Információelmélet: Vizsga feladatsor

Név: .... Összpontszám: | | | |

Neptun kód: ....

(Elérhetőség:) ....

Kitöltési útmutató: A feladatok megoldásánál az üres téglalapokat kell kitölteni, illetve az ábrákat kell kiegészíteni. Az egyes feladatok kiírásában zárójelben szerepel, hogy hány pontot lehet kapni a jó válaszokért, és mennyi levonást a rosszakért; ahol nincs negatív érték feltüntetve, ott a pozitív érték felét lehet negatívban kapni a rossz válaszért. Ha valamelyik eredményt javítja, egyértelműen javítson. Ne használjon piros színű tollat!

- Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Ha egy állításról úgy véli, hogy igaz, írjon az állítás előtti négyzetbe egy I betűt, ha hamisnak gondolja, akkor egy H betűt írjon a négyzetbe. A helyes válaszra +2 pontot kap, a rosszra −1-et. Nem kell minden négyzetet kitöltenie.

☐ Egy csatorna megadható a bemeneti és kimeneti szimbólumkészletével és a csatornamátrixszal. A csatornamátrix elemei azok a $p(X_j|C_i)$ feltételes valószínűségek, amelyek minden i-re, illetve j-re megadják, hogy az i-edik bemeneti szimbólum (C_i) hatására mekkora valószínűséggel keletkezik a kimeneten a j-edik kimeneti szimbólum (X_j).

☐ A konvolúciós kódolók jellemzésére alkalmas állapotátmeneti gráfok csomópontjaiban a tárolók állapotai vannak, az élek pedig az állapotok közötti átmeneteket jelölik. Egy csomópontból mindig ugyanannyi él indul ki, mint ahány lehetséges bemeneti üzenetkeret van.

☐ A perfekt kódokra a gömbpakolási korlátban (Hamming-korlátban) az egyenlőség teljesül, azaz a perfekt kódok adott elemszámú kódábécé, üzenet- és kódszóhossz mellett a lehető legtöbb kódszót tartalmazzák.

☐ A forráskódok olyan $f : A \mapsto \mathcal{B}$ függvények, amelyek az A forrásábécé elemeihez a B kódábécé elemeiből álló, véges hosszúságú sorzatokat rendelnek hozzá.

☐ A Hamming-kódok legfeljebb két hibát képesek javítani és perfekt kódok.

☐ Lineáris blokk-kódok kódszavainak a szindrómája nulla.

☐ Egy csatornakódoló kódsebessége, ha blokk-kódolóról van szó, akkor a kódszóhosszának és a bemeneti blokkjai (üzenetek) hosszának hányadosa.

☐ Az entrópia nemnegatív függvény.

☐ A Shannon-féle forráskódolási tétel kimondja, hogy egy emlékezet nélküli, stacionáris A forráshoz lehet olyan forráskódot találni, melynek az átlagos kódszóhossza $H(A)/s$ és $(H(A)/s) + 1$ között van, ha $H(A)$ az A halmaz entrópiája, s pedig a kódábécé elemszáma.

☐ Az (n, k) paraméterű Reed–Solomon-kódok kódszavainak a spektrumában az első k elem 0.

☐ A Singleton-korlát szerint a k hosszúságú üzenetblokkokból n hosszúságú kódszavakat előállító csatornakódok $d_{\min}$ kódtávolságára igaz, hogy $d_{\min} \geq n - k + 1$.

☐ Egy p előfordulási valószínűségű esemény bekövetkezésekor nyert információ a Shannon-féle definíció szerint $-\log_2 p$.

☐ Az egyértelműen dekódolható kódok kódszóhossza tetszőlegesen kicsi lehet.

☐ A Reed–Solomon-kódok olyan maximális távolságú lineáris blokk-kódok, amelyeknek nincs generátorpolinomjuk, így nem ciklikus kódok.

☐ A csatornakódolási tétel szerint, ha a csatornakapacitás kisebb, mint a kódsebesség, akkor nem lehet olyan csatornakódolási eljárást találni, amelyre a hibás dekódolás valószínűsége tetszőlegesen kicsi.

☐ A prefix kódok kódszavai közül egyik sem a másik folytatása.

☐ A Huffman-kódolás egy-egy lépése során összevonjuk a két legnagyobb valószínűséggel előforduló szimbólumot egy-egy új, összetett szimbólummá.

