

Információelmélet: Vizsga feladatsor

Név:

Összpontszám:

--	--	--

Neptun kód:

Aláírás:

Kitöltési útmutató: A feladatok megoldásánál az üres téglalapokat kell kitölteni, illetve az ábrákat kell kiegészíteni. Az egyes feladatok kiírásában zárójelben szerepel, hogy hány pontot lehet kapni a jó válaszokért, és mennyi levonást a rosszakért; ahol nincs negatív érték feltüntetve, ott a pozitív érték felét lehet negatívban kapni a rossz válaszáért. Ha valamelyik eredményt javítja, egyértelműen javítson. Ne használjon piros színű tollat!

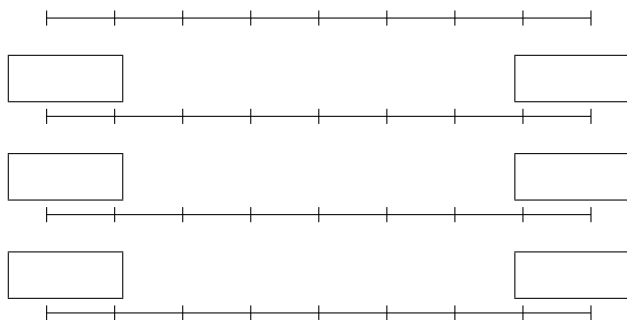
- Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Ha egy állításról úgy véli, hogy igaz, írjon az állítás előtti négyzetbe egy I betűt, ha hamisnak gondolja, akkor egy H betűt írjon a négyzetbe. A helyes válaszra +2 pontot kap, a rosszra -1-et. Nem kell minden négyzetet kitöltenie.

- A Hamming-kódok olyan perfekt kódok, amelyek *legfeljebb egyetlen* hibát képesek javítani.
- Az entrópia az információ várhatóértéke.
- Egy n elemű kódszavakat generáló ciklikus kód generátorpolinomja osztója a $t^n - 1$ polinomnak.
- Egy vektor szindrómája a \mathbf{H}^T paritásellenőrző mátrixszal vett szorzata.
- Az érvényes kódszavak szindrómája 0.
- Az (n, k) paraméterű Reed–Solomon-kódok kódszavainak a spektrumában az első $n - k$ elem 0.
- Mind a forráskódoló, mind pedig a csatornakódoló eljárások során *nő az üzenet entrópiája*.
- Egy olyan forráskódoló eljárásnak, amely az i -edik kódolandó szimbólumhoz ℓ_i hosszúságú kódszót rendel az átlagos kódszóhossza $L = \sum_i p_i \ell_i$, ahol p_i az i -edik szimbólum előfordulási valószínűsége.
- Az aritmetikai kódok az üzenet azonos hosszúságú blokkjaihoz rendelnek egy-egy bináris törtszámot, méghozzá úgy, hogy a nagyobb összvalószínűségű blokkokhoz több számjegyből álló tört tartozzon.
- A konvolúciós kódolók jellemzésére alkalmas állapotátmeneti gráfok csomópontjaiban a tárolók állapotai vannak, az élek pedig az állapotok közötti átmeneteket jelölik. Egy csomópontból mindig *kétszerannyi* él indul ki, mint ahány lehetséges bemeneti üzenetkeret van.
- A Viterbi-féle dekódoló algoritmusnál a túlélő útvonal az lesz, amelynek a vett bitsorozattól mért Hamming-távolsága *minimális*.

