Információelmélet: Vizsga feladatsor

Név: ....
Neptun kód: ....
(Elérhetőség:) ....

Összpontszám: | | | |

Kitöltési útmutató: A feladatok megoldásánál az üres téglalapokat kell kitölteni, illetve az ábrákat kell kiegészíteni. Az egyes feladatok kiírásában zárójelben szerepel, hogy hány pontot lehet kapni a jó válaszokért, és mennyi levonást a rosszakért; ahol nincs negatív érték feltüntetve, ott a pozitív érték felét lehet negatívban kapni a rossz válaszért. Ha valamelyik eredményt javítja, egyértelműen javítson. Ne használjon piros színű tollat!

- Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Ha egy állításról úgy véli, hogy igaz, írjon az állítás előtti négyzetbe egy I betűt, ha hamisnak gondolja, akkor egy H betűt írjon a négyzetbe. A helyes válaszra +2 pontot kap, a rosszra −1-et. Nem kell minden négyzetet kitöltenie.

☐ Egy vektor szindrómája a $\mathbf{H}^T$ paritásellenőrző mátrixszal vett szorzata.

☐ Egy emlékezet nélküli, diszkrét, időinvariáns csatorna jól jellemezhető a csatornamátrixával, melynek elemei megadják, hogy a különböző bemeneteket feltételezve milyen valószínűséggel fordulnak elő az egyes kimenetek. A teljes jellemzéshez szükséges a be- és kimeneti szimbólumkészlet ismerete is.

☐ A Singleton-korlát szerint minden lineáris blokk-kód $d_{\min}$ kódtávolságára igaz, hogy $d_{\min} = n - k + 1$, ahol n a kódszavak hossza, k pedig az üzenetblokkok hossza.

☐ Az aritmetikai kódok az üzenet azonos hosszúságú blokkjaioz rendelnek egy-egy bináris törtszámot, méghozzá úgy, hogy a nagyobb összvalószínűségű blokkokhoz több számjegyből álló tört, azaz hosszabb kódszó tartozzon.

☐ Egy $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ halmaz információtartalma a Shannon-féle információdefiníció a $H(A) = -\sum_{i=1}^{n} p_i log_2 p_i$, ahol p_i az A_i halmazelem előfordulási valószínűsége.

☐ A konvolúciós kódolók jellemzésére alkalmas állapotátmeneti gráfok csomópontjaiban a tárolók állapotai vannak, az élek pedig az állapotok közötti átmeneteket jelölik. Egy csomópontból mindig *kétszerannyi* él indul ki, mint ahány lehetséges bemeneti üzenetkeret van.

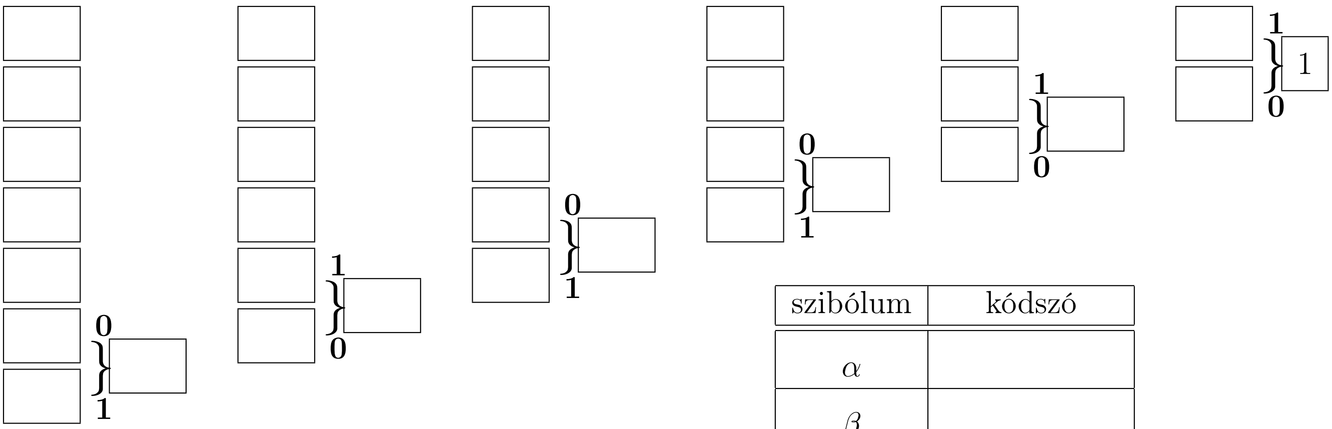
☐ A szisztematikus kódok $\mathbf{H}^T$ paritásellenőrző mátrixának *utolsó* $n-k$ *sora egységmátrixot alkot.*

☐ Shannon forráskódolási tétele szerint egy emlékezet nélküli, stacionáris A forráshoz lehet olyan s elemű kódábécével dolgozó forráskódot találni, melynek az átlagos kódszóhossza $H(A)/(\log_2 s)$ és $H(A)/(\log_2 s) + 1$ között van, ha $H(A)$ az A halmaz entrópiája.

