

## Információelmélet: Vizsga feladatsor

Név: .....

Összpontszám:

--	--	--

Neptun kód: .....

Aláírás: .....

**Kitöltési útmutató:** A feladatok megoldásánál az üres téglalapokat kell kitölteni, illetve az ábrákat kell kiegészíteni. Az egyes feladatok kiírásában zárójelben szerepel, hogy hány pontot lehet kapni a jó válaszokért, és mennyi levonást a rosszakért; ahol nincs negatív érték feltüntetve, ott a pozitív érték felét lehet negatívban kapni a rossz válaszáért. Ha valamelyik eredményt javítja, egyértelműen javítson.

- Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Ha egy állításról úgy véli, hogy igaz, írjon az állítás előtti négyzetbe egy I betűt, ha hamisnak gondolja, akkor egy H betűt írjon a négyzetbe. A helyes válaszra +2 pontot kap, a rosszra -1-et. Nem kell minden négyzetet kitöltenie.

**I** A Hamming-korlát úgy adódott, hogy megszámláltuk minden kódszónak a  $t$  sugarú környezetében található vektorok számát, és összehasonlítottuk a teljes tér elemszámával. A  $t$  mennyiség a javítandó hibák száma.

**I** Lineáris blokk-kódok kódszavainak a szindrómája nulla.

**I** Egy csatorna csatornakapacitása,  $\mathcal{C} = \max I(C \cdot X)$ , ahol a csatornán átvitt információ  $I(C \cdot X) = H(C) - H(C|X)$ , a csatornára adott információ várhatóértékének és a csatorna veszteségének a különbsége.  $C$  a csatorna bemeneti,  $X$  pedig a kimeneti szimbólumkészlete.

**H** A Singleton-korlát szerint a  $k$  hosszúságú üzenetblokkokból  $n$  hosszúságú kódszavakat előállító csatornakódok  $d_{\min}$  kódtávolságára igaz, hogy  $d_{\min} \geq n - k + 1$ .

**H** A szisztematikus kódok  $\mathbf{G}$  generátormátrixának utolsó  $n - k$  sora egységmátrixot alkot.

**H** Az  $(n, k)$  paraméterű Reed–Solomon-kódok kódszavainak a spektrumában az első  $k$  elem 0.

**I** Az entrópia nemnegatív függvény.

**H** A Shannon-féle forráskódolási tétel kimondja, hogy egy emlékezet nélküli, stacionáris  $A$  forráshoz lehet olyan forráskódot találni, melynek az átlagos kódszóhossza  $H(A)/s$  és  $(H(A)/s) + 1$  között van, ha  $H(A)$  az  $A$  halmaz entrópiája,  $s$  pedig a kódábécé elemszáma.

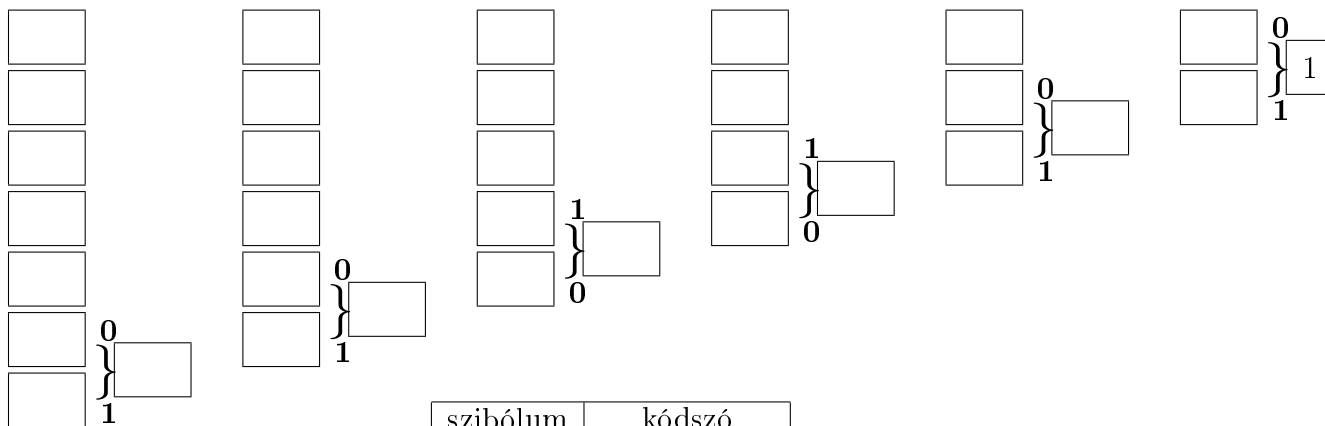
**I** A perfekt kódokra a gömbpakolási korlátban (Hamming-korlátban) az egyenlőség teljesül, azaz a perfekt kódok adott elemszámú kódábécé, üzenet- és kódszóhossz mellett a lehető legtöbb kódszót tartalmazzák.