☐ Ha egy Reed–Solomon-kódot a ϑ n-edrendű elem első n hatványával definiálunk, akkor egy $b(t)$ polinommal jellemezhető üzenethez olyan kódszóvektor fog tartozni, melynek az i-edik komponense $b(\vartheta^i)$.

☐ A Hamming-korlát úgy adódott, hogy megszámoltuk minden kódszónak a t sugarú környezetében található vektorok számát, és összehasonlítottuk a teljes tér elemszámával. A t mennyiség a javítandó hibák száma.

☐ A szisztematikus kódok $\mathbf{G}$ generátormátrixának utolsó $n - k$ sora egységmátrixot alkot.

☐ A forráskódoló eljárások az üzenet entrópiájának csökkentésére valók.

☐ Egy $f : A \mapsto \mathcal{B}$ kód átlagos kódszóhossza $\sum_{i=1}^{n} p_i \ell_i$, ahol n a *kód*ábécé elemeinek a száma, p_i az i-edik szimbólumának előfordulási valószínűsége, ℓ_i pedig az ehhez a szimbólumhoz rendelt kódszó hossza.

☐ A szisztematikus kódok $\mathbf{H}^T$ paritásellenőrző mátrixának első k oszlopa olyan $k \times k$-s mátrixot alkot, melynek csak a főátlójában vannak 1-esek, az összes többi eleme 0.

☐ Az egymást követő szimbólumoknak egy emlékezet nélküli csatornán való áthaladása mind egymástól független esemény.

☐ Ha egy (n, k) paraméterű ciklikus kód generátorpolinomja $g(t)$ és az i-edik kódszavához rendelt polinom $c_i(t)$, akkor igaz, hogy $c_i(t) = \alpha_i(t) + g(t)$, ahol $\alpha_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i0} \cdot t + ... + \alpha_{i\,k-1} \cdot t^{k-1}$ az i-edik üzenethez rendelt polinom.

☐ Egy csatorna csatornakapacitása, $\mathcal{C} = \max I(C \cdot X)$, ahol a csatornán átvitt információ $I(C \cdot X) = H(C) - H(C|X)$, a csatornára adott információ várhatóértékének és a csatorna veszteségének a különbsége. C a csatrona bemeneti, X pedig a kimeneti szimbólumkészlete.

- Készítse el annak a $GF(5)$ véges test feletti, (6,4) paraméterű szisztematikus nembináris Hamming-kód generátormátrixát, melynek a paritásmátrixát alább láthatja. (+4 pontról indul, hibánként −1 pont, de legalább −2 pont.)

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} =$$

Az 1033 tömörített üzenetből keletkezett kódszó (2 p.):

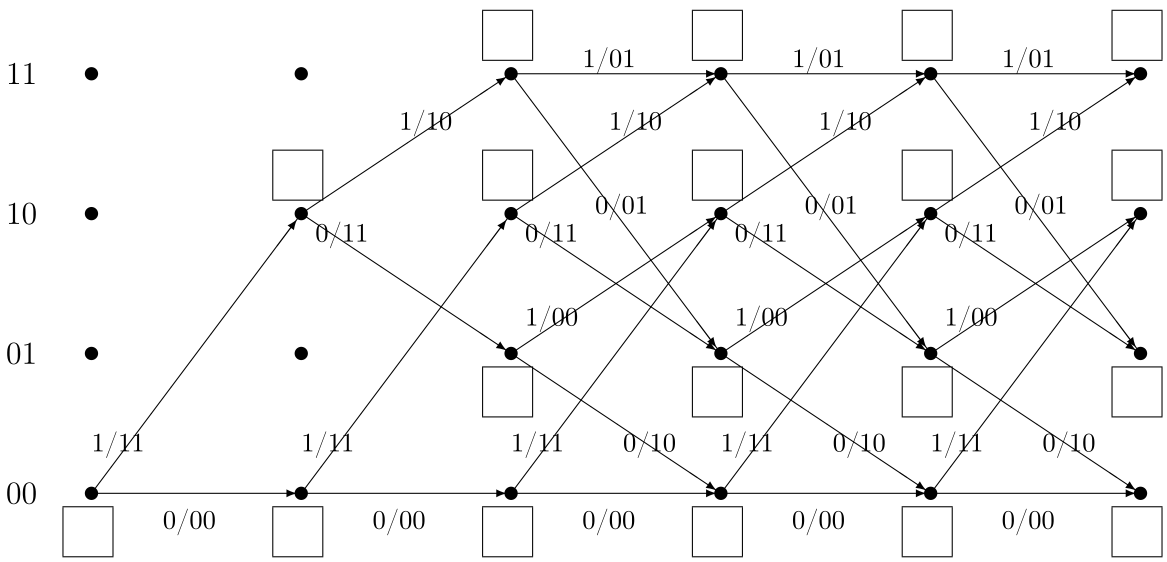
A 401213 vett szimbólumsorozat szindrómája (2 p.):

