SZÉCHENYI ISTVÁN
EGYETEM
GYŐR

KÓDOLÁSELMÉLET

Nagy Szilvia

8. Forráskódolás hűségkritériummal

2009.

Forráskódolás hűségkritériummal

Forráskódolás hűségkritérium-mal

Alapkoncepció

Mintavételezés, kvantálás

Transzformá-ciós kódok

Állandó kódszóhossz

Információsta-bilitás

ε hibavalószí-nűségű kódolás

Jelsebesség

Cél: a forrásnak csak számunkra fontos jellemzőit tartsuk meg.

Általában blokkból blokkba kódolunk, mindkét blokk mérete állandó. (Nem maradunk a változó szóhosszúságú kódolásnál).

Feltesszük, hogy van egy **hűségmérték**, amely megadja, hogy a kódszavunk milyen mértékben tekinthető az adott forrásábécébeli sorozat hű reprezentációjának.

Mintavételezés, kvantálás

- jól választott mintavételezési idő
  $y\,(\,t\,) \rightarrow y\,(\,t_0{+}nT\,),\quad n = 0, 1, 2, \ldots$
- feladathoz illő kvantáló
  $y\,(\,t_0{+}nT\,) \rightarrow Q\,(\,y\,(\,t_0{+}nT\,)),\quad n = 0, 1, 2, \ldots$
  - lineáris kvantáló
  - lineáris kvantáló transzformációval
  - nemlineáris kvantáló

Négyzetes torzítás:

$$D(Q) = \frac{1}{N}\left\langle \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - Q(y_i)\right)^2 \right\rangle$$

Optimális kvantálási érték a kvantálási tartomány súlypontja

Transzformációs kódolás

- Felosztjuk a kódolandó a_i jelsorozatot k hosszúságú diszjunkt szakaszokra
- minden szakaszra alkalmazunk egy invertálható **T** transzformációt $a_i \rightarrow y_i$
- kvantáljuk az y_i sorozatot (akár lineárisan)
- a kvantált értékeket valamilyen bináris számokként reprezentáljuk

Ha a **T** transzformáció lineáris:

$$y_j = \sum_{i=0}^{k-1} t_{ji} a_i \qquad x_i = \sum_{i=0}^{k-1} u_{ij} y_j$$

vagy mátrixosan:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ta} \qquad \mathbf{a} = \mathbf{Uy}$$

Transzformációs kódolás

Ha a kiindulási adatfolyam kétdimenziós:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^T \qquad \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{Y}\mathbf{U}^T \left(= \mathbf{T}^T\mathbf{Y}\mathbf{T}\right)$$

ortonormált trf. esetén

A transzformáló mátrixokra

$$\mathbf{T}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{T} = \mathbf{I}, \qquad \text{ortonormált esetben}: \mathbf{U} = \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$$

DCT: $$t_{i,j} = \sqrt{\frac{2}{k}} \cos\frac{(2j-1)\cdot(i-1)\pi}{2k}$$

DST: $$t_{i,j} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \sin\frac{ij\pi}{k+1}$$

DWHT: $$\mathbf{T}_1 = (1), \quad \mathbf{T}_{2^k} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{2^{k-1}} & \mathbf{T}_{2^{k-1}} \\ \mathbf{T}_{2^{k-1}} & -\mathbf{T}_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$$

Forráskódolás hűségkritériummal

Változó kódszóhosszú forráskódolás esetén egyetlen hibásan átvitt kódszó felboríthatja a dekódolást.

Állandó kószóhossz esetén ez nem áll fent, viszont tömörítés sem lehetséges:

$$f : \mathcal{A}^k \to \mathcal{B}^\ell$$

kódok esetén a betűnkénti átlagos kódszóhossz:

$$L = \frac{\ell}{k} \geq \frac{\log_2 r}{\log_2 s}$$

$$H(A) \leq \log_2 r$$

Shannon forráskódolási tétele szerint nem optimális!

mivel $r^k \leq s^\ell$.

(r a forrásábécé, s pedig a kódábécé elemszáma.)

Forrás részhalmazainak valószínűsége

Állandó $f : \mathcal{A}^k \to \mathcal{B}^\ell$ kódszóhossz mellett feladjuk az egyértelmű dekódolhatóságot.