**H** Ha egy  $(n, k)$  paraméterű ciklikus kód generátorpolinomja  $g(t)$  és az  $i$ -edik kódszavához rendelt polinom  $c_i(t)$ , akkor igaz, hogy  $c_i(t) = \alpha_i(t) + g(t)$ , ahol  $\alpha_i(t) = \alpha_{i0} + \alpha_{i0} \cdot t + \dots + \alpha_{i, k-1} \cdot t^{k-1}$  az  $i$ -edik üzenethez rendelt polinom.

- I** Egy  $p$  előfordulási valószínűségű esemény bekövetkezésekor nyert információ a Shannon-féle definíció szerint  $-\log_2 p$ .
- H** Az egyértelműen dekódolható kódok kódszóhossza tetszőlegesen kicsi lehet.
- I** A konvolúciós kódolók jellemzésére alkalmas állapotátmeneti gráfok csomópontjaiban a tárolók állapotai vannak, az élek pedig az állapotok közötti átmeneteket jelölik. Egy csomópontból mindig ugyanannyi él indul ki, mint ahány lehetséges bemeneti üzenetkeret van.
- I** A csatornakódolási tétel szerint, ha a csatornakapacitás kisebb, mint a kódsebesség, akkor nem lehet olyan csatornakódolási eljárást találni, amelyre a hibás dekódolás valószínűsége tetszőlegesen kicsi.
- I** A prefix kódok kódszavai közül egyik sem a másik folytatása.
- I** Ha egy Reed–Solomon-kódot a  $\vartheta$   $n$ -edrendű elem első  $n$  hatványával definiálunk, akkor egy  $b(t)$  polinommal jellemezhető üzenethez olyan kódszóvektor fog tartozni, melynek az  $i$ -edik komponense  $b(\vartheta^i)$ .
- I** A forráskódok olyan  $f : A \mapsto \mathcal{B}$  függvények, amelyek az  $A$  forrásábécé elemeihez a  $B$  kódábécé elemeiből álló, véges hosszúságú sorzatokat rendelnek hozzá.
- H** A Hamming-kódok legfeljebb két hibát képesek javítani és perfekt kódok.
- I** Egy csatornakódoló kódsebessége, ha blokk-kódolóról van szó, akkor a kódszóhosszának és a bemeneti blokkjai (üzenetek) hosszának hányadosa.
- H** A Huffman-kódolás egy-egy lépése során összevonjuk a két legnagyobb valószínűséggel előforduló szimbólumot egy-egy új, összetett szimbólummá.
- H** A forráskódoló eljárások az üzenet entrópiájának csökkentésére valók.
- H** Egy  $f : A \mapsto \mathcal{B}$  kód átlagos kódszóhossza  $\sum_{i=1}^n p_i \ell_i$ , ahol  $n$  a kódábécé elemeinek a száma,  $p_i$  az  $i$ -edik szimbólumának előfordulási valószínűsége,  $\ell_i$  pedig az ehhez a szimbólumhoz rendelt kódszó hossza.
- H** A szisztematikus kódok  $\mathbf{H}^T$  paritásellenőrző mátrixának első  $k$  oszlopa olyan  $k \times k$ -s mátrixot alkot, melynek csak a főátlójában vannak 1-esek, az összes többi eleme 0.
- I** Az egymást követő szimbólumoknak egy emlékezet nélküli csatornán való áthaladása mind egymástól független esemény.
- H** A Reed–Solomon-kódok olyan maximális távolságú lineáris blokk-kódok, amelyeknek nincs generátorpolinomjuk, így nem ciklikus kódok.

