Információelmélet: Vizsga feladatsor

Név: .... Összpontszám: | | | |

Neptun kód: ....

Aláírás: ....

Kitöltési útmutató: A feladatok megoldásánál az üres téglalapokat kell kitölteni, illetve az ábrákat kell kiegészíteni. Az egyes feladatok kiírásában zárójelben szerepel, hogy hány pontot lehet kapni a jó válaszokért, és mennyi levonást a rosszakért; ahol nincs negatív érték feltüntetve, ott a pozitív érték felét lehet negatívban kapni a rossz válaszért. Ha valamelyik eredményt javítja, egyértelműen javítson.

- Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Ha egy állításról úgy véli, hogy igaz, írjon az állítás előtti négyzetbe egy I betűt, ha hamisnak gondolja, akkor egy H betűt írjon a négyzetbe. A helyes válaszra +2 pontot kap, a rosszra −1-et. Nem kell minden négyzetet kitöltenie.

I A perfekt kódokra a gömbpakolási korlátban (Hamming-korlátban) az egyenlőség teljesül.

H Ha egy (n, k) paraméterű ciklikus kód generátorpolinomja $g(t)$ és az i-edik kódszavához rendelt polinom $c_i(t)$, akkor igaz, hogy $c_i(t) = b_i(t)/g(t)$, ahol $b_i(t)$ az i-edik üzenethez rendelt polinom.

H Egy p előfordulási valószínűségű esemény bekövetkezésekor nyert információ a Shannon-féle definíció szerint $-\log_2(1/p)$.

H Egy csatorna csatornakapacitása, $\mathcal{C} = H/n$, lényegében az egy szimbólum átbocsátásakor átlagosan átvitt információ.

I A konvolúciós kódolók jellemzésére alkalmas állapotátmeneti gráfok csomópontjaiban a tárolók állapotai vannak, az élek pedig az állapotok közötti átmeneteket jelölik. Egy csomópontból mindig annyi él indul ki, mint ahány lehetséges bemeneti üzenetkeret van.

H A csatornakódolási tétel szerint, ha a csatornakapacitás kisebb, mint a kódsebesség, akkor lehet olyan csatornakódolási eljárást találni, amelyre a hibás dekódolás valószínűsége tetszőlegesen kicsi.

I A prefix kódok kódszavai közül egyik sem a másik folytatása.

I Ha egy Reed–Solomon-kódot a ϑ n-edrendű elem első n hatványával definiálunk, akkor egy $b(t)$ polinommal jellemezhető üzenethez olyan kódszóvektor fog tartozni, melynek az i-edik komponense $b(\vartheta^i)$.

I A forráskódok olyan $F : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ függvények, amelyek az A forrásábécé elemeiből álló véges hosszúságú sorozatokhoz (azaz az $\mathcal{A}$ halmaz elemeihez) a B kódábécé elemeiből álló, véges hosszúságú sorozatokat rendelnek hozzá.

I Az aritmetikai kódok az üzenet azonos hosszúságú blokkjaihoz rendelnek egy-egy bináris törtszámot, méghozzá úgy, hogy a kisebb összvalószínűségű blokkokhoz több számjegyből álló tört tartozzon.

I Ha a csatorna kimenetén vett $\mathbf{v}$ szimbólumsorozat egy lineáris blokk-kódoló érvényes kódszavából keletkezett, akkor a sorozat $\mathbf{s}$ szindrómáját az $\mathbf{s} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}^T$ képlettel számoljuk, ahol $\mathbf{H}^T$ a kódoló paritásellenőrző mátrixa.

H Lineáris blokk-kódok érvényes kódszavainak a szindrómája nagyobb, mint nulla.

I Egy csatornán átvitt információ $I(C \cdot X) = H(C) - H(C|X)$, a csatornára adott információ várhatóértékének és a csatorna veszteségének a különbsége. C a csatorna bemeneti, X pedig a kimeneti szimbólumkészlete.

H A Singleton-korlát szerint a k hosszúságú üzenetblokkokból n hosszúságú kódszavakat előállító csatornakódok $d_{\min}$ kódtávolságára igaz, hogy $d_{\min} \geq n - k + 1$.

I Egy emlékezet nélküli, diszkrét, időinvariáns csatorna jól jellemezhető a csatornamátrixával vagy a csatornagráfjával.

H Az (n, k) paraméterű Reed–Solomon-kódok generátorpolinomja k-adfokú.

H Az entrópia szigorúan pozitív függvény (nem lehet 0 sem).

I A Shannon-féle forráskódolási tétel azt mondja ki, hogy egy emlékezet nélküli, stacionáris, $H(A)$ entrópiájú A forráshoz lehet olyan forráskódot találni, melynek az átlagos kódszóhossza $H(A)/\log_2 s$ és $(H(A)/\log_2 s) + 1$ között van, ahol s a kódábécé elemszáma.

H Egy n elemű kódszavakat generáló ciklikus kód paritásellenőrző polinomja osztója a $t^{(n+1)} - 1$ polinomnak.

I A Huffman-kódolás egy-egy lépése során összevonjuk a két legkisebb valószínűséggel előforduló szimbólumot egy-egy új, összetett szimbólummá. Az összetett szimbólumhoz a két kiindulási szimbólum valószínűségének összegét rendeljük.

I A forráskódoló eljárások során az üzenet entrópiája növekszik.