Az A forrásábécéből képezett k hosszúságú üzenetek $\mathcal{A}^k$ halmazának $X \subset \mathcal{A}^k$ **részhalmazának a valószínűsége**:

$$p(X) = p\left(\left\{A^{(1)}, \ldots A^{(k)}\right\} \in X\right)$$

Ha stacionáris a forrás, ez bármely n=0,1,… egész számra

$$p(X) = p\left(\left\{A^{(n+1)}, \ldots A^{(n+k)}\right\} \in X\right)$$

Forráskódolás ε hűségkritériummal

Legyen ε>0. Egy A stacionáris forrás $f : \mathcal{A}^k \to \mathcal{B}^\ell$ kódja akkor ε hibával dekódolható, ha $\exists \;\; f' : \mathcal{B}^\ell \to \mathcal{A}^k$ dekódoló függvény, melyre

$$p\left(f'\left(f\left(A^{(1)},\ldots,A^{(k)}\right)\right) \neq A^{(1)},\ldots,A^{(k)} \right) \leq \varepsilon$$

Az *f* kód tehát az $\mathcal{A}^k$ halmaznak 1−ε való-színűségű X részhalmazát invertálhatóan képezi $\mathcal{B}^\ell$-be.

Forráskódolás ε hűségkritériummal

Kódolás:

- megkeressük azt a minimális elemszámú $X_{k,\varepsilon} \subset \mathcal{A}^k$ részhalmazt, melynek valószínűsége nagyobb, mint $1-\varepsilon$.
- megkeressük azt az ℓ-et, melyre

$$s^{\ell-1} < \# X_{k,\varepsilon} \le s^{\ell}$$

(#*X* az *X* halmaz elemszáma)

- Az $X_{k,\varepsilon}$-beli üzeneteket egyértelműen kódoljuk B^{ℓ}-beli kódszavakká: $f_0 : \left(X \subset \mathcal{A}^k\right) \to \mathcal{B}^{\ell}$
- a többi, $a \in \left(\mathcal{A}^k \setminus X_{k,\varepsilon}\right)$ elemet tetszőlegesen kódoljuk (akár mindet ugyanazzá a kódszóvá)

Forráskódolás ε hűségkritériummal

A minimális elemszámú, 1−ε-nál nagyobb valószínűségű $X_{k,\varepsilon} \subset \mathcal{A}^k$ részhalmaz megkeresése:

- legyen a_1 a legnagyobb valószínűségű $\mathcal{A}^k$-beli elem, a_2 a második legnagyobb valószínűségű $\mathcal{A}^k$-beli elem, …
- válasszuk ki ezen a_i-k közül az első $N(k,\varepsilon)$ darabot, melyre teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{N(k,\varepsilon)} p(a_i) > 1-\varepsilon$$

de

$$\sum_{i=1}^{N(k,\varepsilon)-1} p(a_i) \le 1-\varepsilon$$

- ezek az a_i-k alkotják $X_{k,\varepsilon}$-t.

Információstabilis forrás

Egy A forrás **információstabilis**, ha tetszőleges $\delta>0$ számra

$$\lim_{k\to\infty} p\left(\left|-\frac{1}{k}\log_2 p\left(A^{(1)},\dots,A^{(k)}\right)-\mathcal{H}(A)\right|>\delta\right)=0$$

Belátható, hogy a stacionáris, ergodikus források információstabilisak.

Információstabilis forrás

A stacionáris, emlékezet nélküli források információstabilisak.

Bizonyítás: stacionáris memóriamentes forrásokra $\mathcal{H}(A)=H(A)$, így a bizonyítandó

$$\lim_{k\to\infty} p\left(\left|-\frac{1}{k}\log_2 p\left(A^{(1)},\ldots,A^{(k)}\right)-H(A)\right|>\delta\right)=0.$$

Szintén igaz, hogy

$$p\left(A^{(1)},\ldots,A^{(k)}\right)=p\left(A^{(1)}\right)\cdot\ldots\cdot p\left(A^{(k)}\right)$$

Információstabilis forrás

$$p\left(A^{(1)},\ldots,A^{(k)}\right)=p\left(A^{(1)}\right)\cdot\ldots\cdot p\left(A^{(k)}\right)$$

így $$-\frac{1}{k}\log_2 p\left(A^{(1)},\ldots,A^{(k)}\right)=$$

$$-\frac{1}{k}\log_2\left(p\left(A^{(1)}\right)\cdot\ldots\cdot p\left(A^{(k)}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(-\log_2 p\left(A^{(i)}\right)\right)$$

Minden $A^{(i)}$-nek azonos az eloszlása, így a nagy számok gyenge tv-e szerint a sorozat az elemeinek várhatóértékéhez tart:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(-\log_2 p\left(A^{(i)}\right)\right)\xrightarrow{k\to\infty}\left\langle-\log_2 p\left(A^{(i)}\right)\right\rangle=$$

$$\left\langle-\log_2 p(A)\right\rangle=H(A)$$

Információstabilis forrás

Ebből

$$\lim_{k\to\infty} p\left(\left|\underbrace{-\frac{1}{k}\log_2 p\left(A^{(1)},\ldots,A^{(k)}\right)}_{\substack{k\to\infty \\ \downarrow \\ H(A)}}-H(A)\right|>\delta\right)=0.$$

