

## Információelmélet: Vizsgadolgozat

Név: .....

Összpontszám: 

--	--	--

Neptun kód: .....

Aláírás: .....

**Kitöltési útmutató:** A feladatok megoldásánál az üres téglalapokat kell kitölteni, illetve az ábrákat kell kiegészíteni. Az egyes feladatok kiírásában zárójelben szerepel, hogy hány pontot lehet kapni a jó válaszokért, és mennyi levonást a rosszakért; ahol nincs negatív érték feltüntetve, ott a pozitív érték felét lehet negatívban kapni a rossz válaszáért. Ha valamelyik eredményt javítja, egyértelműen javítson.

- Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Ha egy állításról úgy véli, hogy igaz, írjon az állítás előtti négyzetbe egy I betűt, ha hamisnak gondolja, akkor egy H betűt írjon a négyzetbe. A helyes válaszra +2 pontot kap, a rosszra -1-et. Nem kell minden négyzetet kitöltenie.

**H** A csatornakódolási tétel egy a csatornakapacitástól és a javítás során megengedett hibás dekódolások számától függő felső korlátot mond a jelsebességre, ezenkívül megadja a lehetséges hatékony csatornakódolási eljárásokat.

**I** A Shannon-féle első tétel egyik fele szerint  $L(A) \geq \frac{H(A)}{\log_2 s}$ , azaz az  $A$  halmazzal jellemzett forráshoz rendelt kód átlagos kódszóhossza nem lehet kisebb, mint egy a forrás entrópiájával arányos szám.

**I** A GIF képkódolási eljárás olyan képek esetén igazán hatékony, amelyek kevés színt használnak és nagy felületeken tartalmazznak azonos színeket.

**I** Egy olyan forráskódoló eljárásnak, amely az  $i$ -edik kódolandó szimbólumhoz  $\ell_i$  hosszúságú kódszót rendel az átlagos kódszóhossza  $L = \sum_i p_i \ell_i$ , ahol  $p_i$  az  $i$ -edik szimbólum előfordulási valószínűsége.

**I** Egy csatorna csatornakapacitása,  $C = \max I(C \cdot X)$ , ahol a csatornán átvitt információ  $I(C \cdot X) = H(C) - H(C|X)$ , a csatornára adott információ várhatóértékének és a csatorna veszteségének a különbsége.  $C$  a csatorna bemeneti,  $X$  pedig a kimeneti szimbólumkészlete.

**H** A zajmentes csatornákon egy bemeneti szimbólum csak egyféle kimeneti szimbólumot hozhat létre.

**I** Ha egy  $\mathbf{v}$  vektor úgy keletkezett, hogy egy lineáris blokk-kódoló kódszava a csatornán való átmenet közben torzult, akkor a szindrómája csak akkor lehet nulla, ha egy másik érvényes kódszóba transzformálódott.

**I** Az MPEG mozgóképtömörítő eljárás képcsoportjaiból az I típusú képek dekódolásához nem szükséges más képekből származó adat.

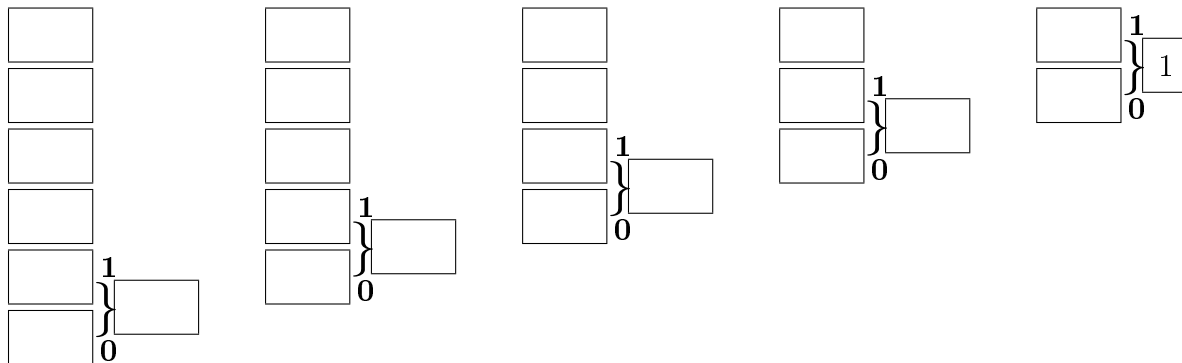
**H** Egy  $p$  előfordulási valószínűségű esemény bekövetkezésekor nyert információ a Shannon-féle definíció szerint  $\log_2 p$ .

**H** Shannon forráskódolásról szóló tétel szerint egy emlékezet nélküli stacionárius forráshoz rendelhető kód kódszavainak átlagos hosszának minimuma arányos a forrásbécé entrópiájával, de ennél az elméleti minimumnál csak eggyel nagyobb átlagos kódszóhosszú kódot tudtak eddig előállítani, annál rövidebbet nem.