☐ Egy $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ vektor $w(\mathbf{v})$ súlya azon v_i komponenseinek száma, amelyek nem nullák.

- [ ] Egy csatorna csatornakapacitása a $\max I(C \cdot X)$ együttes információ, ahol C a csatorna bemeneti, X pedig a kimeneti szimbólumkészlete.
- [ ] A Viterbi-féle dekódoló algoritmusnál a túlélő útvonal az lesz, amelynek a vett bitsorozattól mért Hamming-távolsága *minimális*.
- [ ] A csatornakódolási tétel szerint, ha a csatornakapacitásnál *kisebb* kódsebességgel szeretnénk jeleket továbbítani a csatornán, akkor a kapott bitsorozat dekódolása során fellépő hibák száma tetszőlegesen kicsivé csökkenthető.
- [ ] Az (n, k) paraméterű Reed–Solomon-kódok kódszavainak a spektrumában az első $n - k$ elem 0.
- [ ] Egy p előfordulási valószínűségű esemény bekövetkezésének információtartalma $I(p) = -\log_2 p$.
- [ ] Egy olyan forráskódoló eljárásnak, amely az i-edik kódolandó szimbólumhoz ℓ_i hosszúságú kódszót rendel az átlagos kódszóhossza $L = \sum_i p_i \ell_i$, ahol p_i az i-edik szimbólum előfordulási valószínűsége.
- [ ] Egy csatornakódoló kódsebessége, ha blokk-kódolóról van szó, akkor a kódszóhosszának és a bemeneti blokkjai hosszának *szorzata*.
- [ ] Ha egy (n, k) paraméterű ciklikus kód $n - k$-adfokú generátorpolinomja $g(t)$ és az i-edik kódszavához rendelt polinom $c_i(t)$, akkor igaz, hogy $c_i(t) = \alpha_i(t) \cdot g(t)$, ahol $\alpha_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i0} \cdot t + ... + \alpha_{i\,k-1} \cdot t^{k-1}$ az i-edik üzenethez rendelt polinom.
- [ ] A $d_{\min}$ kódtávolságú csatornakódok kevesebb, mint $d_{\min}$ egyszerű hibát tudnak kijavítani.
- [ ] Ha egy $\mathbf{v}$ vektor úgy keletkezett, hogy egy lineáris blokk-kódoló kódszava a csatornán való átmenet közben torzult, akkor a szindrómája *soha nem lehet nulla.*
- [ ] A Hamming-kódok olyan perfekt kódok, amelyek *legfeljebb egyetlen* hibát képesek javítani.
- [ ] Az entrópia az információ várhatóértéke.
- [ ] Az aritmetikai kódok olyan forráskódolási eljárások során jönnek létre, amelyek az üzenet azonos hosszúságú blokkjait különböző szóhosszúságú kódszavakba transzformálják.
- [ ] Egy n elemű kódszavakat generáló ciklikus kód generátorpolinomja osztója a $t^n - 1$ polinomnak.
- [ ] Mind a forráskódoló, mind pedig a csatornakódoló eljárások során arra törekedünk, hogy a *lehető legnagyobb* legyen az üzenet egy szimbólumra jutó entrópiája.

- Az $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \vartheta\}$ forrásábécé elemeinek előfordulási valószínűségei $p_\alpha = 0,32$; $p_\beta = 0,18$; $p_\gamma = 0,13$; $p_\delta = 0,08$; $p_\varepsilon = 0,05$; $p_\eta = 0,04$ és $p_\theta = 0,20$. Töltse ki a szimbólumösszevonásra szolgáló ábra üres téglalapjait. Az oszlopokban szerepeljenek az elemek csökkenő sorrendben. (5 p)



Adja meg a kapott Huffmann-kód kódszavait tartalmazó táblázatot (7 p):

szibólum	kódszó
α	
β	
γ	
δ	
ε	
η	
ϑ	

☐ A forrásábécé, mint halmaz entrópiája 2,51 (2 p).