A 401213 vett szimbólumsorozat hibájának a nagysága (2 p.):

A 401213 vett szimbólumsorozat hibájának a helye a következő pozíció (2 p.): .

A 401213 vett szimbólumsorozat a következő, nem csatornakódolt üzenetből keletkezhetett (2 p.): .

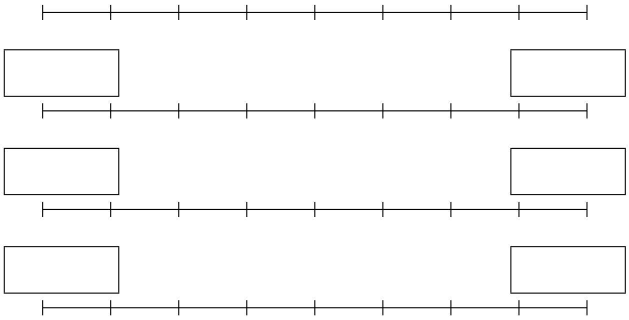
- Dekódolja az alábbi trellisszel rendelkező konvolúciós kódolón keletkezett, majd a csatornán elromlott bitsorozatot Viterbi-algoritmussal. A vett bitsorozat 10 11 10 01 00. A trellis élein az adott átmenetkor keletkezett bemeneti bitek/kimeneti bitpárosok láthatók. Tüntesse fel a trellis csomópontjaihoz tartozó összsúlyokat, jelölje a hozzájuk vezető túlélő útvonalat. Vastagítsa meg a trellisen a legkisebb összsúlyú túlélő útvonalat (max. 10 pont, minden rossz élért vagy súlyért −1 pont, legalább −5 pont. Ha hibásan számol összsúlyokat, de az alapján jó az útvonal, csak a súlyhibánként kap −1 pontot).



A Viterbi algoritmussal dekódolt üzenet (2 pont):

- Legyen a „B”, „C”, „D” és „E” szimbólumok előfordulási valószínűsége $p_B = 2/8$, $p_C = 1/8$, $p_D = 3/8$ és $p_E = 1/4$. Kódoljuk az „D E C” blokkot aritmetikai kóddal úgy, hogy az első lépésben az egyes szimbólumokhoz rendelt részintervallum hossza azonos legyen a szimbólum előfordulási valószínűségével. Legyen az intervallumok sorrendje azonos a feladat első sorában a felsorolás sorrendjével, azaz az első intervallum tartozzon a „B” szimbólumhoz, a második a „C”-hoz, a harmadik a „D”-hez, a negyedik pedig az „E”-hez.

$\square$ A forrásábécé entrópiája 1,906. (+2 vagy −1 pont)



Az első szakaszon tüntesse fel az osztáspontokat egy-egy ponttal (2 pont). A többin a kis téglalpokban tüntesse fel az aktuális részintervallum kezdő és végpontját, az utolsó szakaszon a végső intervallumot (2 pont minden helyes értékpárért, 0 az egy helyes értékért −1 a rossz válaszért).

A kapott kódszó (+2 vagy −1 pont): $\square$

- Egy $GF(7)$ véges számtest feletti, hatelemű kódszavakat készítő ciklikus kód generátorpolinomja $g(t) = t^2 + 6t + 1$. Számolja ki a $h(t)$ paritásellenőrző polinomot. Húzza át a polinomok felesleges tagjait, ha vannak. (2 pont az osztandó polinomért, 8 pont az osztásért, ebből indulva hibánként −1 pont, de legalább −1, illetve −4 pont.)

$$\square t^8 + \square t^7 + \square t^6 + \square t^5 + \square t^4 + \square t^3 + \square t^2 + \square t^1 + \square t^0 = (t^2+6t+1) \cdot \Big(\square t^6 + \square t^5 + \\ + \square t^4 + \square t^3 + \square t^2 + \square t^1 + \square t^0\Big)$$