- I** Egy konvolúciós kód trellisében az azonos mélységi csomópontok – a pontoszlopok – a kódoló egy lépése után létrejönni képes állapotokat jelölik, két mélységi csomópont közötti él pedig az állapotátmeneteket. Az élek mindig két szomszédos mélységi szintű – szomszéd oszlopbeli – állapotot kötnek össze.
- H** Lineáris blokk-kódok esetén a generátormátrix és a paritásellenőrző mátrix szorzata egységmátrix.
- H** Mind a forráskódoló, mind pedig a csatornakódoló eljárások során nő az üzenet egy szimbólumra jutó entrópiája.
- H** Egy *lineáris blokk-kódoló*, mint csatornakódoló kódsebessége a kódszóhosszának és a bemeneti blokkjai hosszának szorzata.
- I** Az  $(n, k)$  paraméterű Reed–Solomon-kódok kódszavainak a spektrumában az első  $n - k$  elem 0.
- H** A Hamming-kódok legfeljebb két hibát képesek javítani és perfekt kódok.
- I** Egy  $f : A \mapsto B$  kód akkor és csak akkor egyértelműen dekódolható, ha a neki megfeleltetett  $F : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$  kód invertálható, ha  $A$  a forrásábécé,  $\mathcal{A}$  az elemeiből képezett tetszőleges hosszúságú szimbólumsorozatok halmaza,  $B$  pedig a kódábécé elemeiből képezett tetszőleges hosszúságú sorozatok halmaza.
- I** Kvantálás során a folytonos számokból álló, mintavételezett  $f(t_0), f(t_0 + T), f(t_0 + 2T), \dots$  sorozat elemeit képezzük le egy véges sok elemből álló halmazra.
- I** Az aritmetikai kódolás során egy  $[0, 1)$  intervallumot osztunk fel annyi darabra, ahány elemű a forrásábécénk.
- H** Egy  $(n, k)$  paraméterű blokk-kód generátormátrixa  $n \cdot (n - k)$  elemű.
- I** A ciklikus kódok generátormátrixa a generátorpolinomhoz tartozó  $n$  elemű vektor ciklikus eltoltjaiból áll, ha  $n$  a kódszóhossz.
- H** Ha egy  $(n, k)$  paraméterű ciklikus kód generátorpolinomja  $g(t)$  és az  $i$ -edik kódszavához rendelt polinom  $c_i(t)$ , akkor igaz, hogy  $c_i(t) = \alpha_i(t) + g(t)$ , ahol  $\alpha_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i0} \cdot t + \dots + \alpha_{i, k-1} \cdot t^{k-1}$  az  $i$ -edik üzenethez rendelt polinom.
- H** Az aritmetikai kódok az üzenet azonos hosszúságú blokkjaihoz rendelnek egy-egy bináris törtszámot, méghozzá úgy, hogy a nagyobb összvalószínűségű blokkokhoz több számjegyből álló tört tartozzon.
- I** A prefix kódok kódszavai közül egyik sem a másik folytatása.
- I** Ha egy Reed–Solomon-kódot a  $\vartheta$   $n$ -edrendű elem első  $n$  hatványával definiálunk, akkor egy  $b(t)$  polinommal jellemezhető üzenetnek olyan kódszóvektor fog tartozni, melynek az  $i$ -edik komponense  $b(\vartheta^i)$ .

- Legyen az „E”, „A”, „O”, „Y”, „I” és „U” szimbólumok előfordulási valószínűsége rendre 0,16; 0,41; 0,10; 0,05; 0,19 és 0,09. Töltse ki a szimbólumösszevonásra szolgáló ábra üres téglalapjait a megfelelő valószínűségekkel. Az oszlopokban szerepeljenek az elemek csökkenő sorrendben. (8 pont, hibánként -1 pont.)

Rendeljünk minden szimbólumösszevonáskor a felső elemhez 1-es bitet, ahogy az ábra mutatja. Adja meg a kódszavakat tartalmazó táblázat hiányzó elemeit (Kódszavanként +2 vagy -1 pont).



szimbólum	kódszó
A	
E	110
O	100
Y	
I	111
U	

- A  $GF(2)$  véges számtest felett a  $g(t) = t^3 + t + 1$  irreducibilis osztója a  $t^7 - 1$  polinomnak. Adja meg annak a ciklikus kódnak a (nem szisztematikus) generátormátrixát, amelynek  $g(t)$  a generátorpolinomja. (+6 pontról indulva minden hibás elemért -1 pont, legalább -3.)

$$G = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

**H** A kódoló kételemű vektorokat kódol  $7 - 1 = 6$  komponensűekbe.

- Készítse el egy (7,4) paraméterű szisztematikus bináris Hamming-kód paritásmátrixát. Szerepeljenek benne a szabad elemek az első sortól kezdve csökkenő sorrendben. (+4 ponttól indul a pontozás, minden hibás sorért -1 pont. Ez azt jelenti, hogy egy sorcsere -2 pont.) Készítse el a generátermátrixot (pontozás ugyanúgy, mint a paritásellenőrző mátrixnál, csak oszloponként).

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

A 0111 tömörített üzenetből keletkezett kódszó (+2 vagy -1 pont):

Ha valóban csak egy hiba keletkezett a csatornán való áthaladás során, akkor az 1100110 vett szimbólumsorozatban a következő helyen van a hiba (+2 vagy -1 pont):

Az 1100110 vett szimbólumsorozat a következő, nem csatornakódolt üzenetből keletkezhetett (+2 vagy -1 pont):

- Dekódolja az alábbi trellisszel rendelkező konvolúciós kódolón keletkezett, majd a csatornán elromlott bitsorozatot Viterbi-algoritmussal. A vett bitsorozat 00 10 01 10 00 01. A trellis élein az adott átmenetkor keletkezett bemeneti bitek/kimeneti bitpárosok láthatók. Vastagítsa meg a trellisen a legkisebb összsúlyú túlélő útvonalat (max. 8 pont, hibás végső állapotért -2 pont, minden rossz élért -2 pont, legalább -4 pont. Ha hibásan számol összsúlyokat, de az alapján jó az útvonal, csak a súlyhibánként kap -1 pontot.).

A Viterbi algoritmussal dekódolt üzenet (max. 4 pont, minden rossz bitért -1 pont, de legalább -2 pont):

