

Információelmélet: Vizsga feladatsor

Név:

Összpontszám:

--	--	--

Neptun kód:

Aláírás:

Kitöltési útmutató: A feladatok megoldásánál az üres téglalapokat kell kitölteni, illetve az ábrákat kell kiegészíteni. Az egyes feladatok kiírásában zárójelben szerepel, hogy hány pontot lehet kapni a jó válaszokért, és mennyi levonást a rosszakért; ahol nincs negatív érték feltüntetve, ott a pozitív érték felét lehet negatívban kapni a rossz válaszáért. Ha valamelyik eredményt javítja, egyértelműen javítson. Ne használjon piros színű tollat!

- Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Ha egy állításról úgy véli, hogy igaz, írjon az állítás előtti négyzetbe egy I betűt, ha hamisnak gondolja, akkor egy H betűt írjon a négyzetbe. A helyes válaszra +2 pontot kap, a rosszra -1-et. Nem kell minden négyzetet kitöltenie.

A szisztematikus kódok \mathbf{G} generátormátrixának utolsó $n - k$ sora egységmátrixot alkot.

A prefix kódok kódszavai közül egyik sem a másik folytatása.

Ha egy Reed–Solomon-kódot a ϑ n -edrendű elem első n hatványával definiálunk, akkor egy $b(t)$ polinommal jellemezhető üzenethez olyan kódszóvektor fog tartozni, melynek az i -edik komponense $b(\vartheta^i)$.

A forráskódok olyan $f : A \mapsto \mathcal{B}$ függvények, amelyek az A forrásábécé elemeihez a B kódábécé elemeiből álló, véges hosszúságú sorzatokat rendelnek hozzá.

A Hamming-kódok legfeljebb két hibát képesek javítani és perfekt kódok.

Lineáris blokk-kódok kódszavainak a szindrómája nulla.

Egy csatorna csatornkapacitása, $\mathcal{C} = \max I(C \cdot X)$, ahol a csatornán átvitt információ $I(C \cdot X) = H(C) - H(C|X)$, a csatornára adott információ várhatóértékének és a csatorna veszteségének a különbsége. C a csatorna bemeneti, X pedig a kimeneti szimbólumkészlete.

Az entrópia nemnegatív függvény.

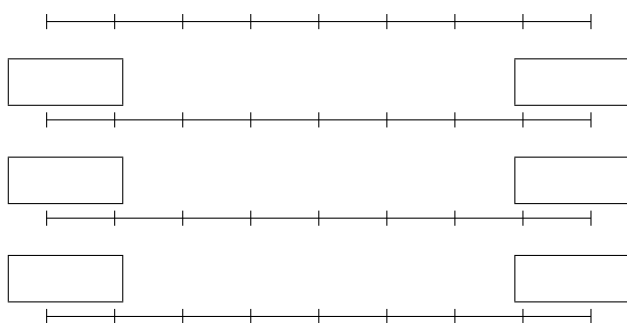
A Shannon-féle forráskódolási tétel kimondja, hogy egy emlékezet nélküli, stationáris A forráshoz lehet olyan forráskódot találni, melynek az átlagos kódszóhossza $H(A)/s$ és $(H(A)/s) + 1$ között van, ha $H(A)$ az A halmaz entrópiája, s pedig a kódábécé elemszáma.

A perfekt kódokra a gömbpakolási korlátban (Hamming-korlátban) az egyenlőség teljesül, azaz a perfekt kódok adott elemszámú kódábécé, üzenet- és kódszóhossz mellett a lehető legtöbb kódszót tartalmazzák.