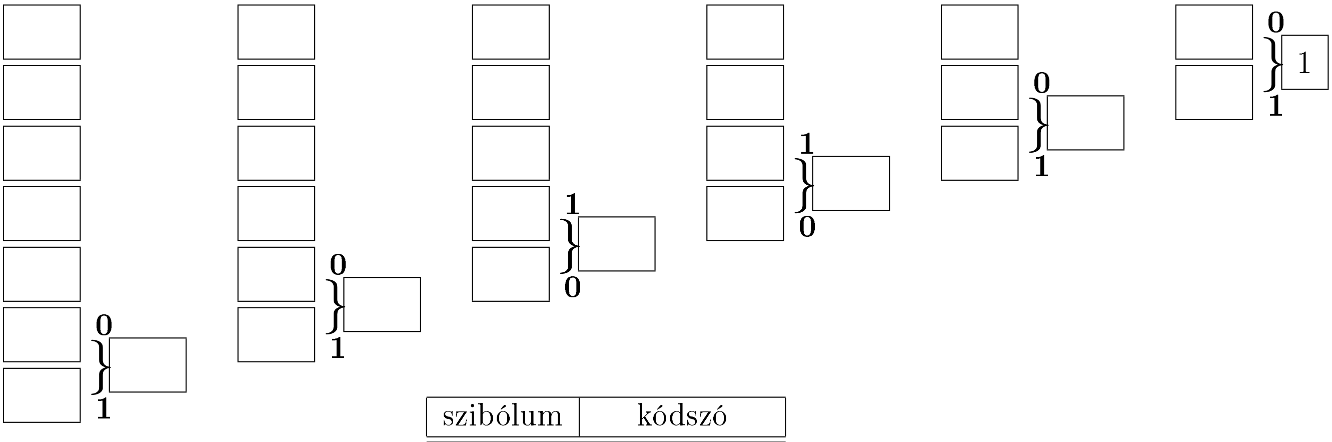
H Egy $f : A \mapsto \mathcal{B}$ kód átlagos kódszóhossza $\sum_{i=1}^{n} p_i \ell_i$, ahol n a *kód*ábécé elemeinek a száma, p_i az i-edik szimbólumának előfordulási valószínűsége, ℓ_i pedig az ehhez a szimbólumhoz rendelt kódszó hossza.

H A szisztematikus kódok $\mathbf{H}^T$ paritásellenőrző mátrixának első k oszlopa egységmátrixot alkot.

I A bináris törléses csatorna mindkét bemeneti jelét p valószínűséggel a hibaszimbólumba transzformálja.

I A Reed–Solomon-kódok olyan maximális távolságú lineáris blokk-kódok, amelyek egyben ciklikus kódok is.

- Az E, F, G, H, I, J, K forrásábécé elemeinek előfordulási valószínűségei $p_{\mathrm{E}} = 0,26$; $p_{\mathrm{F}} = 0,05$; $p_{\mathrm{G}} = 0,12$; $p_{\mathrm{H}} = 0,10$; $p_{\mathrm{I}} = 0,16$; $p_{\mathrm{J}} = 0,08$ és $p_{\mathrm{K}} = 0,23$. Töltse ki a szimbólumösszevonásra szolgáló ábra üres téglalapjait. Az oszlopokban szerepeljenek az elemek csökkenő sorrendben. (6 pont.)
  Adja meg a kódszavakat tartalmazó táblázat hiányzó elemeit (Kódszavanként 2 pont).



szibólum	kódszó
E	01
F	
G	100
H	
I	
J	0000
K	11

H A forrásábécé entrópiája $-2,62$. (+2 vagy -1 pont)

I A kód átlagos kódszóhossza 2,64. (+2 vagy -1 pont)

- A $GF(7)$ véges számtestnek a 3 hatodrendű eleme. Adjuk meg a 3 hatványait tartalmazó táblázat hiányzó elemeit (4 pont):

ϑ	ϑ^2	ϑ^3	ϑ^4	ϑ^5	ϑ^6
3			4		

Adja meg a 3-mal, mint generátorelemmel definiált Reed–Solomon-kód által a $b(t) = 4 + 3t^2 + t^3$ üzenetpolinomból generált kódszóvektor nulladik, második és ötödik elemét (6 pont.):

$c_0 = \boxed{}$,

$c_2 = \boxed{}$,

$c_5 = \boxed{}$,

- Egy $GF(11)$ véges számtest feletti, hatelemű kódszavakat készítő ciklikus kód generátorpolinomja $g(t) = t^2 + 10t + 1$. Számolja ki a $h(t)$ paritásellenőrző polinomot. Húzza át a polinomok felesleges tagjait, ha vannak. (2 pont az osztandó polinomért, 8 pont az osztásért.)

$$\boxed{}\,t^8 + \boxed{}\,t^7 + \boxed{}\,t^6 + \boxed{}\,t^5 + \boxed{}\,t^4 + \boxed{}\,t^3 + \boxed{}\,t^2 + \boxed{}\,t^1 + \boxed{}\,t^0 = (t^2 + 10t + 1) \times$$
$$\times \Big(\boxed{}\,t^6 + \boxed{}\,t^5 + \boxed{}\,t^4 +$$
$$+ \boxed{}\,t^3 + \boxed{}\,t^2 + \boxed{}\,t^1 + \boxed{}\,t^0 \Big)$$

- Készítse el annak a $GF(7)$ véges test feletti, (8,6) paraméterű szisztematikus nembináris Hamming-kódnak generátormátrixát, melynek a paritásmátrixát alább láthatja. (4 pont)

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array} \right)$$

A 460021 tömörített üzenetből keletkezett kódszó (2 p.):

A 60411325 vett szimbólumsorozat szindrómája (2 p.): $\boxed{}\boxed{}$

A 60411325 vett szimbólumsorozat hibájának a nagysága (2 p.): $\boxed{}$

A 60411325 vett szimbólumsorozat hibájának a helye a következő pozíció (2 p.): $\boxed{}$.

A 60411325 vett szimbólumsorozat a következő, nem csatornakódolt üzenetből keletkezhetett (2 p.): $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$.