Tipikus sorozatok

Információstabilis források tipikus sorozatairól szóló tétel: Ha az A forrás információstabilis, akkor ∀ $0<\varepsilon<1$ esetén

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log_2 N(k,\varepsilon)=H(A)$$

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{A}^k$-nak olyan részhalmaza $Y_{k,\delta}$, a tipikus sorozatok halmaza, melyre:

$$Y_{k,\delta}=\left\{a\in\mathcal{A}^k\;\middle|\;\left|-\frac{1}{k}\log_2 p(a)-\mathcal{H}(A)\right|\le\delta\right\}.$$

azaz ∀ $a\in Y_{k,\delta}$-re

$$2^{-k(\mathcal{H}(A)+\delta)}\le p(a)\le 2^{-k(\mathcal{H}(A)-\delta)}$$

Tipikus sorozatok

$Y_{k,\delta}$ elemszáma: $\left(\# Y_{k,\delta}\right) \leq 2^{k(\mathcal{H}(A)+\delta)}$, mivel

$$1 \geq \sum_{a \in Y_{k,\delta}} p(a) \geq \left(\# Y_{k,\delta}\right) \cdot \min_{a \in Y_{k,\delta}} p(a) \geq \left(\# Y_{k,\delta}\right) \cdot 2^{-k(\mathcal{H}(A)+\delta)}.$$

Mivel A információstabilis, $\forall\ \delta>0$ számra egy bizonyos k felett $Y_{k,\delta}$ valószínűsége $>(1-\varepsilon)$.

Van ezenkívül egy $X_{k,\varepsilon} \subset \mathcal{A}^k$ részhalmaz, melynek valószínűsége nagyobb, mint $1-\varepsilon$:

$$N(k,\varepsilon) = \left(\# X_{k,\varepsilon}\right) \leq \left(\# Y_{k,\varepsilon}\right) \leq 2^{k(\mathcal{H}(A)+\delta)}$$

$$\frac{1}{k} \log_2 N(k,\varepsilon) \leq \mathcal{H}(A) + \delta$$

δ tetszőleges: $\boxed{\limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k} \log_2 N(k,\varepsilon) \leq \mathcal{H}(A)}$

Tipikus sorozatok

Forráskódolás hűségkritérium-mal

Alapkoncepció

Mintavételezés, kvantálás

Transzformá-ciós kódok

Állandó kódszóhossz

Információsta-bilitás

ε hibavalószí-nűségű kódolás

Jelsebesség

Legyen k olyan, hogy $p\left(Y_{k,\delta}\right) \geq \dfrac{1+\varepsilon}{2} \quad (<1).$

Ekkor

$$\frac{1+\varepsilon}{2} < p\left(Y_{k,\delta}\right) = p\left(Y_{k,\delta} \cap X_{k,\delta}\right) + p\left(Y_{k,\delta} \cap \overline{X_{k,\delta}}\right) <$$

$$p\left(Y_{k,\delta} \cap X_{k,\delta}\right) + \varepsilon,$$

$$P\left(\overline{X_{k,\varepsilon}}\right) < \varepsilon$$

így $\dfrac{1-\varepsilon}{2} < p\left(Y_{k,\delta} \cap X_{k,\delta}\right) \leq$

$$\left(\# Y_{k,\delta} \cap X_{k,\delta}\right) \max_{a \in Y_{k,\delta}} p(a) \leq$$

$$\underbrace{\left(\# X_{k,\delta}\right)}_{N(k,\varepsilon)} \; 2^{k(\mathcal{H}(A) \quad \delta)}$$

Tipikus sorozatok

Így

$$\frac{1-\varepsilon}{2}\cdot 2^{-k(\mathcal{H}(A)-\delta)} < N(k,\varepsilon)$$

Átrendezve, kellően nagy *k*-ra

$$\frac{1}{k}\log_2\frac{1-\varepsilon}{2}+\mathcal{H}(A)-\delta<\frac{1}{k}\log_2 N(k,\varepsilon)$$

Mivel δ>0 tetszőleges,

$$\boxed{\liminf_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log_2 N(k,\varepsilon)\geq\mathcal{H}(A)}$$

korábbról:

$$\boxed{\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log_2 N(k,\varepsilon)\leq\mathcal{H}(A)}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log_2 N(k,\varepsilon)=H(A)$$

ε hibavalószínűségű kódolás

Ha egy *A* stacionáris, információstabilis forrás k hosszúságú blokkjait 0<ε<1 hibával kódoljuk ℓ_k hosszúságú blokkokba, akkor

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ell_k}{k} \geq \frac{\mathcal{H}(A)}{\log_2 s}$$