- Ha egy (n, k) paraméterű ciklikus kód generátorpolinomja $g(t)$ és az i -edik kódzavához rendelt polinom $c_i(t)$, akkor igaz, hogy $c_i(t) = \alpha_i(t) + g(t)$, ahol $\alpha_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i0} \cdot t + \dots + \alpha_{i, k-1} \cdot t^{k-1}$ az i -edik üzenethez rendelt polinom.
- Egy p előfordulási valószínűségű esemény bekövetkezésekor nyert információ a Shannon-féle definíció szerint $-\log_2 p$.
- Az egyértelműen dekódolható kódok kódszóhossza tetszőlegesen kicsi lehet.
- A konvolúciós kódolók jellemzésére alkalmas állapotátmeneti gráfok csomópontjaiban a tárolók állapotai vannak, az élek pedig az állapotok közötti átmeneteket jelölik. Egy csomópontból mindig ugyanannyi él indul ki, mint ahány lehetséges bemeneti üzenetkeret van.
- A csatornakódolási tétel szerint, ha a csatornakapacitás kisebb, mint a kódsebesség, akkor nem lehet olyan csatornakódolási eljárást találni, amelyre a hibás dekódolás valószínűsége tetszőlegesen kicsi.
- Egy csatornakódoló kódsebessége, ha blokk-kódolóról van szó, akkor a kódszóhosszának és a bemeneti blokkjai (üzenetek) hosszának hányadosa.
- A Huffman-kódolás egy-egy lépése során összevonjuk a két legnagyobb valószínűséggel előforduló szimbólumot egy-egy új, összetett szimbólummá.
- A Singleton-korlát szerint a k hosszúságú üzenetblokkokból n hosszúságú kódzavakat előállító csatornakódok d_{\min} kódtávolságára igaz, hogy $d_{\min} \geq n - k + 1$.
- A Hamming-korlát úgy adódott, hogy megszámláltuk minden kódszónak a t sugarú környezetében található vektorok számát, és összehasonlítottuk a teljes tér elemszámával. A t mennyiség a javítandó hibák száma.
- Az (n, k) paraméterű Reed–Solomon-kódok kódzavainak a spektrumában az első k elem 0.
- A forráskódoló eljárások az üzenet entrópiájának csökkentésére valók.
- Egy $f : A \mapsto B$ kód átlagos kódszóhossza $\sum_{i=1}^n p_i \ell_i$, ahol n a kódábécé elemeinek a száma, p_i az i -edik szimbólumának előfordulási valószínűsége, ℓ_i pedig az ehhez a szimbólumhoz rendelt kódszó hossza.
- A szisztematikus kódok \mathbf{H}^T paritásellenőrző mátrixának első k oszlopa olyan $k \times k$ -s mátrixot alkot, melynek csak a főátlójában vannak 1-esek, az összes többi eleme 0.
- Az egymást követő szimbólumoknak egy emlékezet nélküli csatornán való áthaladása mind egymástól független esemény.
- A Reed–Solomon-kódok olyan maximális távolságú lineáris blokk-kódok, amelyeknek nincs generátorpolinomjuk, így nem ciklikus kódok.
- Egy csatorna megadható a bemeneti és kimeneti szimbólumkészletével és a csatornamátrixszal. A csatornamátrix elemei azok a $p(X_j|C_i)$ feltételes valószínűségek, amelyek minden i -re, illetve j -re megadják, hogy az i -edik bemeneti szimbólum (C_i) hatására mekkora valószínűséggel keletkezik a kimeneten a j -edik kimeneti szimbólum (X_j).

- Legyen a „J”, „K”, „L” és „M” szimbólumok előfordulási valószínűsége $p_J = 2/8$, $p_K = 1/8$, $p_L = 3/8$ és $p_M = 1/4$. Kódoljuk az „L M K” blokkot aritmetikai kóddal úgy, hogy az első lépésben az egyes szimbólumokhoz rendelt részintervallum hossza azonos legyen a szimbólum előfordulási valószínűségével. Legyen az intervallumok sorrendje azonos a feladat első sorában a felsorolás sorrendjével, azaz az első intervallum tartozzon az „J” szimbólumhoz, a második a „K”-hoz, a harmadik az „L”-hez, a negyedik pedig az „M”-hez.

A forrásábécé entrópiája 1,906. (+2 vagy -1 pont)



Az első szakaszon tüntesse fel az osztáspontokat egy-egy ponttal (2 pont). A többin a kis téglalpokban tüntesse fel az aktuális részintervallum kezdő és végpontját, az utolsó szakaszon a végső intervallumot (2 pont minden helyes értékpárért, 0 az egy helyes értékért -1 a rossz választért).