- Az a, b, c, d, e, f, g forrásábécé elemeinek előfordulási valószínűségei  $p_a = 0,28$ ;  $p_b = 0,05$ ;  $p_c = 0,12$ ;  $p_d = 0,10$ ;  $p_e = 0,16$ ;  $p_f = 0,08$  és  $p_g = 0,21$ . Töltse ki a szimbólumösszevonásra szolgáló ábra üres téglalapjait. Az oszlopokban szerepeljenek az elemek csökkenő sorrendben. (6 pont.)

Adja meg a kódszavakat tartalmazó táblázat hiányzó elemeit (Kódszavanként 2 pont).



szimbólum	kódszó
a	01
b	
c	110
d	
e	
f	0000
g	10

**H** A forrásábécé entrópiája  $-2,62$ . (+2 vagy  $-1$  pont)

**I** A kód átlagos kódszóhossza  $2,64$ . (+2 vagy  $-1$  pont)

- A  $GF(11)$  véges számtestnek a 6 tizedrendű eleme. Adjuk meg a 6 hatványait tartalmazó táblázat hiányzó elemeit (4 pont):

$\vartheta$	$\vartheta^2$	$\vartheta^3$	$\vartheta^4$	$\vartheta^5$	$\vartheta^6$	$\vartheta^7$	$\vartheta^8$	$\vartheta^9$	$\vartheta^{10}$
6	3	7		10		8			1

Adja meg a 3-mal, mint generátorelemmel definiált Reed–Solomon-kód által a  $b(t) = 4 + 3t^2 + t^3$  üzenetpolinomból generált kódszóvektor nulladik, második és hetedik elemét (6 pont.):

$c_0 =$  ,  
 $c_2 =$  ,  
 $c_7 =$  ,

- Egy  $GF(5)$  véges számtest feletti, nyolcelemű kódszavakat készítő ciklikus kód generátorpolinomja  $g(t) = t^2 + 2t + 2$ . Számolja ki a  $h(t)$  paritásellenőrző polinomot. Húzza át a polinomok felesleges tagjait, ha vannak. (2 pont az osztandó polinomért, 8 pont az osztásért.)

$$\begin{aligned} & \square t^8 + \square t^7 + \square t^6 + \square t^5 + \square t^4 + \square t^3 + \square t^2 + \square t^1 + \square t^0 = (t^2 + 2t + 2) \times \\ & \qquad \qquad \qquad \times (\square t^6 + \square t^5 + \square t^4 + \\ & \qquad \qquad \qquad + \square t^3 + \square t^2 + \square t^1 + \square t^0) \end{aligned}$$

- Készítse el annak a  $GF(7)$  véges test feletti, (8,6) paraméterű szisztematikus nembináris Hamming-kódnak generátormátrixát, melynek a paritásmátrixát alább láthatja. (4 pont)

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

A  $\mathbf{b} = (3 \ 6 \ 0 \ 0 \ 4 \ 1)$  tömörített üzenetből keletkezett kódszó (2 p.):

--	--	--	--	--	--	--	--

A  $\mathbf{v} = (4 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1 \ 0)$  vett szimbólumsorozat szindrómája (2 p.):

A  $\mathbf{v} = (4 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1 \ 0)$  vett szimbólumsorozat hibájának a nagysága (2 p.):

A  $\mathbf{v} = (4 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1 \ 0)$  vett szimbólumsorozat hibájának a helye a következő pozíció (2 p.): 



.

A  $\mathbf{v} = (4 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 3 \ 1 \ 0)$  vett szimbólumsorozat a következő, nem csatornakódolt üzenetből keletkezhetett (2 p.): 



.