és ∀ 0<ε<1 hibavalószínűséghez és δ>0 számhoz kellően nagy *k* esetén ∃ $f : \mathcal{A}^k \to \mathcal{B}^{\ell_k}$ ε hibával dekódolható kód, melyre

$$L = \frac{\ell_k}{k} < \frac{\mathcal{H}(A)}{\log_2 s} + \delta$$

ε hibavalószínűségű kódolás

Bizonyítás:

1.) az ε hibavalószínűséggel dekódolható

$f : \mathcal{A}^k \to \mathcal{B}^{\ell_k}$ kódokra

$$N(k,\varepsilon) \le s^{\ell_k}$$

azaz

$$L = \frac{\ell_k}{k} \ge \frac{\frac{1}{k} \log_2 N(k,\varepsilon)}{\log_2 s} \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad \frac{\mathcal{H}(A)}{\log_2 s}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log_2 N(k,\varepsilon) = H(A)$$

az előző tétel szerint

ε hibavalószínűségű kódolás

2.) legyen

$$\ell_k = \left\lceil \frac{\log_2 N(k,\varepsilon)}{\log_2 s} \right\rceil$$

Ekkor az előző tétel szerint $\exists k_0$, mely $k_0 > 2/\delta$ és melyre $\forall\, k > k_0$-ra

$$\frac{1}{k}\log_2 N(k,\varepsilon) < H(A) + \frac{\delta}{2}\log_2 s$$

Így $k > k_0$-ra

$$\frac{\ell_k}{k} < \frac{1}{k}\left(\frac{\log_2 N(k,\varepsilon)}{\log_2 s} + 1\right) \le \frac{\mathcal{H}(A)}{\log_2 s} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{k} \le \frac{\mathcal{H}(A)}{\log_2 s} + \delta$$

Jelsebesség

Egy $f : \mathcal{A}^k \to \mathcal{B}^\ell$, s elemű kódábécével dolgozó kód jelsebessége

$$R = \frac{\ell}{k}\log_2 s$$

R megadja, hogy ha az $N=s^\ell$ darab kódszó hány kódkarakterből áll forrásbetűnként. (Hogy a referencia adott legyen, mindent átszámítunk bináris kódokra, ezért a $\log_2 s$.)

R jelsebességű kódok közül az a legjobb, amely az $\mathcal{A}^k$ csökkenő valószínűség szerint sorba rendezett elemei közül első 2^{kR} darabot kódolja egyértelműen dekódolhatóvá.

Jelsebesség

Egy stacionáris információstabilis *A* forrást kódoló, legfeljebb *R* jelsebességű, legkisebb hibavalószínűségű $f:\mathcal{A}^k\to\mathcal{B}^\ell$ kód $p_E(k,R)$ hibavalószínűsége

- ha $R > \mathcal{H}(A)$

$$\lim_{k\to\infty} p_E(k,R)=0$$

- ha $R < \mathcal{H}(A)$

$$\lim_{k\to\infty} p_E(k,R)=1$$

Jelsebesség

Bizonyítás:

legyen az $f:\mathcal{A}^k \to \mathcal{B}^\ell$ minimális szimbólumon-kénti átlagos kódszóhosszú kód jelsebessége

$$R_k = \frac{\ell_k}{k}\log_2 s.$$

1.) Ha $R>\mathcal{H}(A)$: az előző tétel 2. része szerint

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ell_k}{k} \le \frac{\mathcal{H}(A)}{\log_2 s} \quad\Rightarrow\quad \limsup_{k\to\infty} R_k \le \mathcal{H}(A)$$

Mivel $R>\mathcal{H}(A)$, $\forall\ 0<\varepsilon<1$-hez $\exists\ k_0$, hogy $\forall\ k>k_0$-ra $R_k<R$, ebből

$$\left(\sum_{i\ge 2^{kR_k}} p(a_i) = \right) \quad \overset{\le\varepsilon}{p_E(k,R_k)} \ge p_E(k,R)$$

Jelsebesség

azaz $p_E(k,R) \le \varepsilon.$

2.) Ha $R<\mathcal{H}(A)$: Indirekt bizonyítás:

Tfh. ∃ olyan $k_i \to \infty$ sorozat, melyhez ∃ $0 < \varepsilon < 1$ szám, hogy $p_E(k_i,R) < \varepsilon$. Az ilyen kód átlagos betűnkénti szóhossza

$$L = \frac{\ell_{k_i}}{k_i} \le \frac{R}{\log_2 s}.$$

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ell_{k_i}}{k_i} \le \frac{R}{\log_2 s} < \frac{\mathcal{H}(A)}{\log_2 s}$$

ami ellentmond az előző tétel 1. felével:

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\ell_k}{k} \ge \frac{\mathcal{H}(A)}{\log_2 s}$$