A kapott kódszó (+2 vagy -1 pont):

- Egy $GF(7)$ véges számtest feletti, hatelemű kódszavakat készítő ciklikus kód generátorpolinomja $g(t) = t^2 + 6t + 1$. Számolja ki a $h(t)$ paritásellenőrző polinomot. Húzza át a polinomok felesleges tagjait, ha vannak. (2 pont az osztandó polinomért, 8 pont az osztásért, ebből indulva hibánként -1 pont, de legalább -1, illetve -4 pont.)

$$\begin{aligned} \square t^8 + \square t^7 + \square t^6 + \square t^5 + \square t^4 + \square t^3 + \square t^2 + \square t^1 + \square t^0 = (t^2 + 6t + 1) \cdot (\square t^6 + \square t^5 + \\ + \square t^4 + \square t^3 + \square t^2 + \square t^1 + \square t^0) \end{aligned}$$

- Készítse el annak a $GF(5)$ véges test feletti, $(6,4)$ paraméterű szisztematikus nem-bináris Hamming-kód generátormátrixát, melynek a paritásmátrixát alább láthatja. (+4 pontról indul, hibáncént -1 pont, de legalább -2 pont.)

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Az 1033 tömörített üzenetből keletkezett kódszó (2 p.):

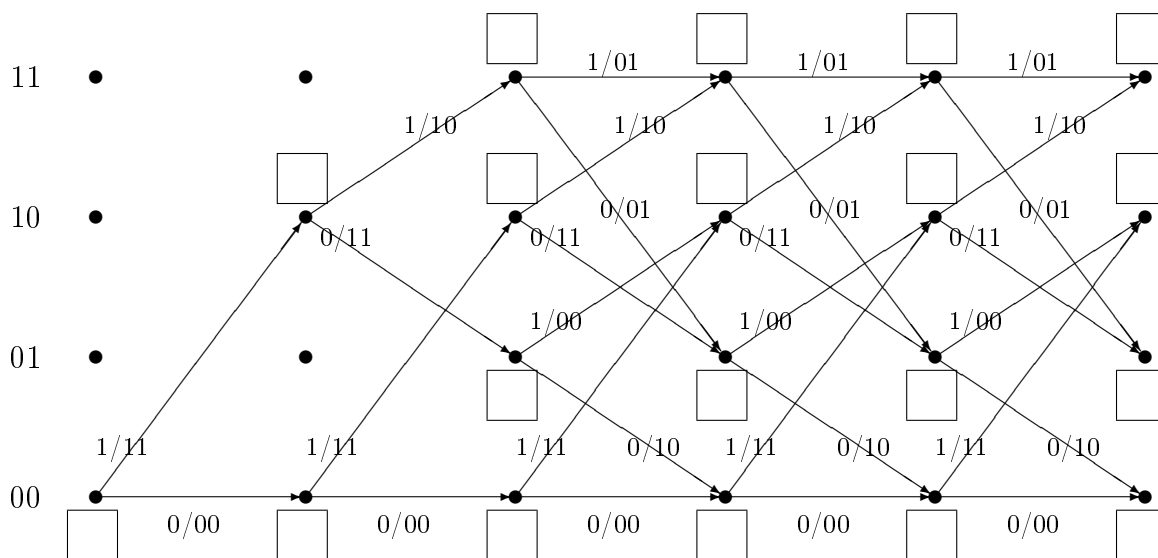
A 401213 vett szimbólumsorozat szindrómája (2 p.):

A 401213 vett szimbólumsorozat hibájának a nagysága (2 p.):

A 401213 vett szimbólumsorozat hibájának a helye a következő pozíció (2 p.):

A 401213 vett szimbólumsorozat a következő, nem csatornakódolt üzenetből keletkezhetett (2 p.):

- Dekódolja az alábbi trellisszel rendelkező konvolúciós kódolón keletkezett, majd a csatornán elromlott bitsorozatot Viterbi-algoritmussal. A vett bitsorozat 10 11 10 01 00. A trellis élein az adott átmenetkor keletkezett bemeneti bitek/kimeneti bitpárosok láthatók. Tüntesse fel a trellis csomópontjaihoz tartozó összsúlyokat, jelölje a hozzájuk vezető túlélő útvonalat. Vastagítsa meg a trellisen a legkisebb összsúlyú túlélő útvonalat (max. 10 pont, minden rossz élért vagy súlyért -1 pont, legalább -5 pont. Ha hibásan számol összsúlyokat, de az alapján jó az útvonal, csak a súlyhibáncént kap -1 pontot).



A Viterbi algoritmussal dekódolt üzenet (2 pont):