- Shannon forráskódolási tétele szerint egy emlékezet nélküli, stacionáris A forráshoz lehet olyan s elemű kódábécével dolgozó forráskódot találni, melynek az átlagos kódszóhossza $H(A)/(\log_2 s)$ és $H(A)/(\log_2 s) + 1$ között van, ha $H(A)$ az A halmaz entrópiája.
- Egy csatorna csatornakapacitása a $\max I(C \cdot X)$ együttes információ, ahol C a csatorna bemeneti, X pedig a kimeneti szimbólumkészlete.
- A Singleton-korlát szerint minden lineáris blokk-kód d_{\min} kódtávolságára igaz, hogy $d_{\min} = n - k + 1$, ahol n a kódszavak hossza, k pedig az üzenetblokkok hossza.
- A szisztematikus kódok \mathbf{H}^T paritásellenőrző mátrixának *utolsó $n - k$ sora egységmátrixot alkot.*
- A csatornakódolási tétel szerint, ha a csatornakapacitásnál *kisebb* kódsebességgel szeretnénk jeleket továbbítani a csatornán, akkor a kapott bitsorozat dekódolása során fellépő hibák száma *nem* csökkenthető tetszőlegesen kicsivé.
- A d_{\min} kódtávolságú csatornakódok kevesebb, mint d_{\min} hibát tudnak jelezni.
- A konvolúciós kódok távolságprofilja az a $d_1^* \leq d_2^* \leq d_3^* \leq \dots$ monoton nem csökkenő sorozat, amelynek elemei azok a d_i^* számok, amelyek a kódolón létrejövő első i kódszókeretből képezett vektorok minimális Hamming-távolságként állnak elő.
- Egy $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ halmaz információtartalma a Shannon-féle információdefiníció a $H(A) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$, ahol p_i az A_i halmazelem előfordulási valószínűsége.
- Az aritmetikai kódok olyan forráskódolási eljárások során jönnek létre, amelyek az üzenet azonos hosszúságú blokkjait különböző szóhosszúságú kódszavakba transzformálják.
- Egy csatornakódoló kódsebessége, ha blokk-kódolóról van szó, akkor a kódszóhosszának és a bemeneti blokkjai hosszának *szorzata*.
- Ha egy (n, k) paraméterű ciklikus kód $n - k$ -adfokú generátorpolinomja $g(t)$ és az i -edik kódszavához rendelt polinom $c_i(t)$, akkor igaz, hogy $c_i(t) = \alpha_i(t) \cdot g(t)$, ahol $\alpha_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \cdot t + \dots + \alpha_{i, k-1} \cdot t^{k-1}$ az i -edik üzenethez rendelt polinom.
- Egy emlékezet nélküli, diszkrét, időinvariáns csatorna jól jellemezhető a csatornamátrixával, melynek elemei megadják, hogy a különböző bemeneteket feltételezve milyen valószínűséggel fordulnak elő az egyes kimenetek. A teljes jellemzéshez szükséges a be- és kimeneti szimbólumkészlet ismerete is.
- Ha egy \mathbf{v} vektor úgy keletkezett, hogy egy lineáris blokk-kódoló kódszava a csatornán való átmenet közben torzult, akkor a szindrómája *soha nem lehet nulla*.
- Egy $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ vektor $w(\mathbf{v})$ súlya azon v_i komponenseinek száma, amelyek nem nullák.

- Legyen az „5”, „6”, „7” és „8” szimbólumok előfordulási valószínűsége rendre $3/8$, $1/8$, $2/8$ és $1/4$. Kódoljuk a „8 5 7” blokkot aritmetikai kóddal úgy, hogy az első lépésben az egyes szimbólumokhoz rendelt részintervallum hossza azonos legyen a szimbólum előfordulási valószínűségével. Legyen az intervallumok sorrendje azonos a feladat első sorában a felsorolás sorrendjével, azaz az első intervallum tartozzon az „5”-ös szimbólumhoz, a második a „6”-oshoz, a harmadik a „7”-eshez, a negyedik pedig a „8”-ashoz

A forrásábécé entrópiája 1,906. (+2 vagy -1 pont)



Az első szakaszon tüntesse fel az osztáspontokat egy-egy ponttal (2 pont). A többin a kis téglalpokban tüntesse fel az aktuális részintervallum kezdő és végpontját, az utolsó szakaszon a végső intervallumot (2 pont minden helyes értékpárért, 0 az egy helyes értékért -1 a rossz válaszáért).

