri elemek viselkedése végtelen nagy és nulla frekvencián:

frekvencia	∞	0
ellenállás	R	R
kapacitás	rövidzár	szakadás
induktivitás	szakadás	rövidzár

$u(t) = u_{\text{tranziens}}(t) + u_{\text{stacionárius}}(t)$

$i(t) = i_{\text{tranziens}}(t) + i_{\text{stacionárius}}(t)$,

ahol:

$u_{\text{tranziens}}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$i_{\text{tranziens}}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau = RC$

$\tau = \frac{L}{R}$

Úgy tekintjük, hogy az állandósult állapot 5τ idő alatt áll be. Ekkor a feszültség, vagy áram pillanatnyi értéke és az állandósult érték között 1%-nál kisebb az eltérés.

A be- vagy kikapcsolástól számítva τ idő alatt az átmeneti jelenséghez tartozó teljes változás 63%-a zajlik le.

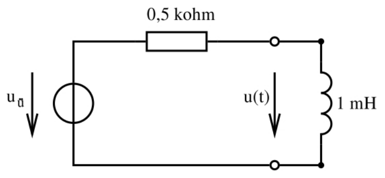
A feladatban szereplő kapcsolás ugyan egyszerűen számítható a 66. ábrán látható formában is, mégis szemléletesebb a megoldás, ha az induktivitásra kapcsolódó hálózatot helyettesítjük a megfelelő Thévenin helyettesítő generátorral.

A helyettesítő generátor belső ellenállása az induktivitás kapcsai felől nézve a két $1k\Omega$-os ellenállás párhuzamos erdője:

$R_g = 1 \cdot 10^3 \times 1 \cdot 10^3 = 0,5 \cdot 10^3\Omega = 0,5k\Omega$

A helyettesítő generátor üresjárási feszültségének meghatározásához az induktivitást „kivesszük" a hálózatból, és az üresen maradt kapcsok között meghatározzuk a feszültséget.

$u_{\text{ü}} = u_g \cdot \frac{1k\Omega}{2k\Omega} = 2cos(\omega t) \cdot 0,5 = 1cos(\omega t)$



67. ábra.

A keresett időfüggvény:

$u_L(t) = Me^{-\dfrac{t}{\tau}} + u_{Lst}(t)$

A feszültség állandósult értéke a feszültségosztás képletével maghatározható:

$u_{Lst}(t) = u_{\text{ü}} \cdot \frac{j\omega L}{R_g + j\omega L}$

A megoldáshoz az egyenletben szereplő tört számlálóját és nevezőjét is szorozzuk meg a nevezőben szereplő komplex mennyiség konjugáltjával!

$u_{Lst}(t) = u_{\text{ü}} \cdot \frac{j\omega L}{R_g + j\omega L} \cdot \frac{R_g - j\omega L}{R_g - j\omega L}$

$u_{Lst}(t) = u_{\text{ü}} \cdot \frac{\omega^2 L^2 + j\omega L R_g}{R_g^2 + \omega^2 L^2}$

$u_{Lst}(t) = u_{\text{ü}} \cdot (0,283 + j0,45)$

Komplex számok szorzatának abszolútértéke a tagok abszolútértékeinek szorzata, szöge pedig a tagok szögeinek összege, így

$\hat{u}_{Lst} = \hat{u}_g \cdot \sqrt{0,283^2 + 0,45^2} = 0,532V$,

és

$\varphi_{Lst} = \varphi_{u_g} + arctg\frac{0,45}{0,283} = 0 + 57,83°$.

Az állandósult feszültség időfüggvénye:

$u_{Lst}(t) = 0,532cos(\omega t + 57,83°)$.

Az átmeneti időfüggvény a következő.

$u_{Ltr} = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau = \frac{L}{R} = 2\mu s$

A feszültség teljes időfüggvénye a két időfüggvény összege:

$u_L(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}} + 0,532cos(\omega t + 57,83°)$

M értéke meghatározható a $t = 0$ időpontban felvett értékek segítségével:

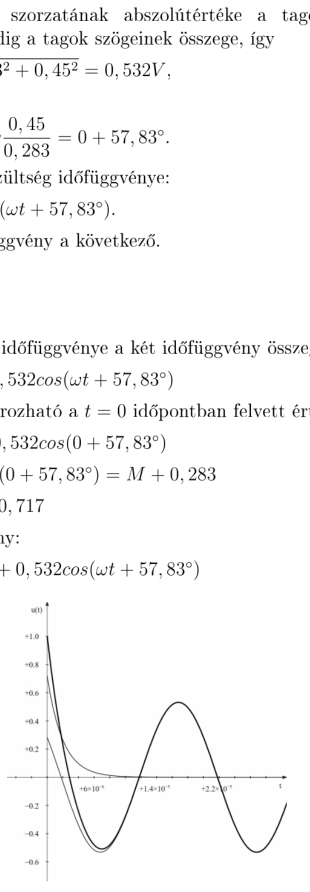
$u_L(0) = Me^{-\frac{0}{\tau}} + 0,532cos(0 + 57,83°)$