☐ Azt átlagos kódszóhossz 2.10 (2 p).

- A $GF(11)$ véges számtestnek a 7 tizedrendű eleme. Adjuk meg a $\vartheta = 7$ $GF(11)$-beli hatványait tartalmazó táblázatot. (4 p):

ϑ	ϑ^2	ϑ^3	ϑ^4	ϑ^5	ϑ^6	ϑ^7	ϑ^8	ϑ^9	ϑ^{10}
7		2	3			6			

Adja meg a $b(t) = 6 + 8t + t^5$ üzenetpolinomból a $\vartheta = 2$ generálóelemmel definiált Reed–Solomon-kód $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10})$ kódszóvektorának hiányzó elemeit (8 p):

$\mathbf{c} = ($

4	6			9			9	2	3

$)$

- Készítse el annak a $GF(7)$ véges test feletti, (8,6) paraméterű szisztematikus nembináris Hamming-kódnak generátormátrixát, melynek a paritásmátrixát alább láthatja. (4 pont)

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} =$$

A $\mathbf{b} = (460021)$ tömörített üzenetből keletkezett kódszó (2 p.):

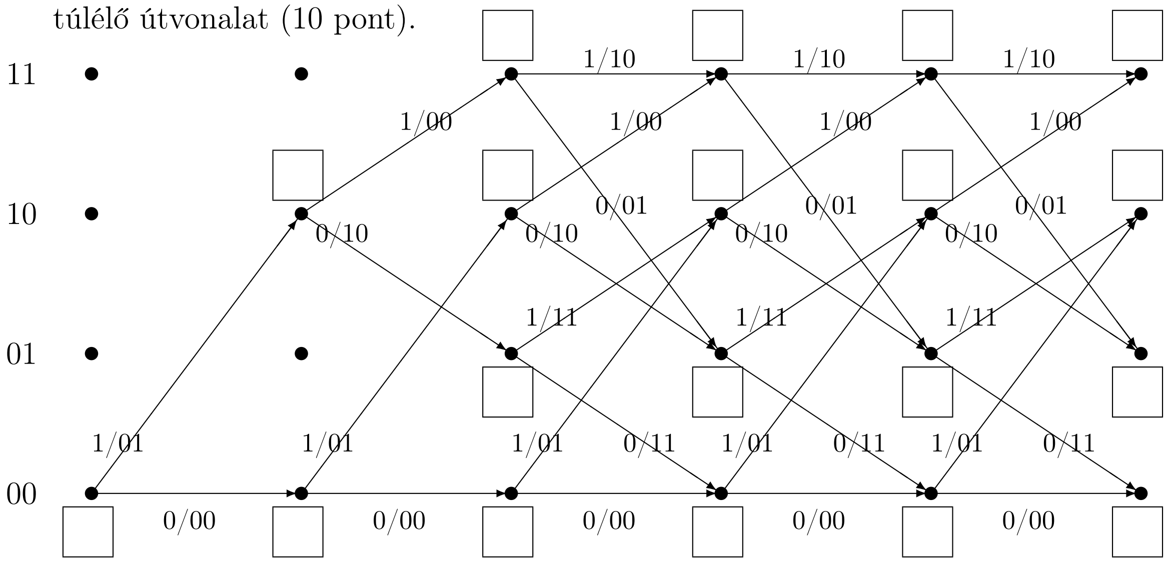
A $\mathbf{v} = (60400523)$ vett szimbólumsorozat szindrómája (2 p.):

A $\mathbf{v} = (60400523)$ vett szimbólumsorozat hibájának a nagysága (2 p.):

A $\mathbf{v} = (60400523)$ vett szimbólumsorozat hibájának a helye a következő pozíció (2 p.): .

A $\mathbf{v} = (60400523)$ vett szimbólumsorozat a következő, nem csatornakódolt üzenetből keletkezhetett (2 p.): .

- Dekódolja az alábbi trellisszel rendelkező konvolúciós kódolón keletkezett, majd a csatornán elromlott bitsorozatot Viterbi-algoritmussal. A vett bitsorozat 00 00 10 11 10. A trellis élein az adott átmenetkor keletkezett bemeneti bitek/kimeneti bitpárosok láthatók. Tüntesse fel a trellis csomópontjaihoz tartozó összsúlyokat, jelölje a hozzájuk vezető túlélő útvonalat. Vastagítsa meg a trellisen a legkisebb összsúlyú túlélő útvonalat (10 pont).



A Viterbi algoritmussal dekódolt üzenet (2 pont):