A kapott kódszó (+2 vagy -1 pont):

- Egy $GF(3)$ véges számtest feletti, 8-elemű kódszavakat készítő ciklikus kód generátorpolinomja $g(t) = t^2 + t + 2$. Számolja ki a $h(t)$ paritásellenőrző polinomot. Húzza át a polinomok felesleges tagjait, ha vannak. (2 pont az osztandó polinomért, 8 pont az osztásért, ebből indulva hibánként -1 pont, de legalább -1, illetve -4 pont.)

$$\begin{aligned} \square t^8 + \square t^7 + \square t^6 + \square t^5 + \square t^4 + \square t^3 + \square t^2 + \square t^1 + \square t^0 = (t^2 + t + 2) \cdot (\square t^6 + \square t^5 + \\ + \square t^4 + \square t^3 + \square t^2 + \square t^1 + \square t^0) \end{aligned}$$

- Készítse el annak a $GF(5)$ véges test feletti, $(6,4)$ paraméterű szisztematikus nembináris Hamming-kódnak a generátormátrixát, melynek a paritásmátrixát alább láthatja. (+4 ponttól indul, hibáncént -1 pont, de legalább -2 pont.)

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

A $\mathbf{b} = (1\ 0\ 1\ 3)$ tömörített üzenetből keletkezett kódszó (2 p.):

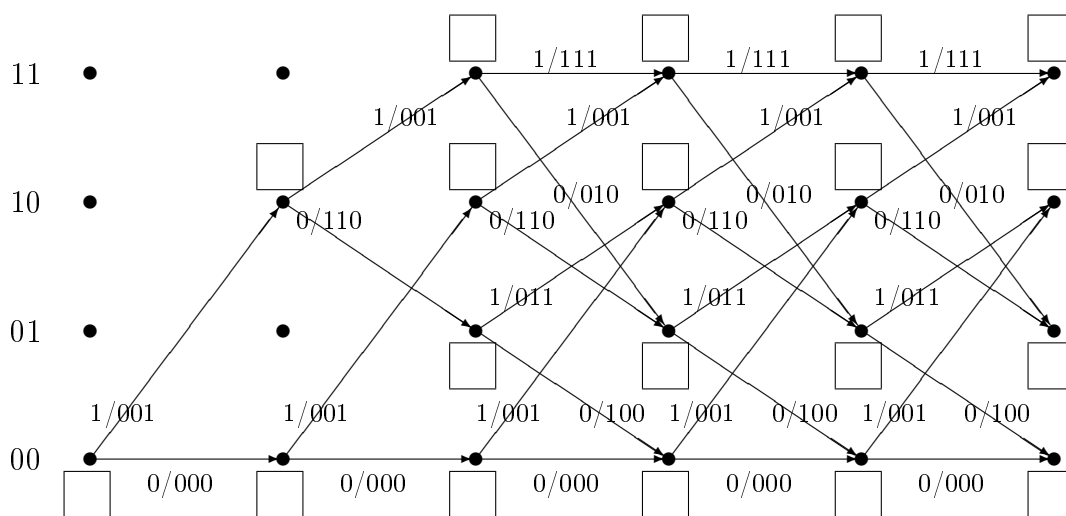
A $v = (2\ 0\ 4\ 1\ 0\ 3)$ vett szimbólumsorozat szindrómája (2 p.):

A $v = (2\ 0\ 4\ 1\ 0\ 3)$ vett szimbólumsorozat hibájának a nagysága (2 p.):

A $v = (2\ 0\ 4\ 1\ 0\ 3)$ vett szimbólumsorozat hibájának a helye a következő pozíció (2 p.): .

A $v = (2\ 0\ 4\ 1\ 0\ 3)$ vett szimbólumsorozat a következő, nem csatornakódolt üzenetből keletkezhetett (2 p.): .

- Dekódolja az alábbi trellisszel rendelkező konvolúciós kódolón keletkezett, majd a csatornán elromlott bitsorozatot Viterbi-algoritmussal. A vett bitsorozat 001 110 010 111 110 000. A trellis élein az adott átmenetkor keletkezett bemeneti bitek/kimeneti bithármassok láthatók. Tüntesse fel a trellis csomópontjaihoz tartozó összsúlyokat, jelölje a hozzájuk vezető túlélő útvonalat. Vastagítsa meg a trellisen a legkisebb összsúlyú túlélő útvonalat (max. 10 pont, minden rossz élért vagy súlyért -1 pont, legalább -5 pont. Ha hibásan számol összsúlyokat, de az alapján jó az útvonal, csak a súlyhibáncént kap -1 pontot).



A Viterbi algoritmussal dekódolt üzenet (2 pont):