$1 = M + 0,532cos(0 + 57,83°) = M + 0,283$

$M = 1 - 0,283 = 0,717$

A teljes időfüggvény:

$u_L(t) = 0,717e^{-\frac{t}{\tau}} + 0,532cos(\omega t + 57,83°)$

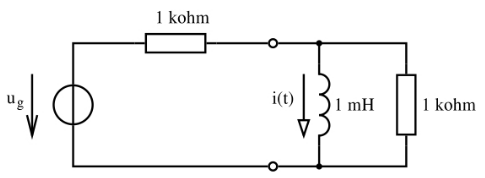


68. ábra.

Az induktivitás feszültségének időfüggvénye a 68. ábrán látható.

A feladatban a gerjesztés periódusideje $T = 2\pi/\omega \approx 20\mu s$, az időállandó értéke pedig $\tau = 2\mu s$. Az átmeneti állapot gyakorlatilag 5τ alatt lezajlik. Ebben a feladatban a két érték hányadosa $5\tau/T = 0,5$. Ez azt jelenti, hogy az átmeneti állapot a bekapcsolás utáni első félperiódusban lezajlik.

3. Határozza meg a 69. ábrán látható kapcsolásban szereplő induktivitás áramának teljes időfüggvényét, és ábrázolja azt az átmeneti időszak környékén! A feladat körülményei megegyeznek a 2. feladatban szereplőkkel.



69. ábra.

Az egyes áramköri elemek viselkedése végtelen nagy és nulla frekvencián:

frekvencia	∞	0
ellenállás	R	R
kapacitás	rövidzár	szakadás
induktivitás	szakadás	rövidzár

$u(t) = u_{\text{tranziens}}(t) + u_{\text{stacionárius}}(t)$

$i(t) = i_{\text{tranziens}}(t) + i_{\text{stacionárius}}(t)$,

ahol:

$u_{\text{tranziens}}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$i_{\text{tranziens}}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau = RC$

$\tau = \dfrac{L}{R}$

Úgy tekintjük, hogy az állandósult állapot 5τ idő alatt áll be. Ekkor a feszültség, vagy áram pillanatnyi értéke és az állandósult érték között 1%-nál kisebb az eltérés.

A be- vagy kikapcsolástól számítva τ idő alatt az átmeneti jelenséghez tartozó teljes változás 63%-a zajlik le.

A számítás egyszerűsítéseként itt is helyettesítsük az induktivitásra kapcsolódó hálózatot a megfelelő Thévenin generátorral! (Azonos a 67. ábrán látható kapcsolással.)

A körben folyó állandósult áram az Ohm-törvény segítségével meghatározható.

$i_{Lst}(t) = \dfrac{u_{\text{ü}}}{Z} = \dfrac{u_{\text{ü}}}{R + j\omega L}$

Komplex számok hányadosának abszolútértéke azonos a tagok abszolútértékeinek hányadosával, szöge pedig a tagok szögeinek különbsége. Így

$\hat{i}_{Lst} = \dfrac{\hat{u}_{\text{ü}}}{|Z|} = \dfrac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = 1,7mA,$

és

$\varphi_{Lst} = 0 - arctg\left(\dfrac{\omega L}{R}\right) = -32,13°.$

Az állandósult áram időfüggvénye tehát

$i_{Lst} = 1,7 \cdot 10^{-3} cos(\omega t - 32,13°).$

$\tau = \dfrac{L}{R} = 2\mu s$

A tranziens összetevő:

$i_{Ltr} = Me^{-\frac{t}{\tau}}.$

Az áram teljes időfüggvénye:

$i_L(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}} + 1,7 \cdot 10^{-3} cos(\omega t - 32,13°).$

$t = 0$ időpontban $i_L(t)$ értéke ismert, így M meghatározható:

$i_L(0) = Me^{-\frac{0}{\tau}} + 1,7 \cdot 10^{-3} cos(\omega 0 - 32,13°),$

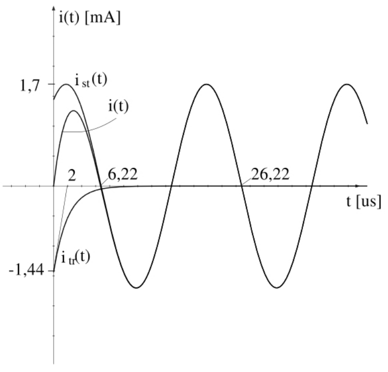
$0 = M + 1,7 \cdot 10^{-3} cos(-32,13°)$, tehát

$M = -1,44.$

Az áram teljes időfüggvénye az előzőek alapján:

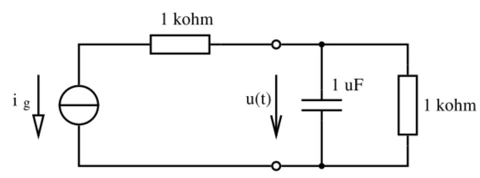
$i_L(t) = -1,44e^{-\frac{t}{\tau}} + 1,7 \cdot 10^{-3} cos(\omega t - 32,13°).$

A grafikonok a 70. ábrán láthatók.



70. ábra.

4. Határozza meg a 71. ábrán látható kapcsolásban a kapacitás feszültségének teljes időfüggvényét, és ábrázolja azt az átmeneti időszak környékén! $i_g = 10 \cdot 10^-3cos(\omega t)$, $\omega = 314\frac{krad}{sec}$.



71. ábra.

Az egyes áramköri elemek viselkedése végtelen nagy és nulla frekvencián:

frekvencia	∞	0
ellenállás	R	R
kapacitás	rövidzár	szakadás
induktivitás	szakadás	rövidzár

$u(t) = u_{\text{tranziens}}(t) + u_{\text{stacionárius}}(t)$

$i(t) = i_{\text{tranziens}}(t) + i_{\text{stacionárius}}(t)$,

ahol:

$u_{\text{tranziens}}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$i_{\text{tranziens}}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau = RC$

$\tau = \frac{L}{R}$

Úgy tekintjük, hogy az állandósult állapot 5τ idő alatt áll be. Ekkor a feszültség, vagy áram pillanatnyi értéke és az állandósult érték között 1%-nál kisebb az eltérés.

A be- vagy kikapcsolástól számítva τ idő alatt az átmeneti jelenséghez tartozó teljes változás 63%-a zajlik le.

Az egyszerű megoldás érdekében állítsuk elő a kapacitásra csatlakozó hálózat Thévenin helyettesítő generátorát!

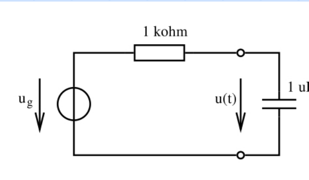
$R_g = 1k\Omega$

$u_g = i_g \cdot 1k\Omega = 10cos(\omega t)$

Az így módosított ekvivalens kapcsolás a 72. ábrán látható.

A kapacitás állandósult feszültsége a következő:

$$u_{Cst}(t) = u_g \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_g + \frac{1}{j\omega C}} = u_g \cdot \frac{1}{1 + j\omega C R_g}.$$



72. ábra.

$$u_{Cst}(t) = u_g \cdot \frac{1}{1 + j\omega C R_g} \cdot \frac{1 - j\omega C R_g}{1 - j\omega C R_g} = u_g \cdot \frac{1 - j\omega C R_g}{1 + \omega^2 C^2 R_g^2}.$$

$u_{Cst}(t) = u_g \cdot (0,1 \cdot 10^{-6} - j3,18 \cdot 10^{-3})$

$\hat{u}_{Cst} = \hat{u}_g \cdot \sqrt{0,1 \cdot 10^{-6^2} + 3,18 \cdot 10^{-3^2}} = \hat{u}_g \cdot 3,18 \cdot 10^{-3} = 31,8mV$

$\varphi_{u_{Cst(t)}} = 0 + arctg\left(\frac{-3,18 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 10^{-6}}\right) = -89,99°$

$u_{Cst}(t)$ a fentiek alapján:

$u_{Cst}(t) = 31,8 \cdot 10^{-3}cos(\omega t - 89,99°)$

$\tau = RC = 1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 1 \cdot 10^{-3}s = 1ms$

A tranziens összetevő:

$U_{Ctr}(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}}$.

A valós időfüggvény:

$u_C(t) = Me^{-\frac{t}{\tau}} + 31,8 \cdot 10^{-3}cos(\omega t - 89,99°)$.

M értéke az $u_C(t = 0)$ ismeretében meghatározható. Bekapcsoláskor a kapacitás rövidzár, így a $t = 0$ pillanatban feszültsége 0.

$u_C(t = 0) = 0 = Me^{-\frac{0}{\tau}} + 31,8 \cdot 10^{-3}cos(\omega \cdot 0 - 89,99°)$

$M = -5,55 \cdot 10^{-6}$

A teljes időfüggvény tehát:

$u_C(t) = -5,55 \cdot 10^{-6}e^{-\frac{t}{\tau}} + 31,8 \cdot 10^{-3}cos(\omega t - 89,99°)$.

A teljes átmeneti időszakban nem érdemes a kapacitás feszültségének időfüggvényét ábrázolni, ugyanis $\tau = 1ms$ és $T = 2\pi/\omega = 20\mu s$. Ez azt jelenti, hogy az átmeneti jelenség $(5\tau)/T = 250$ periódus alatt zajlik le. Ennyi periódust áttekinthetően nem lehet ábrázolni.